Journal

für die

66180

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung des Herrn

Weierstrass

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 116.

In vier Heften.

Berlin, 1896.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

9408

Inhaltsverzeichniss des Bandes 116.

Seite

Baur, L. Zur Theorie der algebraischen Functionen. . . . . 167—170

Brioschi, F. Relations différentielles entre les périodes des fonctions hyperelliptiques $p = 2$. (Extrait d'une lettre de M. *F. Brioschi* à M. *L. Fuchs*.) 326—330

Hamburger, M. Ableitung der *Gauss*schen Formel zur Bestimmung des jüdischen Osterfestes. . . . . 90— 96

Heffter, L. Ueber gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse. . . . . 157—166

Hensel, K. Ueber den grössten gemeinsamen Theiler aller Zahlen, welche durch eine ganze Function von n Veränderlichen darstellbar sind. . . 350—356

Hermite, Ch. Sur une extension du théorème de *Laurent*. (Extrait d'une lettre adressée par M. *Ch. Hermite* à M. *L. Fuchs*.) . . . . . 85— 89

— — et **Sonin.** Sur les polynômes de *Bernoulli*. (Extrait d'une correspondance entre M. *Sonin* à St.-Pétersbourg et M. *Hermite* à Paris.) . 133—156

Horn, J. Ueber die Reihenentwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen. . 265—306

Kantor, S. Ueber die endlichen Gruppen von Correlationen. . . . . 171—177

Kneser, A. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments. (Erster Aufsatz.) . . . . . 178—212

Kötter, Fr. Ueber eine Darstellung der Richtungscosinus zweier orthogonalen Coordinatensysteme durch Thetafunctionen zweier Argumente, welche die Lösungen mehrerer Probleme der Mechanik als Specialfälle umfasst. . . . . 213—246

Landsberg, G. Ueber Fundamentalsysteme und bilineare Formen. . . . 331—349

Meder, A. Ueber einige Arten singulärer Punkte von Raumcurven. . . . { 50— 84 / 247—264

Meyer, A. Ueber indefinite ternäre quadratische Formen. (Fortsetzung der Arbeit aus Bd. 115 Heft II S. 150—182 dieses Journals.) . . . . . 307—325

Seite

Netto, E. Zur Theorie der Resultanten. . . . . 33— 49

Schlesinger, L. Ueber die Integration linearer homogener Differentialgleichungen durch Quadraturen. . . . . 97—132

Sonin et **Hermite.** Sur les polynômes de *Bernoulli.* (Extrait d'une correspondance entre M. *Sonin* à St.-Pétersbourg et M. *Hermite* à Paris.) . 133—156

Teixeira, F. G. Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable. . . . . 14— 32

Wallenberg, G. Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung. . . . . 1— 9

Zimmermann, O. Ueber die Ordnung der Enveloppe solcher ebenen Curvenreihen, deren Individuen sich in Gruppen von je w ordnen lassen, welche den Punkten einer Geraden projectiv sind. . . . . 10— 13

Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung.

(Von Herrn *Georg Wallenberg.*)

Herr *Fuchs**) hat die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, dass die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$(A.) \qquad F(z, y, y') = 0,$$

worin F eine ganze rationale Function von y und y' mit von z abhängigen Coefficienten bedeutet, feste Verzweigungspunkte besitzen. Diesen Bedingungen hat Herr *Poincaré***) eine andere Form gegeben, und da ist von besonderer Wichtigkeit die von ihm angegebene vierte Bedingung***), weil dieselbe sich am besten dazu eignet, in Bedingungsgleichungen für die Coefficienten der Differentialgleichung (A.) umgesetzt zu werden†). Diese Bedingung sagt aus, dass F in der Differentialgleichung (A.) einer Relation genügen muss:

$$(1.) \qquad \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = P.F + Q \cdot \frac{\partial F}{\partial y'},$$

worin P und Q *ganze rationale* Functionen von y und y' bedeuten, deren Coefficienten von z abhängen. Das heisst mit anderen Worten: Alle Integrale von (A.) genügen der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(B.) \qquad y'' + Q = 0;$$

oder die Differentialgleichung (A.) muss eine Integralgleichung erster Ordnung der Differentialgleichung (B.) sein. — Diese Bedingung gewinnt an Wichtig-

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie; Sitzung v. 26. Juni 1884; S. 699.

**) Acta Mathem. 7 : 1; p. 1. „Sur un théorème de M. *Fuchs*."

***) l. c. p. 3.

†) Vgl. meine Diss. „Beitrag zum Studium der Differentialgleichungen erster Ordnung etc." S. 41, 42; oder Zeitschrift für Math. u. Phys. XXXV, 5; S. 268, 269. —

keit durch eine Untersuchung von Herrn *Picard**). Derselbe zeigt, dass eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (B.), deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen sollen, *nothwendig* die Form haben muss:

$$y''+Ry'+S = 0, \tag{2.}$$

worin R eine Function ersten Grades, S eine Function dritten Grades in y ist, mit Coefficienten, welche von z abhängen. Den in meiner Dissertation, S. 41, Anmerkung**) aufgestellten Bedingungsgleichungen müssen daher die Coefficienten *jeder* Differentialgleichung erster Ordnung genügen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen.

Ferner hat Herr *Poincaré****) durch ziemlich schwierige Betrachtungen, welche der Theorie der birationalen Transformationen zweier *Riemann*scher Flächen in einander angehören†), gezeigt, dass das allgemeine Integral einer Differentialgleichung (A.), deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, algebraisch sein muss, wenn das Geschlecht der durch $F(z, y, y') = 0$ definirten algebraischen Function y' von y grösser als 1 ist (vorausgesetzt natürlich, dass $F(z, y, y')$ auch von z algebraisch abhängt); andererseits geht aus den Untersuchungen meiner Dissertation hervor, dass die Integrale auch in auffallend vielen Fällen algebraisch sind, wenn jenes Geschlecht gleich 1 oder 0 ist. — Endlich hat Herr *Fuchs*††) für die Untersuchung der algebraischen Integrirbarkeit der Differentialgleichungen erster Ordnung eine Methode angegeben, welche auf folgendem Theorem beruht: „Wenn das allgemeine Integral einer algebraischen irreductiblen Differentialgleichung erster Ordnung (A.) algebraisch ist, so lässt sich dasselbe in der Form darstellen:

$$\Gamma = R(z, y, \Delta),$$

wo Γ die willkürliche Constante, R eine rationale Function ihrer Argumente bedeutet und Δ durch die Gleichung $F(z, y, \Delta) = 0$ definirt wird.“ — Da nun bei dieser Methode der zweite Differentialquotient der Integrale der

---

*) „Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables.“ Journal de Mathématiques pures et appliquées (*Liouville*). 1889. 4. Serie, t. V, p. 135 u. f.; p. 277 u. f.; p. 281, No. 8; p. 293, No. 15.

**) Siehe auch Zeitschrift für Math. u. Phys. XXXV, 5; S. 268, Anm.

***) l. c.

†) Cfr. meine Diss. p. 8 oder Z. f. Math. u. Phys. XXXV, 4; S. 196.

††) Sitzungsber. der Berliner Akademie, 11. Dez. 1884, S. 1171; cfr. meine Diss. S. 8 oder Z. f. Math. u. Phys. XXXV, 5; S. 269, 270. —

Differentialgleichung (A.) eine wesentliche Rolle spielt, so kam ich auf den Gedanken, gerade mittels dieser Methode zu untersuchen, in wie weit die durch Gleichung (2.) gegebene Gestalt des zweiten Differentialquotienten über die algebraische Integrirbarkeit der Differentialgleichung (A.) allein entscheidet*). — In der vorliegenden Arbeit will ich die Untersuchung zunächst auf den Fall beschränken, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung (2.) eine lineare homogene ist: in der That ist es mir gelungen, in diesem Falle zu einem abschliessenden Resultate zu gelangen; einen sehr speciellen Fall habe ich bereits früher erledigt**). —

Es sei gegeben eine irreductible algebraische Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(A.) \qquad F(z,\ y,\ y') = 0,$$

in welcher F eine ganze rationale Function von z, y und y' bedeutet. Dieselbe möge die Eigenschaft besitzen, dass *alle* ihre Particularintegrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(B.) \qquad y''+\lambda y'+\mu y = 0$$

genügen, deren Coefficienten rationale Functionen von z sind; mit anderen Worten: die Differentialgleichung (A.) soll selber eine Integralgleichung erster Ordnung einer Differentialgleichung (B.) sein***). — Wenn also η ein Particularintegral der Differentialgleichung (A.) ist, so müssen der Voraussetzung gemäss die Gleichungnn bestehen:

$$(1.) \qquad F(z,\ \eta,\ \eta') = 0,$$

$$(2.) \qquad \eta''+\lambda\eta'+\mu\eta = 0.$$

Durch Differentiation von (1.) erhält man unter Berücksichtigung von (2.):

$$(3.) \qquad \frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial \eta}\eta'-\frac{\partial F}{\partial \eta'}(\lambda\eta'+\mu\eta) = 0.$$

---

*) Im Folgenden wird also über die Differentialgleichung (A.) sonst ***nichts*** vorausgesetzt; auch nicht, dass ihre Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen.

**) Z. f. Math. u. Phys. 1890, XXXV, 6; S. 341.

***) Aus dieser Voraussetzung folgt bereits, dass die Integrale der Differentialgleichung (A.) feste Verzweigungspunkte besitzen, da die Integrale der Differentialgleichung (B.) diese Eigenschaft haben.

Eliminirt man daher y' aus

(A.) $$F(z,\ y,\ y') = 0$$

und

$$D(F) = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y}y' - \frac{\partial F}{\partial y'}(\lambda y' + \mu y) = 0$$

durch das Euklidische Kettenbruchverfahren, indem man $D(F)$ durch F dividirt, dann F durch den Rest u. s. f., so gelangt man schliesslich zu einer ganzen rationalen Restfunction $\varphi(z, y)$, welche nur von z und y abhängt und für $y = \eta$ ebenfalls verschwinden muss. Nun war aber der Voraussetzung gemäss η ein *beliebiges* Particularintegral der Differentialgleichung (A.); ferner kann man nach einem bekannten Satze von *Cauchy* η stets so wählen, dass einem *vorgeschriebenen* Werthe $z = z_0$ ein *vorgeschriebener* Werth $\eta = \eta_0$ entspricht. Es verschwindet daher die ganze rationale Function $\varphi(z, y)$ für *willkürliche* Werthepaare z, y; d. h. sie muss *identisch* verschwinden. Daher muss $D(F)$ mit F einen gemeinsamen Factor besitzen, oder, da F als irreductibel vorausgesetzt war, muss $D(F)$ durch F theilbar sein*):

(4.) $$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y}y' - \frac{\partial F}{\partial y'}(\lambda y' + \mu y) = \varkappa . F.$$

Es sei nun:

$$F(z,\ y,\ y') = A_0 y'^m + A_1 y'^{m-1} + \cdots + A_{m-1}y' + A_m,$$

worin die A_i ganze rationale Functionen von z und y bedeuten; so folgt aus (4.) zunächst, dass y' in $\varkappa$ höchstens im ersten Grade vorkommen kann, also:

$$\varkappa = \varrho + \sigma y',$$

wo ϱ und σ ganze rationale Functionen von y mit rationalen von z abhängenden Coefficienten sind. — Ferner folgt aus (4.) durch Vergleichung der Coefficienten von y'^{m+1}:

$$\frac{\partial A_0}{\partial y} = \sigma . A_0;$$

---

*) Setzt man nur voraus, dass *ein* Particularintegral η der Differentialgleichung (A.) der Differentialgleichung (B.) genügt, so stehen *zwei* Möglichkeiten offen: entweder $\varphi(z, y)$ verschwindet *nicht* identisch; dann ergiebt sich η aus $\varphi(z, \eta) = 0$ als algebraische Function von z, doch können in diesem Falle ausserdem auch noch transcendente Integrale der Differentialgleichung (A.) vorhanden sein; oder aber $\varphi(z, y)$ verschwindet *identisch*, und dann lassen sich dieselben Folgerungen ziehen wie in der vorliegenden Abhandlung.

das ist aber nur möglich, wenn $\sigma = 0$ ist; d. h. *$\varkappa$ muss von y' und gleichzeitig A_0 von y unabhängig sein.* Endlich ergiebt sich aus (4.) das Gleichungssystem:

$$(5.) \qquad \frac{\partial A_k}{\partial z} + \frac{\partial A_{k+1}}{\partial y} - (m-k)\lambda A_k - (m-k+1)\mu y A_{k-1} = \varkappa . A_k. \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

Angenommen, $\varkappa$ sei vom $r$ten Grade in y und $r > 0$, so ergiebt sich, da A_0 vom nullten Grade in y ist, aus (5.) successive, dass

A_1 vom $(r+1)$-ten,
A_2 vom $(2r+2)$-ten,
. . . . . .
A_k vom $(kr+k)$-ten,
. . . . . .
A_m vom $(mr+m)$-ten

Grade in y ist. Ferner folgt aber aus (5.) für $k = m$:

$$\frac{\partial A_m}{\partial z} - \mu y A_{m-1} = \varkappa . A_m;$$

es würde also, wenn man die höchsten Grade vergleicht,

$$mr + m = (m+1)r + m$$

sein müssen; das ist aber nur möglich, wenn $r = 0$ ist; d. h. *$\varkappa$ ist von y unabhängig* und A_k höchstens vom $k$ten Grade in y.

Es gelingt nun, in der identischen Gleichung (4.) durch Multiplication der Function $F(z, y, y')$ mit einem geeigneten nur von z abhängigen Factor $\varkappa$ zum Verschwinden zu bringen: multiplicirt man nämlich beide Seiten derselben mit einem nur von z abhängenden Factor ν, so erhält man unter Berücksichtigung der Relation

$$\nu \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \nu F}{\partial z} - \nu' F,$$

$$(6.) \qquad \frac{\partial \nu F}{\partial z} + \frac{\partial \nu F}{\partial y} y' - \frac{\partial \nu F}{\partial y'} (\lambda y' + \mu y) = \left(\varkappa + \frac{\nu'}{\nu}\right) \nu F.$$

Man hat also zu dem angegebenen Zwecke nur ν aus der Gleichung

$$\frac{\nu'}{\nu} + \varkappa = 0$$

zu bestimmen. — Enthält $F(z, y, y')$ ein von y und y' freies Glied q, so folgt aus (4.):

$$q' = \varkappa . q \quad \text{oder} \quad \varkappa = \frac{q'}{q};$$

in diesem Falle ist daher einfach $\nu = \frac{1}{q}$ zu wählen, d. h. man muss die Differentialgleichung (A.) durch q dividiren; ist ein solches Glied *nicht* vorhanden, so ergiebt sich ν nur dann als rationale Function von z, wenn $\varkappa$ selber die logarithmische Ableitung einer solchen ist (was, wie wir später sehen werden, nicht immer der Fall zu sein braucht). Wir setzen nun im Folgenden voraus, dass $F(z, y, y')$ ein von y und y' freies Glied enthalte, und denken uns die Differentialgleichung (A.) bereits durch dasselbe dividirt, so dass die Identität (4.) nach Obigem die Gestalt annimmt:

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} y' - \frac{\partial F}{\partial y'} (\lambda y' + \mu y) = 0. \tag{7.}$$

Ferner denken wir uns F nach Dimensionen in Bezug auf y' und y geordnet:

$$F = D_m + D_{m-1} + \cdots + D_k + \cdots + D_0,$$

derart, dass D_m die Glieder $m$ter, D_{m-1} die Glieder $(m-1)$-ter, ..., D_k die Glieder $k$ter, ..., D_1 die Glieder erster Dimension in y' und y enthält, mit rationalen Functionen von z als Coefficienten, während D_0 nach Obigem eine Constante $(= 1)$ ist; dabei ist zu bemerken, dass nicht alle D_k in F vorhanden zu sein brauchen. — In der Identität (7.) können Glieder verschiedener Dimension sich nicht gegenseitig aufheben; folglich müssen, da

$$\frac{\partial D_k}{\partial z} + \frac{\partial D_k}{\partial y} y' - \frac{\partial D_k}{\partial y'} (\lambda y' + \mu y)$$

wieder von der $k$ten Dimension in y' und y ist, die D_k *einzeln* der Relation (7.) genügen.

Wenn nun das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A.) algebraisch ist, so kann dasselbe*) in der Form angesetzt werden:

$$I' = R(z, y, \Delta), \tag{8.}$$

worin Δ durch $F(z, y, \Delta) = 0$ definirt ist und demgemäss R vom $(m-1)$-ten Grade in Bezug auf Δ vorausgesetzt werden kann. Durch Differentiation von (8.) ergiebt sich, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{d\Delta}{dz} + \lambda\Delta + \mu y = 0$$

ist:

$$0 = \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial y} \Delta - \frac{\partial R}{\partial \Delta} (\lambda\Delta + \mu y). \tag{9.}$$

*) Siehe Einleitung S. 2.

Da aber Δ bereits der irreductiblen Gleichung

$$F(z,\ y,\ \Delta) = 0$$

genügt, so muss die rechte Seite der Gleichung (9.) durch F theilbar sein und, wenn dieselbe von niedrigerem als dem $m$ten Grade in Δ ist — was eintritt, wenn in R der Coefficient von Δ^{m-1} von y unabhängig (also auch eventuell gleich Null) ist — sogar *identisch* verschwinden. Giebt es umgekehrt eine rationale Function R höchstens $(m-1)$-ten Grades in Δ, welche dieser Bedingung genügt, so *ist* das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A.) *algebraisch.* — Es sei nun D_k die erste nicht verschwindende Function in der Reihe der Functionen $D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_{m-1}$, so genügt D_k n. O. den an R gestellten Forderungen, sodass in der That die Differentialgleichung (A.) algebraisch integrirbar ist; ihr allgemeines Integral lautet:

$$(10.) \qquad \Gamma = D_k(z,\ y,\ \Delta);\quad F(z,\ y,\ \Delta) = 0.$$

Dieser Schluss versagt nur, wenn *alle* Functionen $D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_{m-1}$ identisch gleich Null sind, d. h. wenn F ausser dem von y und y' freien Gliede nur Glieder *einer einzigen* Dimension enthält. In der That kann in diesem Falle die Differentialgleichung (A.) transcendente Integrale besitzen, wie folgendes Beispiel lehrt: in der Differentialgleichung

$$F(z,\ y,\ y') = zy'^3+(3z-1)yy'^2-4y^2y'-4(z+1)y^3+(3z+1)^3 = 0,$$

welche ausser dem von y und y' freien Glieder nur Glieder dritter Dimension enthält, genügt F der Relation:

$$\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}y'-\frac{\partial F}{\partial y'}\left(\frac{3z-2}{3z+1}y'-2\frac{3z+4}{3z+1}y\right) = \frac{9}{3z+1}\cdot F,$$

oder $\mathfrak{F} = \frac{1}{(3z+1)^3}\cdot F$ der Relation:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}y'-\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y'}\left(\frac{3z-2}{3z+1}y'-2\frac{3z+4}{3z+1}y\right) = 0,$$

sodass $F = 0$ ein Particularintegral erster Ordnung der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y''+\frac{3z-2}{3z+1}y'-2\frac{3z+4}{3z+1}y = 0$$

darstellt; und doch ist ihr allgemeines Integral transcendent; es lautet nämlich:

$$y = \frac{1}{c^2}e^{-2z}+cze^z,$$

wenn c die willkürliche Constante bedeutet.

Dass aber in dem vorliegenden Falle die Integrale der Differentialgleichung (A.) auch algebraisch sein können, möge folgendes Beispiel zeigen: in der Differentialgleichung *)

$$F = z^3 y'^3 - \tfrac{1}{2} z^2 y y'^2 + \tfrac{1}{54} y^3 - 1 = 0$$

genügt F der Relation:

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} y' - \frac{\partial F}{\partial y'} \left(\frac{5}{6z} y' - \frac{1}{18 z^2} y \right) = 0;$$

ihr allgemeines Integral lautet:

$$y = \frac{8}{c^2} z^{\frac{1}{3}} + c z^{-\frac{1}{6}},$$

oder in der *Fuchs*schen Form:

$$\Gamma = \frac{1}{z} - \frac{1}{72 z} y^3 + \frac{1}{12} y^2 \Delta + z y \Delta^2,$$

wobei Δ durch

$$z^3 \Delta^3 - \tfrac{1}{2} z^2 y \Delta^2 + \tfrac{1}{54} y^3 - 1 = 0$$

als algebraische Function von y und z definirt ist. —

Es erhebt sich hier also die Frage, unter welchen Bedingungen eine der Relation (7.) genügende Differentialgleichung (A.) auch dann noch, wenn F ausser dem von y' und y freien Gliede nur Glieder *einer* Dimension enthält, algebraische Integrale besitzt; die Beantwortung dieser Frage behalte ich mir für eine spätere Gelegenheit vor.

Was ferner den Fall angeht, dass F *kein* von y' und y freies Glied enthält **), so ist zunächst klar, dass F wegen der Irreductibilität der Differentialgleichung (A.) mindestens Glieder zweier verschiedenen Dimensionen enthalten muss, da es sich sonst in Linearfactoren von der Form $y' - \varrho y$, wo ϱ nur von z abhängt, zerlegen liesse. Wenn daher in der Relation (4.) z die logarithmische Ableitung einer rationalen Function von z ist und demgemäss die Relation (4.) n. O. durch Multiplication von F mit einer *rationalen* Function von z auf eine Relation von der Form (7.) reducirt werden kann, so ergiebt sich aus den vorhergehenden Entwickelungen, dass auch in diesem Falle die Differentialgleichung (A.) *algebraische* Integrale besitzt. — Ist dagegen z *nicht* die logarithmische Ableitung einer rationalen Function, so werden in den Coefficienten und Integralen der Differentialgleichung (A.) i. a. *transcendente* Functionen von der Gestalt $e^{\int z dz}$ auftreten. So

) Vgl. meine Diss., S. 26, oder Z. f. Math. u. Phys. XXXV, 4; S. 214, Gl. (J.).
**) Vgl. S. 6.

lautet z. B. für die Differentialgleichung

$$F = y'^2+(z(z-1)-4y)y'-(z^2-1)y+4y^2 = 0,$$

in welcher F der Relation

$$\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}\left(\frac{3z-2}{z-1}y'-\frac{2z}{z-1}y\right) = \frac{2z}{z-1}\cdot F$$

genügt, das allgemeine Integral:

$$y = czc^z-c^2e^{2z}; \quad \left(e^{\int \varkappa dz} = e^{\int \frac{2z}{z-1}dz} = (z-1)^2e^{2z}\right).$$

Wenn die Differentialgleichung (A.) nicht linear homogen ist, so können sich nicht sämmtliche Integrale derselben um eine blosse Constante unterscheiden; aus der algebraischen Integrirbarkeit der Differentialgleichung (A.) folgt dann also auch die der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung (B.), deren Particularintegral erster Ordnung sie ist. — Wir können daher schliesslich die gewonnenen Resultate in den folgenden Satz zusammenfassen:

„Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung (B.), *deren Coefficienten rationale Functionen von z sind, ein algebraisches Particularintegral erster Ordnung* (A.) *besitzt, welches ausser dem von y' und y freien Gliede mindestens Glieder zweier verschiedenen Dimensionen enthält, so sind ihre sämmtlichen Integrale algebraisch.“*

Berlin, Februar 1895.

Ueber die Ordnung der Enveloppe solcher ebenen Curvenreihen, deren Individuen sich in Gruppen von je w ordnen lassen, welche den Punkten einer Geraden projectiv sind.

(Von Herrn *O. Zimmermann* in Danzig.)

In seiner *„Introduzione ad una teoria delle curve piane“* (Uebersetzung von *Curtze,* S. 150, No. 104 f.) giebt Herr *Cremona* für die Ordnung der oben bezeichneten Enveloppen, wenn $w = 1$ ist, eine Formel, welche, wie der berühmte Verfasser bemerkt, in vielen Fällen gültig ist (a. a. O., S. 151). Indessen drückt die Formel, wie hier gezeigt werden soll, nur das Maximum aus, welches die betreffende Ordnung erreichen kann.

Ist nämlich $w = 1$, ferner n die Ordnung der Curven der Reihe, und μ die Anzahl derjenigen ihrer Individuen, welche durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen, so wäre nach der angeführten Stelle die Ordnung der Enveloppe $2n(\mu-1)$. Dass diese Formel unvollkommen ist, ergiebt ihr Anblick, denn es fehlt in ihr der zweite *Index* ν, welcher anzeigt, wie viele Curven der Reihe eine beliebige Gerade berühren.

Historisch erklärt sich dieser kleine Fehler dadurch, dass in der Entstehungszeit der *Introduzione* der Keim zu der Theorie der *Indices* oder *Charakteristiken* erst eben von *de Jonquières* gelegt worden war, und man den zweiten Index noch nicht beachtete, bis *Chasles* sich der Sache bemächtigte.

Im Folgenden soll nun die etwas allgemeinere Formel ohne Benutzung der eigentlichen Theorie der *Charakteristiken* nur durch Anschauung entwickelt werden.

Es sei also in der Ebene eine Curvenreihe $n$ter Ordnung gegeben, von welcher je μ Individuen durch einen beliebigen Punkt gehen, während jedem Punkte einer beliebigen Geraden a eine Gruppe von w Individuen

der Curvenreihe entspricht. Umgekehrt soll einer jeden solchen Gruppe von w Curven *nur ein einziger* Punkt der Geraden a entsprechen.

Wir bestimmen die Ordnung der Enveloppe der Reihe, indem wir die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden b der Ebene ermitteln. Der Schnittpunkt der beiden Geraden a und b heisse O. Durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{b}_1^1$ der Geraden b gehen μ Curven der Reihe, welchen auf der Geraden a die μ Punkte

$$\mathfrak{a}_1^1,\quad \mathfrak{a}_1^2,\quad \mathfrak{a}_1^3,\quad \ldots,\quad \mathfrak{a}_1^{\mu}$$

entsprechen mögen. Wir ziehen die Geraden

$$\mathfrak{a}_1^1\mathfrak{b}_1^1;\quad \mathfrak{a}_1^2\mathfrak{b}_1^1;\quad \mathfrak{a}_1^3\mathfrak{b}_1^1;\quad \ldots;\quad \mathfrak{a}_1^{\mu}\mathfrak{b}_1^1.$$

Dieselben umhüllen, während der Punkt $\mathfrak{b}_1^1$ die Gerade b durchläuft, eine Curve, welche wir durch $\mathfrak{C}$ bezeichnen wollen. Dieselbe hat die Gerade b zur $n.w$-fachen Tangente. Ihre Berührungspunkte sind nämlich die $n.w$ Schnittpunkte von b mit derjenigen Curvengruppe der Reihe, welcher der Punkt O entspricht.

Ferner ist die Gerade a eine μ-fache Tangente der Curve $\mathfrak{C}$ und ihre Berührungspunkte entsprechen den durch O gehenden μ Curven der Reihe. Mithin ist die Curve $\mathfrak{C}$ von der Klasse $n.w+\mu$.

Denn von jedem Punkte der μ-fachen Tangente a gehen noch $n.w$ und von jedem Punkte der $n.w$-fachen Tangente b gehen noch μ Tangenten an die Curve.

Angenommen nun, die Curve $\mathfrak{C}$ hätte ausser a und b keine vielfachen Tangenten mehr, so wäre sie von der Ordnung

$$(nw+\mu)(nw+\mu-1)-nw(nw-1)-\mu(\mu-1) = 2n\mu w$$

und schnitte die Gerade b ausser in ihren nw Berührungspunkten noch in

$$2n\mu w-2nw = 2nw(\mu-1)$$

Punkten $\mathfrak{p}$. Dies wären dann auch zugleich die Schnittpunkte der Geraden b mit der Enveloppe der Reihe, welche durch E bezeichnet werden möge.

Der Beweis für diese letzte Behauptung liegt darin, dass für einen Punkt $\mathfrak{p}$ der Geraden b zwei der Curven der Reihe, welche ihn passiren, zusammenfallen. Denn von den μ Tangenten, welche von $\mathfrak{p}$ an $\mathfrak{C}$ gehen und a in denjenigen Punkten $\mathfrak{a}$ treffen, denen die durch $\mathfrak{p}$ gehenden Curven der Reihe entsprechen — von diesen Tangenten fallen zwei unendlich benachbarte zusammen. Das bedeutet, dass auf a zwei von den erwähnten Punkten $\mathfrak{a}$ zusammenfallen,

und dies wiederum besagt, dass von den Curven der Reihe, die durch $\mathfrak{p}$ gehen, zwei zusammenfallen. Mithin wäre die Enveloppe E von der Ordnung

$$2nw(\mu-1).$$

Aus dieser Formel ergiebt sich für $w=1$ die in der *Introduzione* angegebene Zahl

$$2n(\mu-1).$$

Dieselbe gilt aber nur unter der Voraussetzung, dass die Curve $\mathfrak{C}$ ausser a und b keine vielfachen Tangenten besitzt. Denn, wäre dies der Fall, so würde sich die Ordnung der Curve $\mathfrak{C}$ und damit zugleich die Ordnung der Enveloppe E vermindern. Demnach stellt die in der *Introduzione* angegebene Zahl nur das Maximum der Ordnung dar, welches die Enveloppe E für den Fall $w=1$ nicht überschreiten kann.

Um die Ordnung von E genau zu ermitteln, müsste man also die ausser a und b etwa noch vorhandenen mehrfachen Tangenten der Curve $\mathfrak{C}$ kennen. Diese Kenntniss zu erwerben, dürfte jedoch mindestens lästig sein, ausserdem aber würde dieselbe nur ein abgeleitetes, nicht aus der Natur der betrachteten Curvenreihe direct in die Augen springendes Merkmal liefern.

Statt dessen genügt es aber, den Index ν zu kennen, welcher anzeigt, wie viele Curven der Reihe eine beliebige Gerade der Ebene berühren. Denn alsdann erfährt man sofort die Ordnung der Curve $\mathfrak{C}$, weil man ermitteln kann, in wie vielen Punkten die Gerade a von der Curve $\mathfrak{C}$ ausser in ihren Berührungspunkten geschnitten wird. Daraus ergiebt sich dann aber wieder die Ordnung der Enveloppe E.

Bezeichnet nämlich $\mathfrak{B}$ einen Punkt, in welchem die Gerade b von einer Curve der Reihe berührt wird, und bedeutet $\mathfrak{A}$ denjenigen Punkt der Geraden a, welchem die betreffende Gruppe jener Curve entspricht, so ist $\mathfrak{A}$ ein Punkt der Curve $\mathfrak{C}$. Denn von $\mathfrak{A}$ gehen an diese Curve zwei Tangenten, welche in die Gerade $\mathfrak{AB}$ zusammenfallen. So viele Berührungspunkte $\mathfrak{B}$ es also auf b giebt, so viele Schnittpunkte hat die Curve $\mathfrak{C}$ ausser ihren Berührungspunkten mit der Geraden a gemein. Daher ist die Ordnung der Curve $\mathfrak{C}$ gleich $2\mu+\nu$. Daraus ergiebt sich die Ordnung der Enveloppe E gleich

(1.) $$2(\mu-nw)+\nu.$$

Das Maximum dieser Zahl ist gleich

(2.) $$2nw(\mu-1).$$

Damit dasselbe erreicht werde, muss sein

$$\nu = 2\mu(nw-1). \tag{3.}$$

Beispiel:

Es sei eine Curve $m$ter Ordnung C^m vom Geschlecht 0 gegeben, und man soll die Ordnung einer ihrer Parallelcurven bestimmen. Wir betrachten die Parallelcurve als Enveloppe der Kreise von constantem Radius r, welche ihren Mittelpunkt auf C^m haben. Alsdann ist:

$$\left\{\begin{array}{c} n = 2, \\ \mu = \nu = 2m, \\ w = 1, \end{array}\right. \tag{4.}$$

und die Ordnung der Enveloppe ist nach (1.) im allgemeinen gleich

$$6m-4,$$

während die Formel der *Introduzione* das unrichtige Resultat

$$8m-4$$

liefert, denn die Gleichung (3.) ist nicht erfüllt für die Werthe (4.).

Danzig, Februar 1895.

Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable.

(Par M. *F. Gomes Teixeira* à Porto, Portugal.)

L'étude du développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable mène à l'étude préliminaire des courbes définies par l'équation $|\sin z| = c$, c représentant une constante réelle positive et z une variable complexe $x_1 + iy_1$. Ces courbes sont étudiées dans les premiers n^{os}. du présent mémoire. Nous y verrons que, si est $c \leqq 1$, cette équation représente une infinité d'ovales et que, si est $c > 1$, elle représente une courbe composée de deux branches placées symétriquement par rapport à l'axe des abscisses et qui s'étendent jusqu'à l'infini dans le sens des abscisses positives et dans le sens des abscisses négatives, en faisant une série d'ondulations d'amplitude égale.

Quand est $c \leqq 1$, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire limitée par un des ovales représentés par l'équation $|\sin z| = c$, cette fonction peut être développée en série de la forme

$$A_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin^2 x + A_3 \sin^3 x + \cdots,$$

laquelle a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'intérieur de l'ovale considéré. On pourrait faire la détermination des coefficients A_0, A_1, A_2, ... au moyen de la série de *Burmann;* mais nous donnons ici une manière plus simple de les obtenir [formule (13.)] et nous en faisons application à la fonction x^k, ce qui nous mène aux formules (14.) et (15.).

Quand est $c > 1$, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire infinie comprise entre les deux branches de la courbe $|\sin z| = c$ et si elle admet la période 2π, la fonction est, comme on va le voir, susceptible du développement suivant:

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin^2 x + \cdots + \cos x [B_1 + B_2 \sin x + B_3 \sin^2 x + \cdots],$$

et nous donnerons des formules pour le calcul des coefficients A_0, A_1, ..., B_1, B_2, ... On considère ensuite le cas où la fonction $f(x)$ admet la période 2ω, réelle ou imaginaire, et on fait application des résultats trouvés à la fonction elliptique $\mathrm{sn}x$.

I.

Sur les développements de $f(x)$ suivant les puissances de $\sin x$ qui ont lieu dans une aire limitée.

1. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une aire A, x l'affixe d'un point quelconque de l'intérieur de cette aire et supposons que l'équation $\sin z = 0$ n'a qu'une seule racine dans l'aire considérée et que x est assez peu différent de cette racine pour qu'il soit, le long du contour A,

$$|\sin x| < |\sin z|. \tag{1.}$$

Dans ce cas l'équation

$$\sin z - \sin x = 0 \tag{2.}$$

a aussi une seule racine dans l'aire A.

Cela posé, je considère l'intégrale

$$\int_s \frac{f(z)\cos z\,dz}{\sin z - \sin x},$$

où s représente le contour de l'aire A. Comme l'équation (2.) a une seule racine à l'intérieur de s, nous avons

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{f(z)\cos z\,dz}{\sin z - \sin x},$$

et, en développant l'intégrale, qui entre dans cette formule, suivant les puissances de $\sin x$,

$$f(x) = A_0 + A_1\sin x + \cdots + A_n \sin^n x + \cdots, \tag{3.}$$

où est

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{f(z)\cos z\,dz}{\sin^{n+1} z}, \tag{4.}$$

ou encore

$$A_n = \frac{1}{2ni\pi}\int_s \frac{f'(z)dz}{\sin^n z}. \tag{5.}$$

2. La question précédente nous conduit à chercher une aire telle que, pour tout point x à l'intérieur et pour tout point z du contour, on ait

$$|\sin x| < |\sin z|.$$

Pour résoudre cette question on doit étudier les courbes définies par l'équation

$$|\sin z| = c,$$

ou, en posant $z = x_1 + iy_1$,

$$(6.) \qquad +\sqrt{\sin^2 x_1 \cos^2 iy_1 - \cos^2 x_1 \sin^2 iy_1} = c,$$

c représentant une constante réelle quelconque.

On voit immédiatement que y_1 est une fonction périodique de x_1 dont la période est égale à π; il suffit donc d'étudier la partie de chaque courbe qui correspond aux valeurs de x_1 comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On voit aussi que la courbe est symétrique par rapport aux axes des coordonnées; il suffit donc d'étudier la partie correspondant aux valeurs positives de x_1 et y_1.

Cela posé, nous allons considérer séparément le cas où est $c \lessgtr 1$ et le cas où est $c > 1$.

1er. cas. Supposons premièrement qu' est

$$c \lessgtr 1.$$

En posant premièrement $x_1 = 0$ et ensuite $y_1 = 0$, on voit que la partie considérée de la courbe coupe l'axe des y_1 au point dont l'ordonnée est égale à $\log(c+\sqrt{c^2+1})$ et l'axe des x_1 au point dont l'abscisse est égale à $\arcsin c$.

En posant dans l'équation (6.) $1-\cos^2 iy_1$ au lieu de $\sin^2 iy_1$ et en la résolvant ensuite, il vient

$$\cos^2 iy_1 = c^2 + \cos^2 x_1,$$

et par conséquent

$$\frac{e^{-y_1}+e^{y_1}}{2} = \pm\sqrt{c^2+\cos^2 x_1}.$$

Cette équation donne la suivante

$$y_1 = \log[\pm\sqrt{c^2+\cos^2 x_1} \pm \sqrt{c^2-\sin^2 x_1}].$$

Cette égalité fait voir, en premier lieu, que y_1 est imaginaire quand $x_1 > \arcsin c$. Pour chaque valeur de x_1, inférieure à $\arcsin c$, elle donne pour y_1 deux valeurs réelles et deux valeurs imaginaires. Des deux valeurs réelles on ne doit choisir que celle qui, pour $x_1 = 0$, donne pour y_1 la valeur $\log(c+\sqrt{c^2+1})$, c'est-à-dire la valeur

$$(7.) \qquad y_1 = \log[\sqrt{c^2+\cos^2 x_1} + \sqrt{c^2-\sin^2 x_1}].$$

On obtient au moyen de cette équation tous les points de la courbe considérée correspondants aux valeurs de x_1 comprises entre 0 et $\arcsin c$, et l'on voit que y_1 croît depuis 0 jusqu'à $\log(c+\sqrt{c^2+1})$, quand x_1 décroît depuis $\arcsin c$ jusqu'à 0.

L'équation

$$y_1' = \frac{\sin 2x_1}{i \sin 2iy_1}$$

donne les tangentes à la courbe et fait voir que les tangentes dans les extrémités des axes sont perpendiculaires à l'axe correspondant.

Les points d'inflexion de la courbe sont donnés par l'élimination de y_1 entre l'équation

$$\sin^2 2x_1 \cos 2iy_1 = \cos 2x_1 \sin^2 2iy_1$$

et l'équation

$$\cos 2iy_1 = 2c^2 + \cos 2x_1$$

qui résulte de (6.). On trouve de cette manière l'équation

$$\cos 2x_1 = -c^2 \pm \sqrt{c^4-1}$$

laquelle fait voir que la courbe n'a pas de points d'inflexion quand $c \gtreqless 1$. De cette discussion on conclue que la courbe représentée par l'équation $|\sin z| = c$ est, quand $c \gtreqless 1$, composée d'un nombre infini *d'ovales* égaux, dont les centres sont les points $(0, 0)$, $(0, \pm\pi)$, $(0, \pm 2\pi)$, ... et dont les axes sont égaux à $2\arcsin c$ et $2\log(c+\sqrt{c^2+1})$, le premier axe coïncidant avec l'axe des abscisses et le second étant parallèle à l'axe des ordonnées.

2me. cas. Considérons maintenant le cas où est $c > 1$. Au moyen d'une discussion semblable, on voit qu'alors la courbe $|\sin z| = c$ a seulement deux branches, symétriques par rapport à l'axe des abscisses, et qui s'étendent jusqu'à l'infini dans le sens des abscisses positives et dans celui des abscisses négatives, en faisant une série d'ondulations d'amplitude égale à π. L'ordonnée prend une valeur maximum égale à $\log(c+\sqrt{c^2+1})$ dans les points $x_1 = 0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ..., et une valeur minimum égale à $\log(c+\sqrt{c^2-1})$ dans les points $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3}{2}\pi$, ...

Les courbes que nous venons d'étudier résolvent la question que nous nous proposions de résoudre. Si est $c \gtreqless 1$, on a

$$|\sin x| < |\sin z|$$

pour tout point x de l'intérieur de chaque *ovale* représenté par l'équation $|\sin z| = c$ et pour tout point r du contour. Si est $c > 1$, la même inégalité a lieu pour tous les points x de la *bande infinie* comprise entre les deux branches de la courbe $|\sin z| = c$ et pour tous les points z de cette courbe.

3. De ce qu'on vient de démontrer dans les n^{os}. précédents on conclue que, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire A, limitée par un des *ovales* représentés par l'équation $|\sin z| = c$ (où $c \gtrless 1$), qu'on vient d'étudier, on a, pour tous les points x de l'intérieur de l'ovale considéré

$$(3.) \qquad f(x) = A_0 + A_1 \sin x + \cdots + A_n \sin^n x + \cdots,$$

A_0, A_1, A_2, ... étant donnés par les intégrales (4.) ou (5.), qu'on peut déterminer, comme on sait, au moyen de la théorie des résidus. Mais nous allons donner, pour la détermination de ces coefficients, une méthode plus simple.

Considérons premièrement l'ovale dont le centre est l'origine des coordonnées. Il est facile de voir que l'égalité (3.) et les égalités qu'on obtient en la dérivant par rapport à x donnent, en y posant $x = 0$,

$$\begin{aligned}
f(0) &= A_0, \\
f'(0) &= A_1, \\
f''(0) &= 2A_2, \\
f'''(0) &= -A_1 + 6A_3, \\
f^{IV}(0) &= -8A_2 + 24A_4, \\
f^{V}(0) &= A_1 - 60A_3 + 120A_5, \\
f^{VI}(0) &= 32A_2 - 480A_4 + 720A_6, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(0), \\
A_1 &= f'(0), \\
A_2 &= \tfrac{1}{2} f''(0), \\
A_3 &= \tfrac{1}{6}[f'''(0) + f'(0)], \\
A_4 &= \tfrac{1}{24}[f^{IV}(0) + 4f''(0)], \\
A_5 &= \tfrac{1}{120}[f^{V}(0) + 10f'''(0) + 9f'(0)], \\
A_6 &= \tfrac{1}{720}[f^{VI}(0) + 20f^{IV}(0) + 64f''(0)], \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

En général, nous pouvons écrire

$$(A.)\quad \begin{cases} A_{2n} = K[f^{(2n)}(0)+Af^{(2n-2)}(0)+\cdots+Lf^{(2)}(0)], \\ A_{2n+1} = K'[f^{(2n+1)}(0)+A'f^{(2n-1)}(0)+\cdots+L'f'(0)], \end{cases}$$

où K, K', A, A', ..., L, L' représentent des quantités constantes que nous allons déterminer.

Considérons dans ce but la fonction $\sin kx$, où k est un nombre entier impair, dont le développement suivant est donné dans les éléments de trigonométrie:

$$\sin kx = k\sin x - k\frac{k^2-1^2}{1.2.3}\sin^3 x+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n k\frac{(k^2-1^2)(k^2-3^2)\ldots(k^2-(2n-1)^2)}{1.2\ldots(2n+1)}\sin^{2n+1}x+\cdots$$

En appliquant la seconde des formules (A.) à cette fonction, on trouve

$$A_{2n+1} = (-1)^n K'[k^{2n+1}-A'k^{2n-1}+\cdots\pm L'k].$$

En comparant ce résultat au suivant

$$A_{2n+1} = (-1)^n k\frac{(k^2-1^2)(k^2-3^2)\ldots(k^2-(2n-1)^2)}{1.2\ldots(2n+1)}$$

et en représentant par $s^{(m)}_{2n+1}$ la somme des combinaisons des nombres

$$1^2,\quad 3^2,\quad 5^2,\quad \ldots,\quad (2n-1)^2$$

pris m à m, on a donc

$$K' = \frac{1}{(2n+1)!},\quad A' = s^{(1)}_{2n+1},\quad B' = s^{(2)}_{2n+1},\quad \ldots,\quad L' = s^{(n)}_{2n+1}.$$

On peut donc écrire en général

$$(8.)\qquad A_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0)+s^{(1)}_{2n+1}f^{(2n-1)}(0)+\cdots+s^{(n)}_{2n+1}f'(0)}{1.2\ldots(2n+1)}.$$

Cette formule peut être encore écrite *symboliquement* de la manière suivante

$$(9.)\qquad A_{2n+1} = \frac{f(0)[f^2(0)+1^2][f^2(0)+3^2]\ldots[f^2(0)+(2n-1)^2]}{1.2\ldots(2n+1)},$$

où l'on doit, après les multiplications, remplacer les puissances de $f(0)$ par des dérivées d'ordre égal à l'exposant de la puissance.

Pour déterminer les coefficients K, A, B, ..., L de la première des formules (A.), nous pouvons considérer la fonction $\cos kx$, où k est un nombre entier pair. La trigonométrie donne en effet alors la formule suivante:

$$\cos kx = 1-\frac{k^2}{2}\sin^2 x+\frac{k^2(k^2-2^2)}{2.3.4}\sin^4 x-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{k^2(k^2-2^2)\ldots(k^2-(2n-2)^2)}{2.3\ldots 2n}\sin^{2n}x\pm\cdots;$$

et, en comparant la valeur du coefficient de $\sin^{2n}x$ dans cette formule avec la valeur donnée par la formule

$$A_{2n} = (-1)^n K[k^{2n} - Ak^{2(n-1)} + \cdots \pm Lk^2]$$

et en représentant par $S_{2n}^{(m)}$ la somme des combinaisons des nombres

$$2^2,\quad 4^2,\quad 6^2,\quad \ldots,\quad (2n-2)^2$$

pris m à m, on a

$$K = \frac{1}{(2n)!},\quad A = S_{2n}^{(1)},\quad B = S_{2n}^{(2)},\quad \ldots,\quad L = S_{2n}^{(n-1)}.$$

Nous pouvons donc écrire la formule générale suivante:

$$(10.)\qquad A_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(0)}{1.2.3\ldots 2n},$$

ou *symboliquement*

$$(11.)\qquad A_{2n} = \frac{f^2(0)[f^2(0)+2^2][f^2(0)+4^2]\ldots[f^2(0)+(2n-2)^2]}{1.2.3\ldots 2n}.$$

De tout ce qui précède il résulte le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire limitée par l'ovale dont l'équation est $|\sin z| = c$ (où $c \gtreqless 1$) et dont le centre est l'origine des coordonnées, on a, pour tous les points x de l'intérieur de cette aire,

$$(12.)\qquad \begin{cases} f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(0)}{1.2\ldots 2n} \sin^{2n} x \\ \qquad + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \cdots + s_{2n+1}^{(n)} f'(0)}{1.2\ldots(2n+1)} \sin^{2n+1} x, \end{cases}$$

ou symboliquement

$$(13.)\qquad \begin{cases} f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^2(0)[f^2(0)+2^2]\ldots[f^2(0)+(2n-2)^2]}{1.2\ldots 2n} \sin^{2n} x \\ \qquad + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(0)[f^2(0)+1^2][f^2(0)+3^2]\ldots[f^2(0)+(2n-1)^2]}{1.2\ldots(2n+1)} \sin^{2n+1} x, \end{cases}$$

où l'on doit remplacer, après les multiplications, les puissances de $f(0)$ par des dérivées d'ordre égal à l'exposant de la puissance.

4. Pour faire une première application de la formule précédente nous allons développer la fonction

$$f(x) = x^k,$$

où k représente un nombre entier positif.

1er. cas. Supposons premièrement que k est un nombre pair égal à $2m$. On a

$$f^{(2n)}(0)+S_{2n}^{(1)}f^{(2n-2)}(0)+\cdots+S_{2n}^{(n-1)}f^{(2)}(0) = 0$$

quand est $n<m$, et par conséquent

$$A_0=0, \quad A_2=0, \quad A_4=0, \quad \ldots, \quad A_{2m-2}=0.$$

On a ensuite

$$A_{2m}=\frac{f^{2m}(0)}{(2m)!}=1,$$

$$A_{2m+2}=\frac{S_{2m+2}^{(1)}f^{2m}(0)}{(2m+2)!}=\frac{S_{2m+2}^{(1)}}{(2m+1)(2m+2)},$$

$$A_{2m+4}=\frac{S_{2m+4}^{(2)}f^{2m}(0)}{(2m+4)!}=\frac{S_{2m+4}^{(2)}}{(2m+1)(2m+2)(2m+3)(2m+4)},$$

. . . . . .

Comme est

$$f^{2n+1}(0)+s_{2n+1}^{(1)}f^{2n-1}(0)+\cdots+s_{2n+1}^{(n)}f'(0) = 0,$$

on a aussi

$$A_1=A_3=A_5=\cdots=0.$$

Nous avons donc la formule

$$(14.)\quad \begin{cases} x^{2m} = \sin^{2m}x\Big[1+\dfrac{S_{2m+2}^{(1)}}{(2m+1)(2m+2)}\sin^2 x \\ \qquad +\dfrac{S_{2m+4}^{(2)}}{(2m+1)\ldots(2m+4)}\sin^4 x+\dfrac{S_{2m+6}^{(3)}}{(2m+1)\ldots(2m+6)}\sin^6 x+\cdots\Big]. \end{cases}$$

2ième. cas. Supposons maintenant que k est un nombre impair égal à $2m+1$. Au moyen d'une analyse semblable, on trouve alors la formule

$$(15.)\quad \begin{cases} x^{2m+1} = \sin^{2m+1}x\Big[1+\dfrac{s_{2m+3}^{(1)}}{(2m+2)(2m+3)}\sin^2 x \\ \qquad +\dfrac{s_{2m+5}^{(2)}}{(2m+2)\ldots(2m+5)}\sin^4 x+\dfrac{s_{2m+7}^{(3)}}{(2m+2)\ldots(2m+7)}\sin^6 x+\cdots\Big]. \end{cases}$$

La formule (14.), en y posant $m=1$ et en remarquant qu' est

$$S_4^{(1)}=2^2, \quad S_6^{(2)}=2^2.4^2, \quad S_8^{(3)}=2^2.4^2.6^2, \quad \ldots$$

donne la formule connue

$$x^2 = \sin^2 x+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin^4 x+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{3}\sin^6 x+\cdots.$$

De la même manière, en posant dans la formule (15.) $m=0$ et en remar-

quant qu' est

$$s_3^{(1)} = 1, \quad s_5^{(2)} = 3^2, \quad s_7^{(3)} = 3^2.5^2, \quad s_9^{(5)} = 3^2.5^2.7^2, \quad \ldots,$$

on trouve la formule connue

$$x = \sin x + \frac{1}{2.3}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4.5}\sin^5 x + \cdots$$

5. Pour faire une seconde application des formules (12.) et (13.) considérons les fonctions $\sin kx$ et $\cos kx$, où k représente un nombre quelconque réel ou imaginaire. Ces formules donnent immédiatement les formules connues

$$\sin kx = k\left[\sin x - \frac{k^2-1^2}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{(k^2-1^2)(k^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x - \cdots\right],$$

$$\cos kx = 1 - \frac{k^2}{2}\sin^2 x + \frac{k^2(k^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \cdots,$$

lesquelles ont lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'intérieur de celui des ovales répresentés par l'équation $|\sin z| = 1$ qui a pour centre l'origine des coordonnées.

On doit remarquer que nous avons déjà employé ces formules pour trouver les formules (12.) et (13.), mais en supposant k un nombre entier positif impair, dans le cas de la première formule, et un nombre entier positif pair, dans le cas de la seconde.

6. Considérons encore la fonction

$$f(x) = x\cot x.$$

On a alors, B_1, B_3, ... représentant les nombres de *Bernoulli*,

$$f(0) = 1, \quad f''(0) = -2^2 B_1, \quad \ldots, \quad f^{(2n)}(0) = -2^{2n} B_{2n-1},$$
$$f'(0) = f'''(0) = \cdots = 0.$$

Donc la formule (12.) donne

$$x\cot x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}B_{2n-1} + S_{2n}^{(1)} 2^{2(n-1)} B_{2n-3} + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} 2^2 B_1}{1.2\ldots 2n} \sin^{2n} x.$$

On peut écrire cette formule *symboliquement* de la manière suivante:

$$x\cot x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^2 B[2^2B^2+2^2][2^2B^2+4^2]\ldots[2^2B^2+(2n-2)^2]}{1.2\ldots 2n} \sin^{2n} x,$$

où l'on doit remplacer, après les multiplications, les exposants des puissances de B par des indices.

7. Nous avons considéré jusqu'ici seulement celui des *ovales* représentés par l'équation $|\sin z| = c$ dont le centre coïncide avec l'origine des

coordonnées. En appliquant la formule (12.) à la fonction $f(x+m\pi)$ et en changeant ensuite x en $x-m\pi$, on trouve la formule qui a lieu quand x représente un point de l'ovale, représenté par la même équation, dont le centre est le point $(m\pi, 0)$. On trouve ainsi, quand $f(x)$ est holomorphe dans l'aire limitée par cet ovale,

$$(16.)\quad \begin{cases} f(x) = f(m\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{f^{(2n)}(m\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(m\pi) + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(m\pi)}{1.2\ldots 2n} \sin^{2n} x \\ \quad + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \dfrac{f^{(2n+1)}(m\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(m\pi) + \cdots + s_{2n+1}^{(n)} f'(m\pi)}{1.2\ldots(2n+1)} \sin^{2n+1} x. \end{cases}$$

On peut écrire cette formule *symboliquement* de la manière suivante:

$$(17.)\quad \begin{cases} f(x) = f(m\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{f^2(m\pi)[f^2(m\pi)+2^2]\ldots[f^2(m\pi)+(2n-2)^2]}{1.2.3\ldots 2n} \sin^{2n} x \\ +(-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(m\pi)[f^2(m\pi)+1^2][f^2(m\pi)+3^2]\ldots[f^2(m\pi)+(2n-1)^2]}{1.2\ldots(2n+1)} \sin^{2n+1} x. \end{cases}$$

8. De la comparaison de la formule (16.) avec les formules (3.), (4.) et (5.) on conclue les résultats suivants, dont nous ferons encore usage:

1°. Le résidu de la fonction $\dfrac{f(z)\cos z}{\sin^{2n+1} z}$ par rapport au pôle $m\pi$ est donné par la formule

$$R_m = \frac{f^{(2n)}(m\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(m\pi) + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(m\pi)}{1.2\ldots 2n};$$

2°. Le résidu de la fonction $\dfrac{f(z)\cos z}{\sin^{2n+2} z}$ par rapport au même pôle est donné par la formule

$$R'_m = (-1)^m \frac{f^{(2n+1)}(m\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(m\pi) + \cdots + s_{2n+1}^{(n)} f'(m\pi)}{1.2\ldots(2n+1)};$$

3°. Le résidu de la fonction $\dfrac{f'(z)}{\sin^{2n} z}$ par rapport à $m\pi$ est donné par la formule

$$R''_m = \frac{f^{(2n)}(m\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(m\pi) + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(m\pi)}{1.2.3\ldots(2n-1)};$$

4°. Le résidu de la fonction $\dfrac{f'(z)}{\sin^{2n+1} z}$ par rapport à $m\pi$ est

$$R'''_m = (-1)^m \frac{f^{(2n+1)}(m\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(m\pi) + \cdots + s_{2n+1}^{(n)} f'(m\pi)}{1.2\ldots 2n}.$$

En changeant dans les formules précédentes $f'(z)$ en $f(z)$, on voit encore

que le résidu de $\frac{f(z)}{\sin^{2n}z}$ par rapport à $m\pi$ est donné par la formule

$$R_m^{(IV)} = \frac{f^{(2n-1)}(m\pi)+S_{2n}^{(1)}f^{(2n-3)}(m\pi)+\cdots+S_{2n}^{(n-1)}f'(m\pi)}{1.2.3\ldots(2n-1)}$$

et que le résidu de $\frac{f(z)}{\sin^{2n+1}z}$ par rapport au même pôle est donné par l'égalité

$$R_m^{(V)} = (-1)^m \frac{f^{(2n)}(m\pi)+s_{2n+1}^{(1)}f^{(2n-2)}(m\pi)+\cdots+s_{2n+1}^{(n)}f(m\pi)}{1.2\ldots 2n}.$$

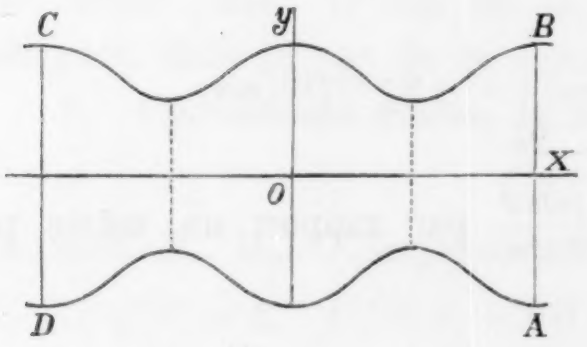
II.

Sur les développements de $f(x)$ suivant les puissances de $\sin x$ qui ont lieu dans une bande infinie.

9. Considérons maintenant l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\sin(z+x)\,dz}{\sin z-\sin x}$$

prise le long d'un contour formé par les droites AB et CD parallèles à l'axe des ordonnées, qui passent par les points dont les abscisses sont $-\pi+\eta$ et $\pi+\eta$ $\left(\text{où } \eta<\frac{\pi}{2}\right)$ et par les deux branches de la courbe représentée par l'équation $|\sin z| = c$ (où $c>1$), et soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans cette aire et périodique, la période étant égale à 2π.



La fonction

$$\frac{f(z)\sin(z+x)}{\sin z-\sin x} = \frac{f(z)\sin\frac{1}{2}(z+x)}{\sin\frac{1}{2}(z-x)}$$

a un seul pôle $z=x$ à l'intérieur du contour S et le résidu de cette fonction par rapport à ce pôle est égal à $2f(x)\sin x$; par conséquent nous avons

$$2\sin x f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\sin(z+x)dz}{\sin z-\sin x}.$$

Mais de la périodicité de la fonction $f(z)$ il résulte

$$\int_{AB}\frac{f(z)\sin(z+x)\,dx}{\sin z-\sin x} = \int_{DC}\frac{f(z)\sin(z+x)\,dx}{\sin z-\sin x}.$$

Donc nous avons, en représentant par S' et S'' les courbes BC et DA:

$$2\sin x f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{S'}\frac{f(z)\sin(z+x)\,dz}{\sin z-\sin x} + \frac{1}{2i\pi}\int_{S''}\frac{f(z)\sin(z+x)\,dz}{\sin z-\sin x}.$$

Si l'on remarque maintenant que le développement

$$\frac{1}{\sin z-\sin x} = \frac{1}{\sin z}+\frac{\sin x}{\sin^2 z}+\frac{\sin^2 x}{\sin^3 z}+\cdots$$

a lieu pour toutes les valeurs de z représentées par les points de S' et S'' et pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'intérieur de l'aire considérée (parce qu'on a pour tous ces points $|\sin x|<|\sin z|$), on peut écrire le développement

$$\sin x f(x) = \sin x[A_0+A_1\sin x+\cdots+A_n\sin^n x+\cdots] + \cos x[B_0+B_1\sin x+\cdots+B_n\sin^n x+\cdots],$$

où

$$A_n = \frac{1}{4i\pi}\Big[\int_{S'}\frac{f(z)\cos z\,dz}{\sin^{n+1}z}+\int_{S''}\frac{f(z)\cos z\,dz}{\sin^{n+1}z}\Big],$$

$$B_n = \frac{1}{4i\pi}\Big[\int_{S'}\frac{f(z)\,dz}{\sin^n z}+\int_{S''}\frac{f(z)\,dz}{\sin^n z}\Big].$$

En posant dans ce développement $x=0$, il vient $B_0=0$; nous pouvons donc encore écrire

$$f(x) = A_0+A_1\sin x+\cdots+A_n\sin^n x+\cdots+\cos x[B_1+B_2\sin x+\cdots+B_n\sin^{n-1}x+\cdots].$$

On peut encore donner aux coefficients A_n et B_n de ce développement une autre forme. En effet, on a

$$\int_{AB}\frac{f(z)\cos z\,dz}{\sin^{n+1}z} = \int_{DC}\frac{f(z)\cos z\,dz}{\sin^{n+1}z},$$

$$\int_{AB}\frac{f(z)\,dz}{\sin^n z} = \int_{DC}\frac{f(z)\,dz}{\sin^n z},$$

et par conséquent

$$(18.)\qquad \begin{cases} A_n = \dfrac{1}{4i\pi}\displaystyle\int_S\frac{f(z)\cos z\,dz}{\sin^{n+1}z}, \\ B_n = \dfrac{1}{4i\pi}\displaystyle\int_S\frac{f(z)\,dz}{\sin^n z}. \end{cases}$$

Au moyen de l'intégration par parties on voit qu'on peut encore écrire

$$(18'.) \qquad A_n = \frac{1}{4ni\pi}\int_S \frac{f'(z)\,dz}{\sin^n z}.$$

De tout ce qui précède on peut tirer le théorème suivant:

Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans la bande infinie comprise entre les deux branches de la courbe $|\sin z| = c$ (où $c > 1$) et admet la période 2π, on peut développer $f(x)$ en série de la forme suivante:

$$(19.) \quad \begin{cases} f(x) = A_0 + A_1\sin x + \cdots + A_n \sin^n x + \cdots \\ \qquad\qquad + \cos x[B_1 + B_2 \sin x + \cdots + B_n \sin^{n-1} x + \cdots], \end{cases}$$

les coefficients A_n et B_n étant donnés par les formules (18).

10. Il faut maintenant calculer les intégrales qui entrent dans les expressions de A_n et B_n, ce qu'on peut faire au moyen du théorème de *Cauchy*, qui donne, en employant les notations du n°. 8, les résultats suivants:

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \tfrac{1}{2}[R_0 + R_1], \\ A_{2n+1} &= \tfrac{1}{2}[R_0' + R_1'], \\ B_{2n} &= \tfrac{1}{2}[R_0^{(IV)} + R_1^{(IV)}], \\ B_{2n+1} &= \tfrac{1}{2}[R_0^{(V)} + R_1^{(V)}]. \end{aligned}$$

Ces formules donnent (n°. 8)

$$A_{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(0)}{1.2\ldots 2n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{f^{(2n)}(\pi) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(\pi) + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(\pi)}{1.2\ldots 2n},$$

ou, en posant $f(x) + f(x+\pi) = F_1(x)$:

$$(20.) \quad A_{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{F_1^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} F_1^{(2n-2)}(0) + \cdots + S_{2n}^{(n-1)} F_1^{(2)}(0)}{1.2\ldots 2n}.$$

On a aussi

$$A_{2n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{f^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \cdots + s_{2n+1}^{(n)} f'(0)}{1.2\ldots(2n+1)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{f^{(2n+1)}(\pi) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(\pi) + \cdots + s_{2n+1}^{(n)} f'(\pi)}{1.2\ldots(2n+1)},$$

ou, en posant $f(x) - f(x+\pi) = F(x)$:

$$(21.) \quad A_{2n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{F^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} F^{(2n-1)}(0) + \cdots + s_{2n+1}^{(n)} F'(0)}{1.2\ldots(2n+1)}.$$

De la même manière on trouve les formules

$$(22.)\qquad B_{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{F_1^{(2n-1)}(0)+S_{2n}^{(1)}F_1^{(2n-3)}(0)+\cdots+S_{2n}^{(n-1)}F_1'(0)}{1.2\ldots(2n-1)},$$

$$(23.)\qquad B_{2n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{F^{(2n)}(0)+s_{2n+1}^{(1)}F^{(2n-2)}(0)+\cdots+s_{2n+1}^{(n)}F(0)}{1.2\ldots 2n}.$$

Les formules (20.), (21.), (22.) et (23.) peuvent encore être écrites *symboliquement* de la manière suivante:

$$(24.)\qquad \begin{cases} A_{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{F_1^2(0)[F_1^2(0)+2^2][F_1^2(0)+4^2]\ldots[F_1^2(0)+(2n-2)^2]}{1.2\ldots 2n}, \\ A_{2n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{F(0)[F^2(0)+1^2][F^2(0)+3^2]\ldots[F^2(0)+(2n-1)^2]}{1.2\ldots(2n+1)}, \\ B_{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{F_1(0)[F_1^2(0)+2^2][F_1^2(0)+4^2]\ldots[F_1^2(0)+(2n-2)^2]}{1.2\ldots(2n-1)}, \\ B_{2n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{F^0(0)[F^2(0)+1^2][F^2(0)+3^2]\ldots[F^2(0)+(2n-1)^2]}{1.2\ldots 2n}. \end{cases}$$

Les formules antérieures ne déterminent pas les coefficients A_0 et B_1. On les obtient au moyen de la formule (19.) en y posant $x=0$ et $x=\pi$, ce qui donne

$$f(0) = A_0+B_1, \quad f(\pi) = A_0-B_1$$

et par conséquent

$$A_0 = \tfrac{1}{2}[f(0)+f(\pi)] = \tfrac{1}{2}F_1(0),$$
$$B_1 = \tfrac{1}{2}[f(0)-f(\pi)] = \tfrac{1}{2}F(0).$$

11. Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ admet la période réelle ou imaginaire 2ω. Alors la fonction $f\left(\frac{\omega X}{\pi}\right)$ de la variable X admet la période 2π et, si elle est holomorphe dans l'aire infinie limitée par les deux branches de la courbe $|\sin X| = c$ (où $c>1$), nous avons

$$f\left(\frac{\omega X}{\pi}\right) = A_0+A_1\sin X+A_2\sin^2 X+\cdots+\cos X[B_1+B_2\sin X+B_3\sin^2 X+\cdots].$$

Si l'on pose maintenant

$$(A.)\qquad \frac{\omega X}{\pi} = x,$$

on trouve

$$f(x) = A_0+A_1\sin\frac{\pi x}{\omega}+A_2\sin^2\frac{\pi x}{\omega}+\cdots$$
$$+\cos\frac{\pi x}{\omega}\left[B_1+B_2\sin\frac{\pi x}{\omega}+B_3\sin^2\frac{\pi x}{\omega}+\cdots\right].$$

Les coefficients A_n et B_n sont donnés par les formules (20.), (21.), (22.) et (23.) en y posant

$$F(x) = f\left(\frac{\omega x}{\pi}\right) - f\left(\frac{\omega(x+\pi)}{\pi}\right),$$

$$F_1(x) = f\left(\frac{\omega x}{\pi}\right) + f\left(\frac{\omega(x+\pi)}{\pi}\right).$$

En posant en (A.)

$$\omega = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta), \quad X = R(\cos\theta' + i\sin\theta'), \quad x = r(\cos\tau + i\sin\tau)$$

on trouve

$$\tau = \theta + \theta', \quad \frac{\varrho R}{\pi} = r.$$

On voit donc que l'aire qui, dans le plan de représentation de x, correspond à l'aire limitée par les deux branches de la courbe $|\sin X| = c$ est limitée par une courbe qu'on obtient en transformant premièrement la courbe $|\sin X| = c$ de manière qu' entre les rayons vecteurs R des points de cette courbe et les rayons vecteurs correspondants r de la transformée existe le rapport $r = \frac{\varrho}{\pi} R$, et ensuite en faisant tourner l'aire limitée par la courbe ainsi obtenue autour de l'origine des coordonnées d'un angle égal à l'argument de la période 2ω.

12. En appliquant la doctrine antérieure à la fonction $f(X+\alpha)$, on obtient le développement

$$f(X+\alpha) = A_0 + A_1 \sin\frac{\pi X}{\omega} + A_2 \sin^2\frac{\pi X}{\omega} + \cdots$$
$$\cdots + \cos\frac{\pi X}{\omega}\left[B_1 + B_2 \sin\frac{\pi X}{\omega} + B_3 \sin^2\frac{\pi X}{\omega} + \cdots\right],$$

qui, en posant

$$X + \alpha = x$$

donne

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin\frac{\pi}{\omega}(x-\alpha) + A_2 \sin^2\frac{\pi}{\omega}(x-\alpha) + \cdots$$
$$\cdots + \cos\frac{\pi}{\omega}(x-\alpha)\left[B_1 + B_2 \sin\frac{\pi}{\omega}(x-\alpha) + B_3 \sin^2\frac{\pi}{\omega}(x-\alpha) + \cdots\right].$$

Ce développement a lieu dans l'aire qu'on obtient en donnant à l'aire considérée dans le numéro antérieur un mouvement de translation qui transporte

le point qui coïncide avec l'origine des coordonnées au point dont l'affixe est α.

Les coefficients $A_0, A_1, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ de cette formule sont donnés par les formules (20.), (21.), (22.) et (23.) en y posant

$$F(x) = f\left(\frac{\omega x}{\pi}+\alpha\right)-f\left(\frac{\omega(x+\pi)}{\pi}+\alpha\right),$$

$$F_1(x) = f\left(\frac{\omega x}{\pi}+\alpha\right)+f\left(\frac{\omega(x+\pi)}{\pi}+\alpha\right).$$

En posant dans les formules antérieures $\alpha = -\frac{\omega}{2}$, on trouve

$$f(x) = A_0+A_1\cos\frac{\pi x}{\omega}+A_2\cos^2\frac{\pi x}{\omega}+\cdots$$

$$\cdots-\sin\frac{\pi x}{\omega}\left[B_1+B_2\cos\frac{\pi x}{\omega}+B_3\cos^2\frac{\pi x}{\omega}+\cdots\right].$$

Les coefficients sont donnés par les formules (20.), (21.), (22.) et (23.) en y posant

$$F(x) = f\left(\frac{\omega x}{\pi}-\frac{\omega}{2}\right)-f\left(\frac{\omega(x+\pi)}{\pi}-\frac{\omega}{2}\right),$$

$$F_1(x) = f\left(\frac{\omega x}{\pi}-\frac{\omega}{2}\right)+f\left(\frac{\omega(x+\pi)}{\pi}-\frac{\omega}{2}\right).$$

13. Pour faire une application de cette formule considérons la fonction elliptique

$$f(x) = \operatorname{sn}\frac{2kx}{\pi},$$

qui admet les périodes 2π et $\frac{\pi ik'}{k}$ et les pôles

$$\frac{\pi ik'}{2k}+n\pi+m\frac{\pi ik'}{k}$$

(n et m étant des nombres entiers) et supposons, pour simplifier, que k et k' sont des quantités réelles.

Il est facile de voir, en ayant égard à ce que les ordonnées maximums de la courbe $|\sin z| = c$ (où $c > 1$) sont égales à $\log(c+\sqrt{c^2+1})$, que la fonction considérée est holomorphe dans la bande infinie limitée par les deux branches de la courbe

$$|\sin z| = \left|\sin\frac{\pi ik'}{2k}\right|,$$

quand k et k' vérifient la condition

$$\frac{\pi k'}{2k} > \log(1+\sqrt{2}).$$

Dans ce cas on a

$$\mathrm{sn}\frac{2kx}{\pi} = A_0+A_1\sin x+A_2\sin^2 x+\cdots+\cos x[B_1+B_2\sin x+B_3\sin^2 x+\cdots].$$

Mais, en remarquant qu' est

$$\mathrm{sn}\Big(-\frac{2kx}{\pi}\Big) = -\mathrm{sn}\Big(\frac{2kx}{\pi}\Big),$$

on voit qu' est

$$A_0 = A_2 = A_4 = A_6 = \cdots = 0,$$
$$B_1 = B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0;$$

et, en remarquant qu' est

$$\mathrm{sn}\frac{2k(x+\pi)}{\pi} = -\mathrm{sn}\frac{2kx}{\pi},$$

on voit ensuite qu'on a

$$B_2 = B_4 = B_6 = \cdots = 0.$$

On a donc

$$\mathrm{sn}\frac{2kx}{\pi} = A_1\sin x+A_3\sin^3 x+A_5\sin^5 x+\cdots,$$

et par conséquent

$$\mathrm{sn}x = A_1\sin\frac{\pi x}{2k}+A_3\sin^3\frac{\pi x}{2k}+\cdots.$$

Les coefficients qui entrent dans cette formule doivent être déterminés par la formule (21.) en y posant

$$F(x) = \mathrm{sn}\frac{2kx}{\pi}-\mathrm{sn}\frac{2k(x+\pi)}{\pi} = 2\,\mathrm{sn}\frac{2kx}{\pi}.$$

Le développement qu'on vient de trouver a lieu dans l'aire infinie limitée par la courbe qu'on obtient en transformant la courbe dont l'équation est

$$|\sin z| = \Big|\sin\frac{\pi ik'}{2k}\Big|$$

comme on a dit dans le n°. 11. En particulier elle a lieu pour toutes les valeurs réelles de x.

14. Nous pouvons déterminer un développement de $\mathrm{sn}x$ qui est applicable pour toutes les valeurs de k et k' et pour toutes les valeurs réelles de x, comme on va voir.

Considérons la fonction

$$f(x) = \mathrm{sn}\frac{2k}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

qui admet les périodes 2π et $\frac{\pi ik'}{k}$ et les pôles

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi ik'}{2k}+n\pi+m\frac{\pi ik'}{k},$$

n et m étant des nombres entiers, et supposons encore que k et k' sont des nombres réels.

Comme les pôles de la fonction considérée ont les mêmes abscisses que les points de la courbe $|\sin z| = c$ où l'ordonnée est minimum, on voit qu'il existe une valeur de c, supérieure à l'unité, telle que la fonction $f(x)$ est holomorphe dans l'aire limitée par les deux branches de cette courbe. Cette valeur est donnée par l'équation

$$c = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi ik'}{2k}\right) = \cos\frac{\pi ik'}{2k}.$$

Nous avons donc, dans l'aire considérée,

$$\mathrm{sn}\frac{2k}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = A_0+A_1\sin x+A_2\sin^2 x+\cdots$$
$$\cdots+\cos x\,[B_1+B_2\sin x+B_3\sin^2 x+\cdots].$$

Cette égalité donne premièrement

$$\mathrm{sn}x = A_0+A_1\cos\frac{\pi x}{2k}+A_2\cos^2\frac{\pi x}{2k}+\cdots$$
$$\cdots-\sin\frac{\pi x}{2k}\left[B_1+B_2\cos\frac{\pi x}{2k}+B_3\cos^2\frac{\pi x}{2k}+\cdots\right],$$

et, à cause des égalités

$$\mathrm{sn}(-x) = -\mathrm{sn}x,$$
$$\mathrm{sn}(x+2k) = -\mathrm{sn}x,$$

elle donne ensuite

$$\mathrm{sn}x = -\sin\frac{\pi x}{2k}\left[B_1+B_3\cos^2\frac{\pi x}{2k}+B_5\cos^4\frac{\pi x}{2k}+\cdots\right].$$

Les coefficients B_1, B_3, B_5, ... doivent être calculés au moyen de la for-

mule (23.) en y posant

$$F(x) = \operatorname{sn}\left(\frac{2kx}{\pi} - k\right) - \operatorname{sn}\left(\frac{2k(x+\pi)}{\pi} - k\right)$$

$$= 2\operatorname{sn}\left(\frac{2kx}{\pi} - k\right).$$

Le développement que nous venons de trouver a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'aire qu'on obtient en transformant l'aire limitée par les deux branches de la courbe

$$|\sin z| = \cos\frac{\pi i k'}{2k},$$

comme on l'a dit dans les n°s. 11 et 12. En particulier il a lieu pour toutes les valeurs réelles de x.

Zur Theorie der Resultanten.

(Von Herrn *Eugen Netto* in Giessen.)

Die abgekürzte, *Bézout*sche Form der Resultante zweier Gleichungen

$$(1.)\qquad \begin{cases} f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n, \\ g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \cdots + b_{n-1} \end{cases}$$

lässt sich aus der gewöhnlichen Determinantenform mit den Elementen a, b direct durch Determinantenumwandlung herleiten.

Nun hat *Kronecker* (Berl. Mon. Ber. 1881, Juni) die Bedingungen für die Existenz eines gemeinsamen Theilers von (1.) und (2.) durch das Verschwinden recurrirender Determinanten ausgedrückt, deren höchste, wie bei *Bézout*, auch nur bis zum Grade n aufsteigt. Ich will im Folgenden auch diese Determinanten direct in die gewöhnliche Form umwandeln, einige interessante Eigenschaften derselben ableiten, und noch einige Bemerkungen daran knüpfen, die zum Theil auf eine früher von mir behandelte Frage (dieses Journal Bd. 104) Bezug haben.

Setzt man

$$(2.)\qquad \frac{g(x)}{f(x)} = c_0x^{-1} + c_1x^{-2} + c_2x^{-3} + \cdots,$$

so wird

$$b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1} = (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n)(c_0x^{-1} + c_1x^{-2} + \cdots)$$

und also

$$(3.)\qquad a_0c_\lambda + a_1c_{\lambda-1} + \cdots + a_\lambda c_0 = b_\lambda, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$(a_\lambda = 0, \text{ wenn } \lambda > n;\quad b_\lambda = 0, \text{ wenn } \lambda > n-1),$$

und daraus ergiebt sich:

$$a_0c_0 = b_0,\quad a_0^2c_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix},\quad a_0^3c_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix},\quad a_0^4c_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Durch Induction erkennt man leicht die Richtigkeit der Gleichung

$$(3^a.) \qquad a_0^{\lambda+1} c_\lambda = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{\lambda-1} & a_\lambda \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{\lambda-2} & a_{\lambda-1} \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{\lambda-3} & a_{\lambda-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{\lambda-1} & b_\lambda \end{vmatrix},$$

sobald man die Determinante nach den Elementen der letzten Spalte entwickelt und von (3.) Gebrauch macht. Es ist danach

$$(2^a.) \qquad \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{a_0} b_0 x^{-1} + \frac{1}{a_0^2} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} x^{-2} + \frac{1}{a_0^3} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} x^{-3} + \cdots.$$

Aus der Theorie der recurrirenden Reihen ergiebt sich sofort, dass wenn man

$$(4.) \qquad C_{\lambda+1} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_\lambda \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{\lambda+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_\lambda & c_{\lambda+1} & c_{\lambda+2} & \dots & c_{2\lambda} \end{vmatrix}$$

setzt, die charakteristischen (wie ich kürzer statt „nothwendigen und hinreichenden" sage) Bedingungen für die Existenz eines grössten gemeinsamen Theilers der νten Ordnung von f und g die folgenden sind:

$$(5.) \qquad C_n = 0, \quad C_{n-1} = 0, \quad \dots, \quad C_{n-\nu+1} = 0, \quad C_{n-\nu} \neq 0.$$

Setzt man ferner

$$(6.) \quad \begin{cases} \Psi_\nu = |c_i \quad c_{i+1} \quad \dots \quad c_{i+n-\nu-1} \quad x^i|, & (i = 0, 1, \dots, n-\nu) \\ \Phi_\nu = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-\nu-1} & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n-\nu} & c_0 \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n-\nu+1} & c_0 x + c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-\nu} & c_{n-\nu+1} & \dots & c_{2n-2\nu-1} & c_0 x^{n-\nu-1} + c_1 x^{n-\nu-2} + \cdots + c_{n-\nu-1} \end{vmatrix}, \end{cases}$$

dann nimmt der grösste gemeinsame Theiler die Gestalt an

$$(7.) \qquad g\Psi_\nu - f\Phi_\nu = F_{n-\nu}.$$

Unsere Aufgabe kommt also im Wesentlichen darauf hinaus, (4.) als Function der a und der b in Determinantenform herzustellen. Zu diesem Zwecke

schieben wir den $\lambda+1$ Zeilen von (4.) links je λ Elemente in der nachstehenden Art an

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0, \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_0, \\ 0 & 0 & \ldots & c_0 & c_1, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & c_0 & \ldots & c_{\lambda-3} & c_{\lambda-2}, \\ c_0 & c_1 & \ldots & c_{\lambda-2} & c_{\lambda-1}. \end{array}$$

Unter die Elemente von (4.) schreiben wir λ Zeilen von je $(\lambda+1)$ Nullen. Das so gebildete System vervollständigen wir zu einem quadratischen durch das Diagonalsystem

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1, \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0, \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0, \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

Die so erhaltene Determinante S der Ordnung $(2\lambda+1)$ unterscheidet sich von der Determinante (4.) der Ordnung $(\lambda+1)$ nur durch den Factor $(-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)}$. Vertauscht man in der neuen Determinante S noch die erste mit der letzten Zeile, die zweite mit der vorletzten, u. s. f., die λte mit der $(\lambda+2)$-ten, so tritt gegen (4.) der Factor $(-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)}$ als unterscheidend auf.

Jetzt multipliciren wir die letzte Spalte von S mit a_0 und addiren zu ihr die vorhergehende mit a_1, die zweitvorhergehende mit a_2, ... multiplicirte. Dann lautet nach (3.) die umgewandelte letzte Spalte von oben nach unten genommen

$$a_{2\lambda},\quad a_{2\lambda-1},\quad \ldots,\quad a_{\lambda+1},\quad b_{2\lambda},\quad b_{2\lambda-1},\quad \ldots,\quad b_{\lambda}.$$

Weiter multipliciren wir die vorletzte Spalte von $a_0 S$ mit a_0 und verfahren genau so, wie eben auseinandergesetzt wurde. Dann lautet die umgewandelte vorletzte Spalte in $a_0^2 S$ von oben nach unten genommen

$$a_{2\lambda-1},\quad a_{2\lambda-2},\quad \ldots,\quad a_{\lambda},\quad b_{2\lambda-1},\quad b_{2\lambda-2},\quad \ldots,\quad b_{\lambda-1}.$$

Fährt man so fort, dann ergiebt sich schliesslich

$$(8.)\quad a_0^{2\lambda+1} C_{\lambda+1} = \left|\begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{2\lambda} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{2\lambda-1} \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{2\lambda-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{\lambda+1} \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{2\lambda} \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{2\lambda-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_\lambda \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\\\\\\\\\end{array}\right\} (\lambda \text{ Zeilen}) \\ \left.\begin{array}{l}\\\\\\\\\end{array}\right\} (\lambda+1 \text{ Zeilen}), \end{array}$$

$$(a_\mu = 0, \text{ wenn } \mu > n;\quad b_\mu = 0, \text{ wenn } \mu > n-1).$$

Genau in derselben Weise kann man mit Ψ_ν, Φ_ν verfahren und kommt dadurch zu den bekannten Ausdrücken.

Man erkennt übrigens leicht, dass man zum gleichen Ziele durch die Multiplication von $C_{\lambda+1}$ mit einer passenden Determinante vom Werthe $a_0^{2\lambda+1}$ gelangt; aber der hier eingeschlagene Weg ist bequemer.

Ferner ist es klar, wie man von der rechten Seite von (8.) zur linken, d. h. zu (4.) übergehen kann. Hier werden die Spalten von links her transformirt, indem man der Reihe nach die Grössen c einführt, welche durch die Gleichungen

$$a_0 c_0 = b_0, \quad a_0 c_1 = b_1 - a_1 c_1, \quad a_0 c_2 = b_2 - a_1 c_1 - a_2 c_0, \quad \dots$$

definirt sind.

Die benutzte Methode der Umwandlung von (4.) ist auch noch auf alle Subdeterminanten anwendbar. Insbesondere ergiebt sich so auch wieder die Formel (3ª.) für c_λ selbst. —

Die *Bézout*schen Determinanten haben, wenn man

$$(a_\varkappa b_\mu - a_\mu b_\varkappa) = (\varkappa, \mu)$$

und

$$(9.)\quad \begin{cases} d_{ik} = (0, i+k-1)+(1, i+k-2)+\dots+(i-1, k) \\ \quad = (0, i+k-1)+(1, i+k-2)+\dots+(k-1, i) \end{cases}$$

setzt, die symmetrische Form

$$(10.)\qquad B_{\lambda+1} = |d_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \dots, \lambda+1)$$

und die aus ihren Subdeterminanten λter Ordnung gebildete Determinante

$$(10^a.)\qquad \mathfrak{B}_{\lambda+1} = |\delta_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \dots, \lambda+1)$$

ist, wie *Jacobi* gezeigt hat, recurrirend, d. h. es ist

$$\delta_{ik} = \delta_{lm}, \quad \text{wenn} \quad i+k = l+m.$$

Das von uns hier betrachtete $C_{\lambda+1}$ ist recurrirend. Wir wollen nun zeigen, dass die aus seinen Subdeterminanten λter Ordnung gebildete Determinante

$$\Gamma_{\lambda+1} = |\gamma_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \lambda+1) \tag{11.}$$

genau dieselbe symmetrische Bildung aufweist wie das *Bézout*sche B, d. h. dass direct, bei passender Erklärung des Symbols (λ, μ) unter Beibehaltung von (9.) gesetzt werden kann

$$\Gamma_{\lambda+1} = B_{\lambda+1}.$$

Zur Darlegung dieses merkwürdigen Satzes nehmen wir die Matrix

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_\lambda & c_{\lambda+1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{\lambda+1} & c_{\lambda+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{\lambda-1} & c_\lambda & c_{\lambda+1} & \ldots & c_{2\lambda-1} & c_{2\lambda} \end{vmatrix} \tag{12.}$$

und definiren den Ausdruck, welcher dem (i, k) entsprechen soll,

$$[ik] \qquad (i < k)$$

als die mit $(-1)^{i+k-1}$ multiplicirte Determinante, die aus der Matrix durch Weglassung der Spalten mit den Anfangsgliedern c_i, c_k entsteht, also z. B.

$$[01] = \begin{vmatrix} c_2 & \ldots & c_{\lambda+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{\lambda+1} & \ldots & c_{2\lambda} \end{vmatrix}, \quad [02] = -\begin{vmatrix} c_1 & c_3 & \ldots & c_{\lambda+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_\lambda & c_{\lambda+2} & \ldots & c_{2\lambda} \end{vmatrix}.$$

Ferner sei $[ki] = -[ik]$ bei grösserem k. Dann ist das durch (11.) geforderte γ_{ik} entsprechend der Formel (9.) gleich

$$[0, i+k-1]+[1, i+k-2]+\cdots+[i-1, k]. \tag{13.}$$

Den Beweis möchte ich an einem Beispiele geben, welches so gewählt ist, dass seine allgemeine Gültigkeit in die Augen fällt; es sollen lediglich die complicirten Indices-Angaben vermieden werden.

Der Behauptung nach soll wie in (9.) $[05]+[14]+[23] = \gamma_{33}$ d. h.

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_0 & c_2 & c_3 & c_5 \\ c_1 & c_3 & c_4 & c_6 \\ c_2 & c_4 & c_5 & c_7 \\ c_3 & c_5 & c_6 & c_8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_4 & c_5 \\ c_1 & c_2 & c_5 & c_6 \\ c_2 & c_3 & c_6 & c_7 \\ c_3 & c_4 & c_7 & c_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_3 & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_4 & c_6 & c_7 \\ c_4 & c_5 & c_7 & c_8 \end{vmatrix} \tag{14.}$$

sein. Wir betrachten die Determinante

$$(15.)\qquad \begin{vmatrix} c_0+c_1, & c_1+c_2, & c_3+c_4, & c_4+c_5 \\ c_1+c_2, & c_2+c_3, & c_4+c_5, & c_5+c_6 \\ c_2+c_3, & c_3+c_4, & c_5+c_6, & c_6+c_7 \\ c_3+c_4, & c_4+c_5, & c_6+c_7, & c_7+c_8 \end{vmatrix},$$

deren Bildung einfach zu übersehen ist. (Würde es sich um γ_{ik} handeln, so hiesse die erste Zeile

$$c_0+c_1, \quad c_1+c_2, \quad \ldots, \quad c_{k-2}+c_{k-1}, \quad c_k+c_{k+1}, \quad c_{k+1}+c_{k+2}, \quad \ldots$$

und die folgenden würden hieraus durch gleichmässige Erhöhung der Indices gebildet.) (15.) wird jetzt in 2^4 Determinanten zerlegt

$$(16.)\qquad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_3 & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 & c_5 \\ c_2 & c_3 & c_5 & c_6 \\ c_3 & c_4 & c_6 & c_7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_3 & c_5 \\ c_1 & c_2 & c_4 & c_6 \\ c_2 & c_3 & c_5 & c_7 \\ c_3 & c_4 & c_6 & c_8 \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

indem man die in (15.) unter einander stehenden Glieder jeder Spalte bei den Zerlegungen wieder in einer Spalte lässt. Dann sieht man, dass wenn man dem c_α das Gewicht α ertheilt, die Glieder der einzelnen Determinanten gleiches Gewicht haben, jede einzelne Determinante also isobarisch ist. Ist das Gewicht einer Determinante in (16.) gleich k, so ist das Gewicht des Productes der Glieder der ersten Zeile $= k-6$. Daraus sieht man, dass in (16.) von nicht verschwindenden nur die drei Determinanten auf der linken Seite von (14.) das Gewicht 16 besitzen können.

Jetzt stellen wir (15.) in folgender Weise um:

$$(15^a.)\qquad \begin{vmatrix} c_0+c_1, & c_1+c_2, & c_3+c_4, & c_4+c_5 \\ c_1+c_2, & c_2+c_3, & c_4+c_5, & c_5+c_6 \\ c_3+c_2, & c_4+c_3, & c_6+c_5, & c_7+c_6 \\ c_4+c_3, & c_5+c_4, & c_7+c_6, & c_8+c_7 \end{vmatrix},$$

indem die Reihenfolge der Summanden in den einzelnen Gliedern der dritten und vierten Zeile geändert wird. (Würde es sich um γ_{ik} handeln, so müsste in der $i$ten und in allen folgenden Zeilen der entsprechenden Determinante diese Aenderung vorgenommen werden.) Auch (15^a.) wird jetzt in 2^4 Determinanten zerlegt, indem man die in (15^a.) unter einander stehenden Glieder jeder Spalte wieder zusammenlässt. Dann liefert nur die Com-

bination der ersten und die der zweiten Summanden jeder Spalte nämlich

$$(17.)\qquad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_3 & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_4 & c_6 & c_7 \\ c_4 & c_5 & c_7 & c_8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_4 & c_5 \\ c_2 & c_3 & c_5 & c_6 \\ c_2 & c_3 & c_5 & c_6 \\ c_3 & c_4 & c_6 & c_7 \end{vmatrix}$$

je eine isobarische Determinante vom Gewichte 16. In keiner der übrigen Determinanten kommt ein Glied desselben Gewichtes vor. Denn ersetzt man in (17.) eine oder mehrere Spalten der einen durch die entsprechenden der anderen Determinante, dann erkennt man nach dem, auf die Spalten angewendeten *Laplace*schen Satze sofort die Aenderung des Gewichtes. Bemerkt man dann endlich noch, dass in (17.) die zweite Determinante identisch verschwindet, und setzt man die erste der Summe der aus (15.) abgeleiteten vom Gewichte 16 gleich, dann ist der ausgesprochene Satz bewiesen. —

Aus der Definition

$$(\varkappa, \mu) = a_\varkappa b_\mu - a_\mu b_\varkappa$$

ergiebt sich die Gleichung

$$(\varkappa, \mu)(\nu, \varrho)+(\varkappa, \nu)(\varrho, \mu)+(\varkappa, \varrho)(\mu, \nu) = 0.$$

Die entsprechende Gleichung für unsere neuen Symbole

$$(18.)\qquad [\varkappa, \mu][\nu, \varrho]+[\varkappa, \nu][\varrho, \mu]+[\varkappa, \varrho][\mu, \nu] = 0$$

hat ebenfalls Gültigkeit, wie jetzt gezeigt werden soll.

Wir bilden folgendermassen eine Determinante von der Ordnung 2λ. In der Matrix (12.) tilgen wir die Spalte, die mit $c_\varkappa$ beginnt, also die $(\varkappa+1)$-te, und schieben rechts an die Rest-Matrix M_1 ein System von $(\lambda-1)$ Spalten mit lauter Nullen an. Dies sei die Matrix M_2. Unter M_1 setzen wir die Matrix $M_3 = M_1$; unter M_2 schreiben wir zuerst die Spalte, die mit $c_\varkappa$ beginnt, und dann der Reihe nach die von M_1 mit Ausnahme der mit c_μ, c_ν, c_ϱ beginnenden drei Spalten. Dadurch ist dann eine Determinante

$$\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}$$

gebildet, deren Werth offenbar gleich Null ist. Wenn man nun die letzten $(\lambda-2)$ Spalten aus M_4 von den ihnen gleichen aus M_3 abzieht, so wandelt sich M_3 in eine Matrix um, bei welcher nur die drei mit c_μ, c_ν, c_ϱ beginnenden Spalten von Null verschieden sind, während M_1, M_2, M_4 in der

Determinante ungeändert bleiben. Entwickelt man jetzt die umgewandelte Determinante nach dem *Laplace*schen Satze, indem man die oberen λ Zeilen und die unteren λ Zeilen zur Bildung der Partialdeterminanten benutzt, dann entsteht direct (18.). —

Aus der Bedeutung, welche die Gleichungen (6.) und (7.) für die beiden Functionen (1.) haben, kann man bekanntlich den Schluss ziehen, dass, wenn $C_{\lambda+1}$ und C_λ gleichzeitig verschwinden, dann sämmtliche Determinanten der Ordnung λ, welche sich aus

$$(19.)\quad \begin{cases} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{\lambda-1} & c_\lambda \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_\lambda & c_{\lambda+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{\lambda-1} & c_\lambda & c_{\lambda+1} & \dots & c_{2\lambda-2} & c_{2\lambda-1} \end{cases}$$

bilden lassen, gleichfalls zu Null werden. Wir wollen diejenige Determinante, welche aus (19.) durch Weglassung der mit c_α beginnenden Spalte entsteht, durch $[\alpha]$ bezeichnen. Dann geht der erwähnte Satz dahin, dass mit $C_{\lambda+1}=0$ und $[\lambda]=0$ auch

$$[\lambda-1]=0,\quad [\lambda-2]=0,\quad \dots,\quad [0]=0$$

sein müssen. Ich habe im 104. Bande dieses Journals den entsprechenden Satz für die gewöhnliche Form der Resultante durch Determinanten-Betrachtungen allein bewiesen, ohne Hinzuziehung von Resultanten-Eigenschaften. Die dort angewendete Methode führt auch hier und zwar in noch einfacherer Art zum Ziele.

Wir bilden wieder eine Determinante aus vier Matrizen

$$\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}.$$

M_1 besteht aus den $(\lambda+1)$ ersten Spalten von (12.) und M_3 aus den $(\lambda+1)$ letzten Spalten. M_2 soll in λ Zeilen je $(\lambda-1)$ Nullen enthalten. M_4 entsteht aus M_1 durch Weglassung der beiden Spalten, die mit c_α und $c_{\alpha+1}$ beginnen. Subtrahirt man nun die zweite von der $(\lambda+1)$-ten, die dritte von der $(\lambda+2)$-ten, ..., die λte von der $(2\lambda-1)$-ten Zeile in

$$\begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & \dots & c_{\lambda+1} & c_0 & \dots & c_{\alpha-1} & c_{\alpha+2} & \dots & c_\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix},$$

so erkennt man sofort, dass die Determinante abgesehen vom Vorzeichen in früherer Bezeichnung den Werth

$$C_{\lambda+1}.[\alpha,\ \alpha+1] \tag{20.}$$

besitzt. Wenn man andererseits die Spalten von M_2, M_4 von denen in M_1, M_3 subtrahirt, in welchen die Elemente von M_3 und M_4 übereinstimmen, dann bleibt für $0 < \alpha < n$ die Form zurück

$$\begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_{\alpha-1} & c_\alpha & c_{\alpha+1} & \dots & c_\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & c_\alpha & c_{\alpha+1} & 0 & \dots & c_{\lambda+1} & c_0 & \dots & c_{\alpha-1} & c_{\alpha+2} & \dots & c_\lambda \\ \dots & & & & & & & & & & & & \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man hier nun wieder nach dem *Laplace*schen Satze hinsichtlich der ersten λ und der letzten λ Zeilen, so treten nur drei Producte aus Partialdeterminanten auf, nämlich

$$[\alpha].[\alpha],\quad [\alpha-1].[\alpha+1],$$

$$[\lambda]\cdot\begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_{\alpha-1} & c_{\alpha+1} & \dots & c_{\lambda+1} \\ \dots & & & & & \\ c_{\lambda-1} & \dots & c_{\alpha+\lambda-2} & c_{\alpha+\lambda} & \dots & c_{2\lambda} \end{vmatrix}.$$

Vergleicht man dies mit (20.), so folgt, dass mit $C_{\lambda+1}$, $[\lambda]$ und $[\alpha-1]$ gleichzeitig auch $[\alpha]$ verschwindet. Es ist also nur noch nöthig, das Verschwinden von $[0]$ als Folge desjenigen von $C_{\lambda+1}$ und $[\lambda]$ zu beweisen. Dies ergiebt sich aber auf dem gleichen Wege aus der Determinante

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{\lambda+1} & c_2 & c_3 & \dots & c_\lambda \end{vmatrix},$$

bei welcher gegen die soeben betrachtete in der *Laplace*schen Entwickelung eben nur noch ein weiteres Glied wegfällt, so dass

$$C_{\lambda+1}.[0,\ 1] = \pm[0].[0]\pm[\lambda]\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_{\lambda+1} \\ \dots & & & \\ c_{\lambda+1} & c_{\lambda+2} & \dots & c_{2\lambda} \end{vmatrix}$$

entsteht. Hierdurch ist der Satz begründet. —

Der Beweis dafür, dass (10^a.) eine recurrirende Determinante ist, wird von *Jacobi* mit Beziehung auf die Bedeutung der Determinante für die beiden Functionen (1.) geliefert, und, soviel mir bekannt ist, wurde bisher noch kein Beweis veröffentlicht, welcher nur die Theorie der Determinanten selbst bei dem Beweise benutzt. Es soll dies hier geschehen.

Ich will also beweisen, dass

$$\delta_{ik} = \delta_{lm} \qquad (i+k=l+m)$$

ist, oder, was dasselbe aussagt, dass man die Gleichung

$$\frac{\partial B_{\lambda+1}}{\partial d_{ik}} = \frac{\partial B_{\lambda+1}}{\partial d_{lm}} \qquad (i+k=l+m)$$

hat. Wir wollen dabei statt (1.) hier

$$(1^{a}.) \qquad \begin{cases} f(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n, \\ g(x) = b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n, \end{cases}$$

$$(a_\varkappa b_\mu - a_\mu b_\varkappa) = (\varkappa,\ \mu),$$

$$(9.) \qquad d_{ik} = (0,\ i+k-1)+(1,\ i+k-2)+\cdots+(i-1,\ k),$$

$$B = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

zu Grunde legen. Nun nehmen wir die Matrix

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \end{array}\right\} (n-1 \text{ Zeilen})$$

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \end{array}\right\} (n-1 \text{ Zeilen})$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{(2n-1 \text{ Spalten})}$$

und beweisen, dass die aus ihr durch Weglassung der $(q-1)$-ten Spalte gebildete Determinante T_q

$$= (-1)^{\varkappa+\lambda-1}\frac{\partial B}{\partial d_{\varkappa\lambda}} \qquad (\varkappa+\lambda=q)$$

ist. Offenbar stimmt dies mit dem zu beweisenden Satze überein.

Die Umwandlung der Determinante mit den a, b in die mit den d geschieht folgendermassen: Zu der mit b_0 multiplicirten ersten Zeile addiren wir die mit b_1 multiplicirte zweite, ... die mit $b_{\varkappa-2}$ multiplicirte $(\varkappa-1)$-te Zeile; ferner subtrahiren wir die mit a_0 multiplicirte $n$te, die mit a_1 multiplicirte $(n+1)$-te, ... die mit $a_{\varkappa-2}$ multiplicirte $(n+\varkappa-2)$-te von der ersten Zeile. Dadurch gehen die $(\varkappa-1)$ ersten Glieder der ersten Zeile und ebenso

die $(n-\varkappa)$ letzten in Null über, die übrigen stimmen mit den Elementen der $(\varkappa-1)$-ten Zeile von $\frac{\partial B}{\partial d_{\varkappa\lambda}}$ überein. Ebenso addiren wir zu der mit b_0 multiplicirten zweiten die mit b_1 multiplicirte dritte, ... die mit $b_{\varkappa-3}$ multiplicirte $(\varkappa-1)$-te Zeile; ferner subtrahiren wir die mit a_0 multiplicirte $(n+1)$-te, ... die mit $a_{\varkappa-3}$ multiplicirte $(n+\varkappa-2)$-te. Dadurch gehen wieder die $(\varkappa-1)$ ersten Glieder und ebenso die $(n-\varkappa)$ letzten der zweiten Zeile in Null über, und die zurückbleibenden stimmen mit den Elementen der $(\varkappa-2)$-ten Zeile von $\frac{\partial B}{\partial d_{\varkappa\lambda}}$ überein. So geht man weiter und wandelt auf diese Weise die ersten $(\varkappa-1)$ Zeilen unserer Determinante in diejenigen von $\frac{\partial B}{\partial d_{\varkappa\lambda}}$ über; nur die Reihenfolge ist dabei die umgekehrte.

Aehnlich verfährt man mit den $(n-\varkappa)$ letzten Zeilen, welche aus den Elementen a gebildet sind. Zu der mit b_n multiplicirten $(n-1)$-ten Zeile wird die mit b_{n-1} multiplicirte $(n-2)$-te, ... die mit $b_{\varkappa+1}$ multiplicirte $(n-\varkappa)$-te Zeile addirt; ebenso subtrahiren wir die mit a_n multiplicirte $(2n-2)$-te Zeile, ... und endlich die mit $a_{\varkappa+1}$ multiplicirte $(n+\varkappa-1)$-te Zeile von der $(n-1)$-ten Zeile. Dadurch gehen die $(\varkappa-1)$ ersten und die $(n-\varkappa)$ letzten Glieder der $(n-1)$-ten Zeile in Null über, und die zurückbleibenden stimmen mit denen der $\varkappa$ten Zeile von $\frac{\partial B}{\partial d_{\varkappa\lambda}}$ überein. Ebenso transformirt man nun die $(n-2)$-te Zeile, indem man stets bis auf die $(n-\varkappa)$-te zurückgeht und erhält dadurch die letzten $(n-\varkappa)$ Zeilen von $\frac{\partial B}{\partial d_{\varkappa\lambda}}$ nur in umgekehrter Reihenfolge.

Abgesehen von dem Vorzeichen, welches sich entweder direct oder aus dem Schlussresultate durch die Vergleichung zweier Glieder leicht feststellen lässt, hat man daher die symbolische Gleichung

$$b_0^{\varkappa-1} b_n^{n-\varkappa} T_q = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial B}{\partial d_{\varkappa\lambda}} & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & & & b_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

Hier ist es nun klar, dass die Factoren $b_0^{\varkappa-1}$, $b_n^{n-\varkappa}$ sich auf beiden Seiten

wegheben. Dadurch kommt man dann zu der behaupteten Uebereinstimmung, durch welche der *Jacobi*sche Satz ausgedrückt wird. —

März, 1895.

Für die Functionen

$$\Psi_\nu = \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_{\nu-1} & 1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ c_\nu & \dots & c_{2\nu-1} & z^\nu \end{vmatrix}$$

besteht eine Recursionsformel, welche von *Jacobi* herrührt (vgl. Werke III, 315), und die von Herrn *Frobenius* (Berl. Ber. 1894; 414) nur durch Anwendung von Determinanten-Identitäten bewiesen worden ist. Wir wollen von dieser Formel einen neuen, einfachen Beweis geben, der mit den elementarsten Sätzen der Determinantentheorie auskommt und fast unmittelbar zum Ziele führt.

Setzen wir

$$C_\nu = \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_{\nu-1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ c_{\nu-1} & \dots & c_{2\nu-2} \end{vmatrix}, \quad C'_\nu = \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_{\nu-2} & c_\nu \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ c_{\nu-1} & \dots & c_{2\nu-3} & c_{2\nu-1} \end{vmatrix},$$

so lautet die Formel

$$C_\nu^2 \Psi_{\nu+1} + (C_\nu C'_{\nu+1} - C_{\nu+1} C'_\nu - C_\nu C_{\nu+1} z) \Psi_\nu + C_{\nu+1}^2 \Psi_{\nu-1} = 0.$$

Die zu befolgende Beweismethode wollen wir an dem Falle $\nu = 2$ auseinandersetzen, da sie im allgemeinen Falle gar keiner Aenderungen bedarf. Man hat unmittelbar, wenn in der folgenden Determinante die Punkte Nullen bedeuten

$$\left|\begin{array}{cccccccc} c_0 & c_1 & . & . & . & . & c_2+c_1 z & 1 \\ c_1 & c_2 & . & . & . & . & c_3+c_2 z & z \\ \hline . & c_2 & c_0 & c_1 & . & . & c_3 & . \\ . & c_3 & c_1 & c_2 & . & . & c_4 & . \\ . & c_4 & c_2 & c_3 & . & . & c_5 & . \\ \hline . & . & . & . & c_0 & c_1 & c_2 & 1 \\ . & . & . & . & c_1 & c_2 & c_3 & z \\ . & . & . & . & c_2 & c_3 & c_4 & z^2 \end{array}\right| = (C_2 C'_3 - [C'_2 + C_2 z] C_3) \Psi_2 + \Psi_1 C_3^2,$$

wenn man den *Laplace*schen Zerlegungssatz in der durch die Horizontalstriche angedeuteten Art benutzt. Die linke Seite formen wir nun um.

Die mit z multiplicirte sechste, siebente, achte Zeile wird bezw. zu der dritten, vierten, fünften Zeile addirt und dann die zweite, dritte, vierte mit z multiplicirte Spalte von der resp. siebenten, fünften, sechsten subtrahirt. So entsteht in der obigen Determinante nur eine Aenderung in der vorletzten Spalte, in welcher die Glieder $c_1 z$ und $c_2 z$ wegfallen, und in der letzten Spalte, welche durch

$$1, \quad z, \quad z, \quad z^2, \quad z^3, \quad 1, \quad z, \quad z^2$$

ersetzt worden ist. Jetzt addiren wir die erste und vierte zur fünften, die zweite zur sechsten Spalte und subtrahiren die sechste Zeile von der ersten, die siebente von der zweiten und dritten, die achte von der vierten. Dadurch ergiebt sich, was zu beweisen war,

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & . & . & . & . & . & . \\ c_1 & c_2 & . & . & . & . & . & . \\ . & c_2 & c_0 & c_1 & . & . & . & . \\ . & c_3 & c_1 & c_2 & . & . & . & . \\ . & c_4 & c_2 & c_3 & c_3 & c_4 & c_5 & z^3 \\ . & . & . & . & c_0 & c_1 & c_2 & 1 \\ . & . & . & . & c_1 & c_2 & c_3 & z \\ . & . & . & . & c_2 & c_3 & c_4 & z^2 \end{vmatrix} = -C_2^2 \Psi_3.$$

Die Bildung der Determinante im allgemeinen Falle erfolgt genau nach derselben Methode, wie ich sie in dem Aufsatze „Erweiterung des *Laplace*schen Determinanten-Zerlegungssatzes“ in diesem Journal Bd. 114 auseinandergesetzt habe.

Mai, 1895.

Hierher gehört, sowohl seiner Natur, wie unserer Behandlung nach noch ein anderes Theorem bezüglich der Methode des grössten gemeinsamen Theilers.

Wir setzen

$$\begin{aligned} f &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m, \\ f_1 &= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n, \end{aligned} \qquad (n \leqq m-1)$$

multipliciren, um bei der Ausführung der Division gebrochene Coefficienten zu vermeiden f mit b_0^{m-n+1} und bilden

$$b_0^{m-n+1} f = f_1 Q_1 + f_2,$$

wobei (vgl. oben S. 33) man erhält:

$$Q_1 = b_0^{m-n}|a_0|x^{m-n}+b_0^{m-n-1}\begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}x^{m-n-1}+b_0^{m-n-2}\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}x^{m-n-2}+\cdots$$

$$\cdots+\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-n} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{m-n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-n} \end{vmatrix}, \quad (b_\mu = 0 \text{ für } \mu > n);$$

$$f_2 = \sum_{\alpha=1}^{n}\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-n} & b_{m-n+\alpha} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{m-n-1} & b_{m-n+\alpha-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_\alpha \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-n} & a_{m-n+\alpha} \end{vmatrix}x^{n-\alpha} = c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}.$$

Hier kann der Grad von f_2 ein geringerer und zwar $=p$ werden, falls die Determinanten für $c_0, c_1, \ldots, c_{n-p-2}$ verschwinden. Die charakteristischen Bedingungen für diese Gradreduction sind hierdurch gegeben. Eine nothwendige Bedingung erhält man dadurch, dass

$$c_0 \equiv \pm a_0 b_1^{m-n+1}, \quad c_1 \equiv \pm a_0 b_1^{m-n} b_2, \quad \ldots \quad (\text{mod. } b_0)$$

ist; es müssen $a_0 b_1^{m-n+1}$, $a_0 b_1^{m-n} b_2$, ... durch b_0 theilbar sein. Wir setzen

$$f_2 = d_0x^p+d_1x^{p-1}+d_2x^{p-2}+\cdots+d_p; \quad (d_\alpha = c_{n-p-1+\alpha}).$$

Nun bilden wir ebenso wie oben weiter

$$d_0^{n-p+1}f_1 = f_2Q_2+f_3,$$

$$f_3 = \sum_{\alpha=1}^{p}\begin{vmatrix} d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-p} & d_{n-p+\alpha} \\ 0 & d_0 & \cdots & d_{n-p-1} & d_{n-p+\alpha-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_0 & d_\alpha \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-p} & b_{n-p+\alpha} \end{vmatrix}x^{p-\alpha}, \quad (d_\mu = 0 \text{ für } \mu > p).$$

Ich behaupte nun, *dass jeder Coefficient von f_3 durch $b_0^{(m-n)(n-p)+1}$ theilbar ist, so dass der Factor b_0^{m-n+1}, der bei f in die Rechnung eingeführt wurde, hier wieder beseitigt werden kann.* Wir betrachten

$$e_\varkappa = \begin{vmatrix} d_0 & d_1 & \dots & d_{n-p} & d_\varkappa \\ 0 & d_0 & \dots & d_{n-p-1} & d_{\varkappa-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_0 & d_{\varkappa-n+p} \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{n-p} & b_\varkappa \end{vmatrix}$$

und haben statt der d die gleichwerthigen Determinanten $(m-n+2)$-ter Ordnung einzusetzen. Dies geschieht folgendermassen. Wir bezeichnen die Matrix von $(m-n+2)$ Zeilen und einer Spalte

$$\left.\begin{matrix} b_\lambda \\ b_{\lambda-1} \\ \vdots \\ b_{\lambda-n+m} \\ a_\lambda \end{matrix}\right\} = D_\lambda \quad (b_\mu = 0 \text{ für } \mu > n \text{ und } \mu < 0)$$

und die Matrix von $(m-n+2)$ Zeilen und $(m-n+1)$ Colonnen

$$D_0 D_1 \dots D_{m-n} = M_1 \quad \text{oder} \quad = M_2, \quad \dots \quad \text{oder} \quad = M_{n-p+1}.$$

Dann giebt die leicht verständliche symbolische Schreibweise

$$\begin{vmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & D_{m-p} & D_{m-p+1} & \dots & D_{m+n-2p} & D_{m-p+\varkappa} \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & D_{m-p} & \dots & D_{m+n-2p-1} & D_{m-p+\varkappa-1} \\ 0 & 0 & M_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & D_{m+n-2p-2} & D_{m-p+\varkappa-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{n-p+1} & 0 & 0 & \dots & D_{m-p} & D_{m-n+\varkappa} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-p} & b_\varkappa \end{vmatrix}$$

eine Determinante der Ordnung $(m-n+2)(n-p+1)+1$, deren Werth offenbar $e_\varkappa$ ist. Der Werth der Determinante wird nicht geändert, wenn an Stelle einer noch freien Spalte einer Zeile eine der ersten D_λ gesetzt wird; denn dies muss mit dem M zu einer Determinante

$$MD_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \dots m-p-1)$$

zusammentreten, welche für $\lambda = 0, 1, \dots m-n$ verschwindet, weil sie Spalten gleicher Elemente enthält; für $\lambda = m-n+1, \dots, m-p-1$, weil sie dann die Werthe $c_0, c_1, \dots, c_{n-p-2}$ ergiebt, die der Voraussetzung nach verschwinden. So können wir also die Determinante in die folgende Form bringen:

$$\begin{vmatrix} M_1 & .D_{m-n+1} & .D_{m-n+2} & \dots & D_{m-p} & \dots & D_{m+n-2p} & D_{m-p+\varkappa} \\ 0 & M_2 & .D_{m-n+1} & \dots & D_{m-p-1} & \dots & D_{m+n-2p-1} & D_{m-p+\varkappa-1} \\ 0 & 0 & M_3 & \dots & D_{m-p-2} & \dots & D_{m+n-2p-2} & D_{m-p+\varkappa-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & \dots & b_{n-p} & b_\varkappa \end{vmatrix},$$

wobei die Bezeichnung

$$.D_\alpha$$

andeuten soll, dass die Matrix D_α über die letzte Spalte der darunter stehenden Matrix M zu setzen ist. Jetzt schieben wir die ersten $(m-n)$ Spalten von M_2, M_3, ... M_{n-p+1}, also im Ganzen $(m-n)(n-p)$ Spalten rechts ans Ende der Determinante und addiren sie zu den zurückbleibenden Spalten derart, dass in jeder Zeile die Reihe der Indices in der natürlichen Folge 0, 1, 2, ... auftritt. Ist dies geschehen, dann stimmen die zweite, dritte, ... $(m-n)$-te Zeile, die zu M_1 gehören, mit der ersten, zweiten, ... $(m-n-1)$-ten aus M_2 entnommenen Zeile überein; ebenso die zweite, dritte, ... von M_2 mit der ersten, zweiten, ... von M_3 u. s. f.; jedesmal findet diese Uebereinstimmung bis auf Glieder der letzten $(m-n)(n-p)$ Spalten statt. Wir subtrahiren nun die angegebenen oberen von den ihnen gleichen unteren Zeilen und auch die letzte Zeile der Determinante von der drittletzten. Dann entstehen in den ersten

$$[(m-n+2)(n-p+1)+1]-[(m-n)(n-p)+1] = m+n-2p+2$$

Spalten gerade

$$(m-n)(n-p)+1$$

Zeilen, die lediglich Nullen enthalten; und somit zerfällt $e_\varkappa$ in das Product einer Determinante der Ordnung $(m+n-2p+2)$ und einer solchen der Ordnung $(m-n)(n-p)+1$. Die Gestalt der ersten ergiebt sich aus unseren Schlüssen als die folgende:

$$\left.\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{m+n-2p+1} & b_{m-p+\varkappa} \\ 0 & b_0 & \dots & b_{m+n-2p} & b_{m-p+\varkappa-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}\right\} (m-p+1 \text{ Zeilen})$$

$$\left.\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m+n-2p+1} & a_{m-p+\varkappa} \\ 0 & a_0 & \dots & a_{m+n-2p} & a_{m-p+\varkappa-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}\right\} (n-p+1 \text{ Zeilen}).$$

Die zweite Determinante enthält nur Zeilen, die durch Nullen und Elemente b gebildet werden

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots,$$
$$0, \quad b_0, \quad b_1, \quad \ldots,$$

und man erkennt ohne Schwierigkeit, dass ihr Werth gleich $b_0^{(m-n)(n-p)+1}$ wird. Damit ist der aufgestellte Satz bewiesen, dessen Richtigkeit so viel ich weiss, bisher nur in dem Falle $m-n=1$, $n-p=1$ gezeigt worden ist (Nouv. Ann. de Mathématiques; (2) VI; 1867; p. 351). Daselbst ist der Schluss auf die Gleichung

$$b_0^{m-n+1} f . Q_2 + f_3 = (d_0^{n-p+1} + Q_1 Q_2) f_1$$

gegründet. Wir können hier umgekehrt den Schluss ziehen, dass

$$Q_1 Q_2 + d_0^{n-p+1}$$

durch b_0^{m-n+1} theilbar ist, falls f_1 nicht in allen seinen Coefficienten den Factor b_0 enthält.

Giessen, Juni 1895.

Ueber einige Arten singulärer Punkte von Raumcurven.

(Von Herrn *Alfred Meder* in Dorpat.)

Einleitung.

Definition der zu untersuchenden Arten von Punkten.

§ 1.

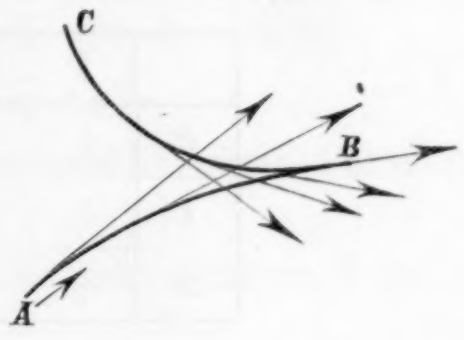
v. Staudt hat in der „Geometrie der Lage“ eine geometrische Definition der einfachsten Singularitäten ebener und räumlicher Curven gegeben, von denen schon zwei von *Monge* in dem Werke „Application de l'analyse à la géométrie“ analytisch kurz behandelt worden waren und zwar in § XXVII: Sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure, Nr. XXX—XXXV. Analytische Kriterien für alle diese Singularitäten zu finden, ist das Ziel der vorliegenden Untersuchung.

Wir formuliren die *Staudt*schen Definitionen in folgender Weise. Es sei die zu untersuchende Curve dadurch definirt, dass die Coordinaten ihrer Punkte als eindeutige Functionen eines Parameters t gegeben sind, welche für ein bestimmtes Intervall T der Variabeln t sammt ihren Ableitungen bis zu einer gewissen, später zu definirenden Ordnung hinauf endlich und stetig sind. Für dieses Intervall ändern sich dann auch Tangente und Schmiegungsebene der Curve in stetiger Weise.

Setzt man die eine der beiden Richtungen der Tangente in einem beliebigen Punkte der Curve als die positive fest, so sei die positive Richtung der Tangente im benachbarten Punkte diejenige, welche mit der positiven Richtung der Tangente im ursprünglichen Punkte einen unendlich kleinen Winkel bildet. Dadurch ist, wenn man die positive Richtung der Tangente in irgend einem Punkte fixirt hat, auch die positive Richtung derselben in jedem beliebigen anderen Punkte der Curve, für welchen t dem Intervall T angehört, festgelegt.

In Fig. 1 seien die positiven Richtungen der Tangenten durch die Pfeilspitzen angedeutet. Lässt man einen Punkt von *A* aus die Curve durchlaufen, so sieht man, dass er sich auf der zugehörigen Tangente in der einmal angenommenen, in unserem Falle der positiven Richtung fortbewegt. Dieses geschieht, bis er nach *B* gelangt. In *B* ändert er seine Fortgangsrichtung und bewegt sich nach der negativen Seite der Tangente hin. Ein solcher Punkt *B* wird ein ***Rückkehrpunkt*** der Curve genannt.

Fig. 1.



Wie es zur Bestimmung, ob ein Punkt der Curve ein gewöhnlicher oder ein Rückkehrpunkt ist, nöthig war, auf der Tangente eine gewisse Richtung zu fixiren, so muss man, um die Drehung der Tangente untersuchen zu können, die eine Seite der Schmiegungsebene als die positive festsetzen. Die positive Seite der Schmiegungsebene im benachbarten Punkte sei dann dadurch bestimmt, dass die nach den positiven Seiten der beiden Ebenen gezogenen Lothe mit einander einen unendlich kleinen Winkel bilden. Es ist dadurch für den ganzen, dem Intervalle *T* entsprechenden Verlauf der Curve die positive Seite der Schmiegungsebene bestimmt.

Lässt man die Tangente längs der Curve ohne Gleiten hinrollen, so wird sie offenbar in der zugehörigen Schmiegungsebene, wenn man dieselbe immer von der positiven Seite aus betrachtet, sich in einem gewissen Sinne, mit oder entgegengesetzt dem Gange des Uhrzeigers, drehen und nur in einzelnen Punkten ihren Drehungssinn umkehren. Kehrt die Tangente in einem Punkte der Curve ihren Drehungssinn um, so wird sie in dieser Lage ***Rückkehrtangente*** genannt.

Der Drehungssinn der Schmiegungsebene wird durch folgende Festsetzungen bestimmt. Ist auf der Tangente eine Richtung als die positive fixirt, so muss die Schmiegungsebene, wenn man immer nach der positiven Richtung der Tangente sieht, sich im allgemeinen in dem anfangs angenommenen Sinne drehen, mit oder entgegengesetzt dem Gange des Uhrzeigers. Nur in einzelnen Punkten der Curve kann sie ihren Drehungssinn umkehren und wird dann ***Rückkehrebene*** oder ***stationäre Schmiegungsebene*** genannt.

Da in jedem Punkte der Curve Punkt, Tangente und Schmiegungsebene gewöhnliche oder Rückkehrelemente sind, so können wir danach acht verschiedene Arten von Punkten unterscheiden, welche nach *Wiener* in dem folgenden Schema dargestellt werden:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
P	+	+	+	+	−	−	−	−
t	+	+	−	−	+	+	−	−
S	+	−	+	−	+	−	+	−

Hierbei bezieht sich die erste Reihe (P) auf das Verhalten des Punktes, die zweite (t) auf das der Tangente, die dritte (S) auf das der Schmiegungsebene. Das Zeichen + bedeutet, dass das betreffende Element kein Rückkehrelement ist, das Zeichen −, dass es ein Rückkehrelement ist.

I.

Einleitende Sätze.

§ 2.

Von drei Grössen U, V, W, die derartig mit einander verbunden sind, dass sie bei einer Coordinatentransformation von der Form:

$$(1.)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z, \\ y_1 = \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z, \\ z_1 = \alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 z \end{cases}$$

in die folgenden Werthe übergehen:

$$(2.)\qquad \begin{cases} U_1 = \alpha_1 U+\beta_1 V+\gamma_1 W, \\ V_1 = \alpha_2 U+\beta_2 V+\gamma_2 W, \\ W_1 = \alpha_3 U+\beta_3 V+\gamma_3 W, \end{cases}$$

sagt man, dass sie sich wie die Coordinaten ändern.

Aendern sich drei Grössen U, V, W bei einer Coordinatentransformation von der Form (1.) wie die Coordinaten und sind eine oder zwei von ihnen von Null verschieden, so kann man immer ein neues Coordinatensystem mit demselben Anfangspunkte finden, in welchem alle drei von Null verschieden sind. Sind die drei Ausdrücke U, V, W dagegen alle gleich Null, so sind sie es auch in jedem anderen Systeme, welches mit

dem ursprünglichen denselben Anfangspunkt hat. Der Beweis ergiebt sich aus der Betrachtung der Gleichungen (2.); desgleichen ist leicht zu ersehen, dass das neue System das allgemeinere ist.

Drei Grössen, die sich wie die Coordinaten ändern und mit denen wir es später oft zu thun haben werden, sind z. B. die Ausdrücke:

$$A = y'z'' - y''z', \quad B = z'x'' - z''x', \quad C = x'y'' - x''y',$$

in denen die Accente die Abbleitungen nach dem unabhängigen Parameter t bedeuten.

Zum Beweise hierfür braucht man nur die transformirte Form zu bilden.

$$\begin{aligned} A_1 &= y_1'z_1'' - y_1''z_1' \\ &= (\alpha_2x' + \beta_2y' + \gamma_2z')(\alpha_3x'' + \beta_3y'' + \gamma_3z'') - (\alpha_2x'' + \beta_2y'' + \gamma_2z'')(\alpha_3x' + \beta_3y' + \gamma_3z') \\ &= (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)(y'z'' - y''z') + (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)(z'x'' - z''x') + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)(x'y'' - x''y') \\ &= (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)A + (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)B + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)C. \end{aligned}$$

Sind, wie wir annehmen wollen, die beiden Coordinatensysteme rechtwinklig und congruent, so bestehen die Relationen:

$$\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 = \alpha_1, \quad \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2 = \beta_1, \quad \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = \gamma_1.$$

Die Ausdrücke A, B, C gehen also in die folgenden Werthe über:

$$(3.) \quad \begin{cases} A_1 = \alpha_1A + \beta_1B + \gamma_1C, \\ B_1 = \alpha_2A + \beta_2B + \gamma_2C, \\ C_1 = \alpha_3A + \beta_3B + \gamma_3C. \end{cases}$$

Die Grössen A, B, C ändern sich in der That wie die Coordinaten. Dasselbe ist der Fall mit den Ableitungen von A, B, C nach t, wie sich durch Differentiation der Gleichungen (3.) ergiebt.

§ 3.

Es mögen die n ersten Ableitungen von x, y, z nach t verschwinden, die $(n+1)$-te mindestens einer der drei Coordinaten dagegen von Null verschieden sein. Da die Ableitungen von x, y, z sich bei einer Coordinatentransformation wie die Coordinaten selbst ändern, so können wir nach dem eben Gesagten durch eine Drehung des Coordinatensystems bewirken, dass die $(n+1)$-ten Ableitungen aller drei Coordinaten von Null verschieden sind, während die Ableitungen bis zur $n$ten Ordnung hinauf gleich Null bleiben, und es ist dieses letztere System das allgemeinere.

$$(4.)\qquad \begin{cases} x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, & x^{(n+1)} \gtrless 0 \\ y' = y'' = \cdots = y^{(n)} = 0, & y^{(n+1)} \gtrless 0 \\ z' = z'' = \cdots = z^{(n)} = 0, & z^{(n+1)} \gtrless 0. \end{cases}$$

Es verschwinden infolge dieser Bedingungen (4.) mehrere von den ersten Ableitungen von A, B, C, und es soll gefunden werden, bis zu welcher Ordnung hinauf dieses bei einer allgemeinen Lage des Coordinatensystems der Fall ist.

Die Ableitungen von A sind:

$$\begin{aligned} A &= y'z''-y''z', \\ A' &= y'z'''-y'''z', \\ A'' &= y'z^{IV}-y^{IV}z'+y''z'''-y'''z'', \\ A''' &= y'z^{V}-y^{V}z'+2(y''z^{IV}-y^{IV}z''), \\ A^{IV} &= y'z^{VI}-y^{VI}z'+3(y''z^{V}-y^{V}z'')+2(y'''z^{IV}-y^{IV}z'''). \end{aligned}$$

Ersichtlicher Weise können auch alle übrigen Ableitungen von A in der Gestalt einer Summe von Gliedern geschrieben werden, die die folgende Form haben:

$$y^{(\lambda)}z^{(\mu)}-y^{(\mu)}z^{(\lambda)},$$

wobei $\lambda < \mu$ und $\lambda+\mu$ um 3 grösser ist, als die Ordnung der zugehörigen Ableitung von A. Eine beliebige, etwa die $m$te Ableitung von A wird also folgende Gestalt haben:

$$A^{(m)} = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m+2}{2}\right]} k_\nu^m (y^{(\nu)}z^{(m+3-\nu)}-y^{(m+3-\nu)}z^{(\nu)}),$$

wo k_ν^m ein positiver numerischer Coefficient ist und allgemein $[u]$ die grösste irgend einen Werth u nicht übersteigende ganze Zahl bedeutet.

Von den Gliedern unter dem Summenzeichen verschwinden wegen der Gleichungen (4.) alle, in denen $\nu < n+1$ ist. Soll $A^{(m)}$ von Null verschieden sein, so muss in mindestens einem Gliede $\nu \geqq n+1$ und $m+3-\nu \geqq n+2$ sein. Aus diesen beiden Ungleichungen findet man:

$$m \geqq 2n.$$

Der kleinste Werth, den m annehmen kann, wenn $A^{(m)}$ von Null verschieden ist, ist also $m = 2n$, es ist dann:

$$A^{(2n)} = k_{n+1}^{2n}(y^{(n+1)}z^{(n+2)}-y^{(n+2)}z^{(n+1)}).$$

Es verschwinden also infolge der Bedingungen (4.) die $2n-1$ ersten Ab-

leitungen von A, während die $2n$te von Null verschieden ist. Die Ausdrücke $B = z'x'' - z''x'$ und $C = x'y'' - x''y'$ und ihre Ableitungen erhält man aus A und den entsprechenden Ableitungen von A, indem man y, z durch z, x resp. x, y ersetzt. Infolge der Bedingungen (4.) verschwinden also auch von B und C die $2n-1$ ersten Ableitungen.

§ 4.

Die Ausdrücke A, B, C und ihre Ableitungen können auch verschwinden, wenn zwischen den Ableitungen von x, y, z gewisse Beziehungen bestehen.

Zunächst sei x', y', $z' \gtrless 0$.

$$A = y'z'' - y''z', \quad B = z'x'' - z''x', \quad C = x'y'' - x''y'.$$

Aus $A = B = C = 0$ folgt die Doppelproportion:

$$x' : y' : z' = x'' : y'' : z''.$$

Verschwinden noch die ersten Ableitungen von A, B, C, so erhält man:

$$x' : y' : z' = x''' : y''' : z''',$$

zusammen mit dem Vorhergehenden:

$$x' : y' : z' = x'' : y'' : z'' = x''' : y''' : z'''.$$

Durch den Schluss von $m-1$ auf m lässt sich beweisen, dass aus dem Verschwinden von A, B, C und ihren ersten m Ableitungen die nachstehenden Beziehungen zwischen den Differentialquotienten von x, y, z folgen:

$$x' : y' : z' = x'' : y'' : z'' = \cdots = x^{(m+2)} : y^{(m+2)} : z^{(m+2)}.$$

Es sei gefunden, dass, wenn A, B, C und ihre $m-1$ ersten Ableitungen verschwinden, die folgenden Gleichungen bestehen:

(5.) $$x' : y' : z' = x'' : y'' : z'' = \cdots = x^{(m+1)} : y^{(m+1)} : z^{(m+1)},$$

wie es für $m-1 = 0$ und $m-1 = 1$ gezeigt worden ist.

Der Ausdruck für $A^{(m)}$ reducirt sich wegen der Gleichungen (5.) auf ein einziges Glied:

$$A^{(m)} = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m+2}{2}\right]} k_\nu^m \left(y^{(\nu)} z^{(m+3-\nu)} - y^{(m+3-\nu)} z^{(\nu)}\right)$$
$$= y' z^{(m+2)} - y^{(m+2)} z'.$$

Aus $A^{(m)} = 0$ folgt:

(6.) $$y' z^{(m+2)} - y^{(m+2)} z' = 0.$$

Ebenso findet man aus $B^{(m)} = 0$:

$$z' x^{(m+2)} - z^{(m+2)} x' = 0. \tag{7.}$$

Aus den Gleichungen (6.) und (7.) ergiebt sich:

$$x' : y' : z' = x^{(m+2)} : y^{(m+2)} : z^{(m+2)}.$$

Man erhält in der That aus dem Verschwinden von A, B, C und ihren m ersten Ableitungen die folgenden Relationen:

$$x' : y' : z' = x'' : y'' : z'' = \cdots = x^{(m+2)} : y^{(m+2)} : z^{(m+2)}.$$

Anders verhält es sich mit diesen Beziehungen, wenn schon einige der ersten Ableitungen von x, y, z verschwinden.

Es sei jetzt:

$$x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, \quad x^{(n+1)} \gtrless 0,$$
$$y' = y'' = \cdots = y^{(n)} = 0, \quad y^{(n+1)} \gtrless 0,$$
$$z' = z'' = \cdots = z^{(n)} = 0, \quad z^{(n+1)} \gtrless 0.$$

Hieraus folgt nach § 3:

$$A = A' = \cdots = A^{(2n-1)} = 0,$$
$$B = B' = \cdots = B^{(2n-1)} = 0,$$
$$C = C' = \cdots = C^{(2n-1)} = 0.$$

Die $2n$ten Ableitungen von A, B, C reduciren sich alle auf ein Glied.

$$A^{(2n)} = \sum_{\nu=1}^{n+1} k_\nu^{2n} \left(y^{(\nu)} z^{(2n+3-\nu)} - y^{(2n+3-\nu)} z^{(\nu)} \right).$$
$$A^{(2n)} = k_{n+1}^{2n} \left(y^{(n+1)} z^{(n+2)} - y^{(n+2)} z^{(n+1)} \right),$$
$$B^{(2n)} = k_{n+1}^{2n} \left(z^{(n+1)} x^{(n+2)} - z^{(n+2)} x^{(n+1)} \right),$$
$$C^{(2n)} = k_{n+1}^{2n} \left(x^{(n+1)} y^{(n+2)} - x^{(n+2)} y^{(n+1)} \right).$$

Aus $A^{(2n)} = B^{(2n)} = C^{(2n)} = 0$ erhält man:

$$x^{(n+1)} : y^{(n+1)} : z^{(n+1)} = x^{(n+2)} : y^{(n+2)} : z^{(n+2)}.$$

Durch den Schluss von $m-1$ auf m lässt sich zeigen, dass, wenn die n ersten Ableitungen von x, y, z und die Grössen A, B, C nebst ihren m ersten Ableitungen verschwinden, wobei nach § 3 $m \geqq 2n-1$ sein muss, die folgenden Proportionen bestehen:

$$x^{(n+1)} : y^{(n+1)} : z^{(n+1)} = x^{(n+2)} : y^{(n+2)} : z^{(n+2)} = \cdots = x^{(m-n+2)} : y^{(m-n+2)} : z^{(m-n+2)}. \tag{8.}$$

Wir nehmen an, dass beim Verschwinden der n ersten Ableitungen von x, y, z und der $m-1$ ersten Ableitungen von A, B, C die folgenden

Gleichungen richtig sind:

$$(9.) \qquad x^{(n+1)}:y^{(n+1)}:z^{(n+1)} = x^{(n+2)}:y^{(n+2)}:z^{(n+2)} = \cdots = x^{(m-n+1)}:y^{(m-n+1)}:z^{(m-n+1)}.$$

Der Ausdruck für $A^{(m)}$ war:

$$A^{(m)} = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m+2}{2}\right]} k_\nu^m \left(y^{(\nu)}z^{(m+3-\nu)} - y^{(m+3-\nu)}z^{(\nu)}\right).$$

Die Summanden, in denen $\nu < n+1$ ist, fallen weg, da die n ersten Ableitungen von x, y, z gleich Null sind. Die Summanden, in denen $\nu > n+1$ ist, fallen weg wegen der Gleichungen (9.). Es bleibt also nur übrig:

$$A^{(m)} = k_{n+1}^m \left(y^{(n+1)}z^{(m-n+2)} - y^{(m-n+2)}z^{(n+1)}\right).$$

Ersetzt man y, z durch z, x resp. x, y, so erhält man $B^{(m)}$ resp. $C^{(m)}$. Aus $A^{(m)} = B^{(m)} = C^{(m)} = 0$ ergiebt sich:

$$\begin{aligned} y^{(n+1)}z^{(m-n+2)} - y^{(m-n+2)}z^{(n+1)} &= 0, \\ z^{(n+1)}x^{(m-n+2)} - z^{(m-n+2)}x^{(n+1)} &= 0, \\ x^{(n+1)}y^{(m-n+2)} - x^{(m-n+2)}y^{(n+1)} &= 0. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen kann man aber folgendermassen schreiben:

$$x^{(n+1)} : y^{(n+1)} : z^{(n+1)} = x^{(m-n+2)} : y^{(m-n+2)} : z^{(m-n+2)}.$$

Zusammen mit den Gleichungen (9.) giebt diese Relation die Behauptung (8.), da die Gleichungen (9.) richtig sind für $m-1 = 2n$.

Da wir auf die in diesem Paragraphen gefundenen Resultate öfters werden verweisen müssen, so wollen wir dieselben in einem besonderen Satze formuliren.

Satz I. *Sind zu gleicher Zeit nachstehende Gleichungssysteme erfüllt:*

$$\begin{aligned} &x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, \; x^{(n+1)} \gtrless 0, \qquad && A = A' = \cdots = A^{(m)} = 0, \; A^{(m+1)} \gtrless 0, \\ &y' = y'' = \cdots = y^{(n)} = 0, \; y^{(n+1)} \gtrless 0, \text{ und } && B = B' = \cdots = B^{(m)} = 0, \; B^{(m+1)} \gtrless 0, \\ &z' = z'' = \cdots = z^{(n)} = 0, \; z^{(n+1)} \gtrless 0, \qquad && C = C' = \cdots = C^{(m)} = 0, \; C^{(m+1)} \gtrless 0, \end{aligned}$$

wobei $m \geqq 2n-1$ ist, so bestehen zwischen den Ableitungen der Coordinaten die folgenden Relationen:

$$x^{(n+1)} : y^{(n+1)} : z^{(n+1)} = x^{(n+2)} : y^{(n+2)} : z^{(n+2)} = \cdots = x^{(m-n+2)} : y^{(m-n+2)} : z^{(m-n+2)}.$$

§ 5.

Ein Ausdruck, der in unseren späteren Betrachtungen eine grosse Rolle spielt, ist die folgende Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Die Ableitungen von Δ haben nachstehende Gestalt:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x^{IV} & y^{IV} & z^{IV} \end{vmatrix}, \quad \Delta'' = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x''' & y''' & z''' \\ x^{IV} & y^{IV} & z^{IV} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x^{V} & y^{V} & z^{V} \end{vmatrix},$$

$$\Delta^{(p)} = \Sigma k^p_{\mu,\nu} \begin{vmatrix} x^{(\mu)} & y^{(\mu)} & z^{(\mu)} \\ x^{(\nu)} & y^{(\nu)} & z^{(\nu)} \\ x^{(p+6-\mu-\nu)} & y^{(p+6-\mu-\nu)} & z^{(p+6-\mu-\nu)} \end{vmatrix},$$

wobei zu summiren ist über alle ganzzahligen Werthsysteme μ, ν, für welche $0 < \mu < \nu < p+6-\mu-\nu$ und wo der numerische Coefficient $k^p_{\mu,\nu} > 0$ ist.

Es mögen die folgenden Systeme erfüllt sein:

$$(10.) \quad \begin{cases} x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, & x^{(n+1)} \gtrless 0, \\ y' = y'' = \cdots = y^{(n)} = 0, & y^{(n+1)} \gtrless 0, \\ z' = z'' = \cdots = z^{(n)} = 0, & z^{(n+1)} \gtrless 0, \end{cases}$$

$$(11.) \quad \begin{cases} A = A' = \cdots = A^{(m)} = 0, & A^{(m+1)} \gtrless 0, \\ B = B' = \cdots = B^{(m)} = 0, & B^{(m+1)} \gtrless 0, \\ C = C' = \cdots = C^{(m)} = 0, & C^{(m+1)} \gtrless 0. \end{cases}$$

Es soll bestimmt werden, bis zu welcher Ordnung hinauf die Ableitungen von Δ in Folge dieser Bedingungen verschwinden.

Die Bedingung (11.) können wir nach Satz I folgendermassen formuliren:

$$(12.) \quad x^{(n+1)} : y^{(n+1)} : z^{(n+1)} = \cdots = x^{(m-n+2)} : y^{(m-n+2)} : z^{(m-n+2)}.$$

In dem Ausdrucke für $\Delta^{(p)}$ verschwinden wegen des Systems (10.) alle diejenigen Einzeldeterminanten, in denen μ kleiner als $n+1$ ist, und ausserdem wegen der Relation (12.) diejenigen, in welchen ν kleiner ist als $m-n+3$, da dann in diesen die Subdeterminanten aus dem Systeme der beiden

ersten Horizontalreihen gleich Null sind. Es ist also $\Delta^{(p)}$ nur dann von Null verschieden, wenn die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$\mu \geqq n+1,$$
$$\nu \geqq m-n+3,$$
$$p+6-\mu-\nu \geqq \nu+1.$$

Hieraus erhält man für p:

$$p \geqq 2m-n+2.$$

Ist $p = 2m-n+2$, so besitzt es seinen kleinsten möglichen Werth, für welchen $\Delta^{(p)}$ von Null verschieden sein kann, d. h. die erste Ableitung von Δ, welche infolge der Bedingungen (10.) und (11.) nicht verschwindet, ist von der Ordnung $2m-n+2$, sie hat den Audruck:

$$\Delta^{(2m-n+2)} = k_{n+1,m-n+3}^{2m-n+2} \begin{vmatrix} x^{(n+1)} & y^{(n+1)} & z^{(n+1)} \\ x^{(m-n+3)} & y^{(m-n+3)} & z^{(m-n+3)} \\ x^{(m-n+4)} & y^{(m-n+4)} & z^{(m-n+4)} \end{vmatrix}.$$

Dieses Resultat können wir mit dem in § 3 gefundenen in den folgenden Satz zusammenfassen.

Satz II. *Ist bei einer allgemeinen Lage des Coordinatensystems:*

$$x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, \quad x^{(n+1)} \geqq 0,$$
$$y' = y'' = \cdots = y^{(n)} = 0, \quad y^{(n+1)} \geqq 0,$$
$$z' = z'' = \cdots = z^{(n)} = 0, \quad z^{(n+1)} \geqq 0,$$

so bestehen die Gleichungen:

$$A = A' = \cdots = A^{(2n-1)} = 0,$$
$$B = B' = \cdots = B^{(2n-1)} = 0,$$
$$C = C' = \cdots = C^{(2n-1)} = 0.$$

Ist ausserdem das nachstehende System erfüllt:

$$A^{(2n)} = A^{(2n+1)} = \cdots = A^{(m)} = 0, \quad A^{(m+1)} \geqq 0,$$
$$B^{(2n)} = B^{(2n+1)} = \cdots = B^{(m)} = 0, \quad B^{(m+1)} \geqq 0,$$
$$C^{(2n)} = C^{(2n+1)} = \cdots = C^{(m)} = 0, \quad C^{(m+1)} \geqq 0,$$

so ist

$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(2m-n+1)} = 0,$$

während $\Delta^{(2m-n+2)}$ von Null verschieden sein kann.

§ 6.

Es seien u und v irgend zwei Functionen des Argumentes t. Dann hat die $n$te Ableitung des Productes uv die folgende Gestalt:

$$(13.)\quad \begin{cases} (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{1.2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)} \\ \qquad\quad = \sum\limits_{\varrho=0}^{n}\binom{n}{\varrho}u^{(\varrho)}v^{(n-\varrho)}. \end{cases}$$

Verschwinden für irgend einen Werth des Argumentes t die Functionen u und v, sowie die ersten $\lambda-1$ Ableitungen von u und die ersten $\mu-1$ Ableitungen von v, so ist die erste nicht verschwindende Ableitung des Productes uv von der Ordnung $\lambda+\mu$, denn es reducirt sich der Ausdruck (13.) für $n=\lambda+\mu$ auf:

$$(uv)^{(\lambda+\mu)} = \binom{\lambda+\mu}{\lambda}u^{(\lambda)}v^{(\mu)},$$

während die Ableitungen niedrigerer Ordnung des Productes uv sämmtlich verschwinden.

Durch den Schluss von $m-1$ auf m lässt sich allgemein beweisen, dass, wenn für einen Werth des Parameters t die folgenden Relationen bestehen:

$$(14.)\quad \begin{cases} u_1 = u_1' = \cdots = u_1^{(\lambda_1-1)} = 0, & u_1^{(\lambda_1)} \gtrless 0, \\ u_2 = u_2' = \cdots = u_2^{(\lambda_2-1)} = 0, & u_2^{(\lambda_2)} \gtrless 0, \\ \vdots \quad\; \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ u_m = u_m' = \cdots = u_m^{(\lambda_m-1)} = 0, & u_m^{(\lambda_m)} \gtrless 0, \end{cases}$$

die erste nicht verschwindende Ableitung des Productes $u_1u_2\ldots u_m$ von der Ordnung $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m$ ist.

Die $n$te Ableitung des Productes $u_1u_2\ldots u_m$ kann man folgendermassen schreiben:

$$(15.)\quad \begin{cases} (u_1u_2\ldots u_m)^{(n)} = (u_1u_2\ldots u_{m-1})^{(n)}u_m + n(u_1u_2\ldots u_{m-1})^{(n-1)}u_m' + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots + (u_1u_2\ldots u_{m-1})u_m^{(n)}. \end{cases}$$

Wir nehmen an, wie es für $m-1=2$ richtig ist, dass eine beliebige, etwa die ϱte Ableitung eines Productes von $m-1$ Factoren die folgende Gestalt hat:

$$(16.)\qquad (u_1u_2\ldots u_{m-1})^{(\varrho)} = \Sigma K_{m-1,\varrho}^{\nu}u_1^{(\nu_1)}u_2^{(\nu_2)}\ldots u_{m-1}^{(\nu_{m-1})},$$

wo $K_{m-1,\varrho}^{\nu}$ ein positiver aus Binomialcoefficienten zusammengesetzter Factor

ist und wobei zu summiren ist über alle ganzzahligen Werthsysteme ν, für welche $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{m-1}=\varrho$ ist.

Setzt man in dem Ausdrucke (15.) für die Ableitungen des Productes $u_1u_2\ldots u_{m-1}$ die Werthe aus der Gleichung (16.) ein, so erhält man:

$$(17.)\quad \begin{cases} (u_1u_2\ldots u_m)^{(n)} = u_m\Sigma K^{\nu}_{m-1,n}u_1^{(\nu_1)}u_2^{(\nu_2)}\ldots u_{m-1}^{(\nu_{m-1})} \\ \qquad\qquad + nu'_m\Sigma K^{\nu}_{m-1,n-1}u_1^{(\nu_1)}u_2^{(\nu_2)}\ldots u_{m-1}^{(\nu_{m-1})}+\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots+u_m^{(n)}u_1u_2\ldots u_{m-1}, \\ (u_1u_2\ldots u_m)^{(n)} = \sum\limits_{\nu_1\ldots\nu_m} K^{\nu}_{m,n}u_1^{(\nu_1)}u_2^{(\nu_2)}\ldots u_m^{(\nu_m)}. \end{cases}$$

Hierbei ist die Summe zu bilden über alle ganzzahligen Werthsysteme ν, für welche $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m=n$ ist, und der Coefficient $K^{\nu}_{m,n}$ ist stets positiv. Die Gleichung (17.) gilt für jedes beliebige m, da sie nach (16.) richtig ist für $m-1=2$.

Besteht das System (14.), so fallen in dem Ausdrucke (17.) alle Glieder weg, in denen $\nu_\mu<\lambda_\mu$ ist, wenn man μ der Reihe nach gleich 1, 2, ..., m setzt. Soll die $n$te Ableitung des Productes $u_1u_2\ldots u_m$ von Null verschieden sein, so müssen die folgenden Relationen bestehen:

$$(18.)\qquad \nu_\mu \geqq \lambda_\mu. \qquad (\mu=1, 2, \ldots, m)$$

Summirt man alle Ungleichungen (18.), so erhält man, da

$$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m = n$$

ist:

$$n \geqq \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m.$$

Die erste nicht verschwindende Ableitung des Productes $u_1u_2\ldots u_m$ ist, wenn die Gleichungen (14.) bestehen, von der Ordnung $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m$, sie reducirt sich auf ein einziges Glied:

$$(u_1u_2\ldots u_m)^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)} = K^{\lambda}_{m,\lambda_1+\cdots+\lambda_m}u_1^{(\lambda_1)}u_2^{(\lambda_2)}\ldots u_m^{(\lambda_m)}.$$

Für den Fall, dass einige der Factoren u_μ unter einander gleich sind, ergiebt sich der folgende Satz:

Satz III. *Bestehen für irgend einen Werth des unabhängigen Parameters t die folgenden Relationen:*

$$u_\mu = u'_\mu = \cdots = u_\mu^{(\lambda_\mu-1)} = 0, \quad u_\mu^{(\lambda_\mu)} \gtrless 0, \qquad (\mu=1, 2, \ldots, m)$$

so ist die erste nicht verschwindende Ableitung des Productes

$$u_1^{\nu_1}u_2^{\nu_2}\ldots u_m^{\nu_m}$$

von der Ordnung

$$\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2+\cdots+\lambda_m\nu_m.$$

Der folgende Satz bedarf keines weiteren Beweises.

Satz IV. *Nimmt ein Ausdruck für irgend einen Werth der unabhängigen Veränderlichen die Form* $\frac{0}{0}$ *an, so ist der wahre Werth desselben Null, endlich oder unendlich gross, je nachdem die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung des Zählers grösser, gleich oder kleiner ist, als die der ersten nicht verschwindenden Ableitung des Nenners.*

II.

Singularitäten ebener Curven und Rückkehrpunkte bei Raumcurven.

§ 7.

Ehe wir an die analytische Darstellung der in der Einleitung definirten acht Arten singulärer Punkte bei den Raumcurven gehen, wollen wir die Kriterien für die entsprechenden Fälle bei den ebenen Curven herleiten. Bei den ebenen Curven findet nur einer der folgenden vier Fälle statt:

	P	*t*	
1	+	+	*regulärer Punkt.*
2	+	−	*Wendepunkt.*
3	−	+	*Rückkehrpunkt erster Art oder Spitze.*
4	−	−	*Rückkehrpunkt zweiter Art oder Schnabelpunkt.*

In einem Rückkehrpunkt müssen, wie aus Fig. 2 und Fig. 3 ersichtlich ist, bei einer allgemeinen Lage des Coordinatensystems, die Coordinaten

Fig. 2.

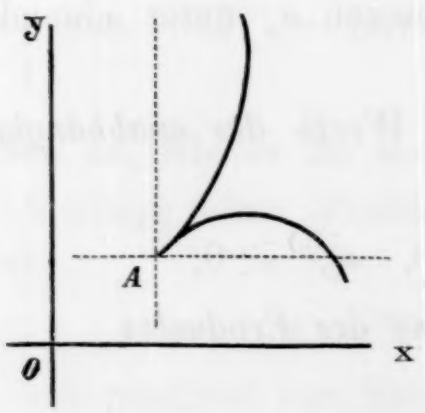
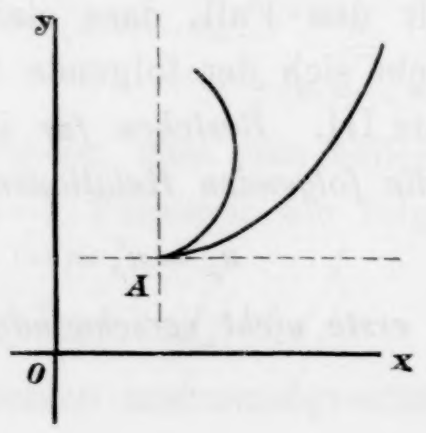


Fig. 3.



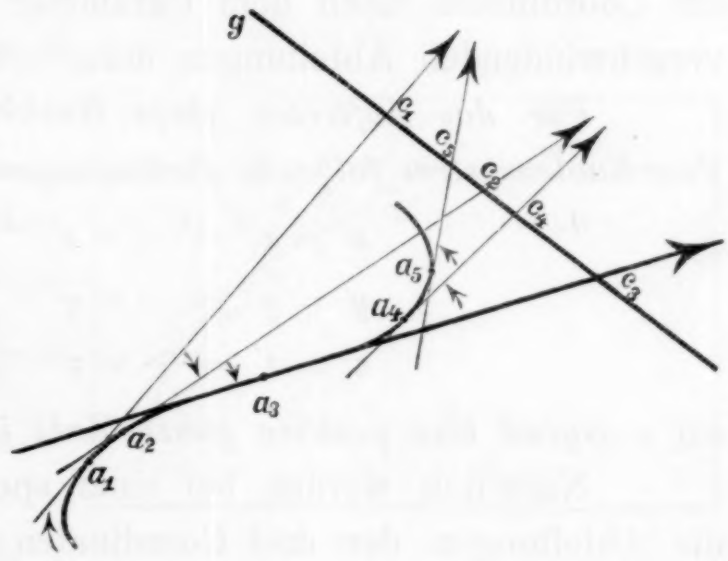
den Sinn ihres Ab- oder Zunehmens wechseln. Für einen Rückkehrpunkt müssen also in einem allgemeinen Coordinatensystem die folgenden Bedingungen, die zugleich nothwendig und hinreichend sind, erfüllt sein:

$$x' = x'' = \cdots = x^{(2\alpha-1)} = 0, \quad x^{(2\alpha)} \gtrless 0,$$
$$y' = y'' = \cdots = y^{(2\alpha-1)} = 0, \quad y^{(2\alpha)} \gtrless 0,$$

wo α irgend eine positive ganze Zahl ist.

Zur Bestimmung des Drehungssinnes der Tangente betrachten wir den Durchschnittspunkt c_ν (Fig. 4) derselben mit einer beliebigen festen Geraden g, welche nicht durch den zu untersuchenden Punkt der Curve geht. Aus der Figur ist ersichtlich, dass, wenn die Tangente ihren Drehungssinn umkehrt, auch der Punkt c_ν auf der Geraden g seine Fortgangsrichtung ändert. Die Gerade g sei die y-Axe. Der Punkt c_ν wird erhalten, wenn man in der Gleichung der Tangente

Fig. 4.



$$(\xi - x)y' = (\eta - y)x'$$

$\eta = 0$ setzt:

$$\xi = \frac{xy' - x'y}{y'}.$$

Soll der Punkt c_ν seine Fortgangsrichtung umkehren, so muss $\xi' = 0$ und die erste nicht verschwindende Ableitung von ξ von gerader Ordnung sein.

$$\xi' = \frac{y(x'y'' - x''y')}{y'^2} = \frac{y\delta}{y'^2}.$$

Wäre $y = 0$, so würde der betrachtete Punkt der Curve auf der Geraden g liegen, was wir ausgeschlossen haben. Aus $\xi' = 0$ folgt also $\delta = 0$ und umgekehrt. Es ist leicht einzusehen, dass von den folgenden beiden Systemen das eine immer aus dem anderen folgt:

$$\xi' = \xi'' = \cdots = \xi^{(r)} = 0, \quad \xi^{(r+1)} \gtrless 0,$$
$$\delta = \delta' = \cdots = \delta^{(r-1)} = 0, \quad \delta^{(r)} \gtrless 0.$$

Das analytische Kriterium für das Auftreten einer Rückkehrtangente bei einer ebenen Curve ist:

$$\delta = \delta' = \cdots = \delta^{(2\gamma)} = 0, \quad \delta^{(2\gamma+1)} \gtrless 0.$$

Im Falle $x' = y' = 0$ ergiebt sich für ξ' der Werth $\frac{0}{0}$, doch bleibt das Kriterium für die Rückkehrtangente dasselbe, wie später bei den Raumcurven streng bewiesen wird.

§ 8.

Wir können jetzt zur analytischen Charakterisirung der in der Einleitung definirten acht Arten von singulären Punkten bei Raumcurven übergehen.

Bei einem Rückkehrpunkte im Raume wechseln offenbar, ebenso wie in der Ebene, in einem allgemeinen Coordinatensystem die Coordinaten den Sinn ihres Ab- oder Zunehmens, es müssen also die ersten Ableitungen der Coordinaten nach dem Parameter t verschwinden und die ersten nicht verschwindenden Ableitungen derselben von gerader Ordnung sein.

Für das Auftreten eines Rückkehrpunktes sind in einem allgemeinen Coordinatensystem folgende Bedingungen nothwendig und hinreichend:

$$x' = x'' = \cdots = x^{(2\alpha-1)} = 0, \quad x^{(2\alpha)} \gtrless 0,$$
$$y' = y'' = \cdots = y^{(2\alpha-1)} = 0, \quad y^{(2\alpha)} \gtrless 0,$$
$$z' = z'' = \cdots = z^{(2\alpha-1)} = 0, \quad z^{(2\alpha)} \gtrless 0,$$

wo α irgend eine positive ganze Zahl ist.

Natürlich werden bei einer speciellen Lage des Coordinatensystems die Ableitungen der drei Coordinaten nicht alle bis zu derselben Ordnung hinauf verschwinden, man kann aber auch dann gleich erkennen, ob der Punkt der Curve ein Rückkehrpunkt ist oder nicht.

Es mögen für einen Punkt der Curve die folgenden Gleichungen bestehen:

$$x' = x'' = \cdots = x^{(\alpha)} = 0, \quad x^{(\alpha+1)} \gtrless 0,$$
$$y' = y'' = \cdots = y^{(\beta)} = 0, \quad y^{(\beta+1)} \gtrless 0,$$
$$z' = z'' = \cdots = z^{(\gamma)} = 0, \quad x^{(\gamma+1)} \gtrless 0,$$
$$\alpha \leqq \beta, \quad \alpha \leqq \gamma.$$

Aus § 2 folgt, dass in einem allgemeinen Coordinatensystem die α ersten Ableitungen aller drei Coordinaten gleich Null, die $(\alpha+1)$-ten dagegen alle von Null verschieden sind. Ob ein Punkt der Curve ein Rückkehrpunkt ist oder nicht, darüber entscheidet also in einem speciellen Coordinatensystem diejenige Coordinate, von der die wenigsten der ersten auf einander folgenden Ableitungen verschwinden. Ist die Anzahl dieser verschwindenden Ableitungen ungerade, so ist der Punkt ein Rückkehrpunkt,

sonst nicht. Bei der Herleitung der Eigenschaften der Curve in einem Rückkehrpunkte muss natürlich das allgemeine System $\alpha = \beta = \gamma$ zu Grunde gelegt werden.

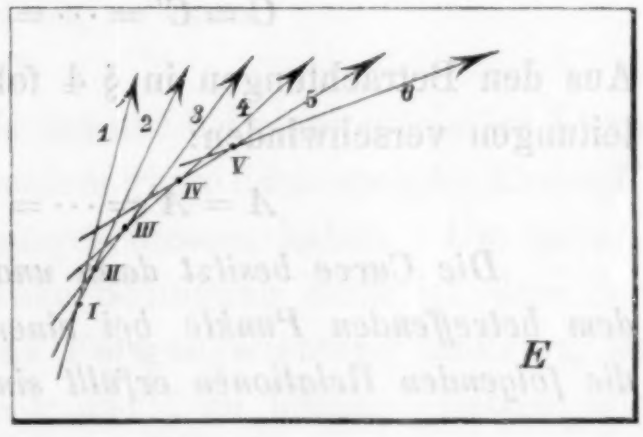
III.

Rückkehrtangente (Lineare Inflexion).

§ 9.

Denkt man sich im Raume eine beliebige Ebene E (Fig. 5), die nicht durch den zu untersuchenden Punkt der Curve geht und überhaupt zu demselben keine besonders ausgezeichnete Lage hat, so schneiden die Schmiegungsebenen der Curve auf dieser Ebene E die Geraden 1, 2, 3, 4, ... aus, die Schnittpunkte je zweier auf einander folgender Geraden I, II, III, ... sind die Durchschnittspunkte der Tangenten der Curve mit der Ebene E. Aus der Definition des Drehungssinnes der Tangente folgt, dass, wenn die Tangente ihren Drehungssinn umkehrt, der Durchschnittspunkt derselben mit der Ebene E seine Fortgangsrichtung ändert, also ein Rückkehrpunkt ist, und umgekehrt. Analytisch lässt sich diese Bedingung für die Rückkehrtangente folgendermassen formuliren. Die Gleichungen der Tangente an die Curve xyz sind, wenn man durch ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten der Tangente bezeichnet:

Fig. 5.



$$(\zeta - z)x' = (\xi - x)z',$$
$$(\eta - y)x' = (\xi - x)y'.$$

Die Ebene E sei die yz-Ebene. Für den Durchschnittspunkt der Tangente mit dieser Ebene erhält man die Coordinaten:

$$\zeta = \frac{zx' - z'x}{x'}, \qquad \eta = \frac{yx' - y'x}{x'},$$
$$\zeta' = \frac{x(z'x'' - z''x')}{x'^2}, \qquad \eta' = \frac{x(y'x'' - y''x')}{x'^2}.$$

Führt man wieder die folgende Bezeichnung ein:

$$A = y'z'' - y''z', \quad B = z'x'' - z''x', \quad C = x'y'' - x''y',$$

so kann man schreiben:

$$\zeta' = \frac{xB}{x'^2}, \quad \eta' = \frac{-xC}{x'^2}.$$

Soll der Punkt $(\eta\zeta)$ ein Rückkehrpunkt sein, so müssen η' und ζ' ihr Zeichen wechseln. Der Nenner x'^2 kann als quadratisches Glied sein Zeichen nicht umkehren, ebensowenig x, da das nur eine specielle Lage des Coordinatensystems bedeuten würde. Es wechseln also η' und ζ' dann und nur dann ihr Zeichen, wenn C und B es thun und umgekehrt. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Punkt $(\eta\zeta)$ in der Ebene $\xi = 0$ ein Rückkehrpunkt ist, ist also:

$$B = B' = \cdots = B^{(2\beta)} = 0, \quad B^{(2\beta+1)} \gtrless 0,$$
$$C = C' = \cdots = C^{(2\beta)} = 0, \quad C^{(2\beta+1)} \gtrless 0.$$

Aus den Betrachtungen in § 4 folgt, dass dann auch von A dieselben Ableitungen verschwinden:

$$A = A' = \cdots = A^{(2\beta)} = 0, \quad A^{(2\beta+1)} \gtrless 0.$$

Die Curve besitzt dann und nur dann eine Rückkehrtangente, wenn in dem betreffenden Punkte bei einer allgemeinen Lage des Coordinatensystems die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$A = A' = \cdots = A^{(2\beta)} = 0, \quad A^{(2\beta+1)} \gtrless 0,$$
$$B = B' = \cdots = B^{(2\beta)} = 0, \quad B^{(2\beta+1)} \gtrless 0,$$
$$C = C' = \cdots = C^{(2\beta)} = 0, \quad C^{(2\beta+1)} \gtrless 0,$$

wo β eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet.

Umgekehrt folgt aus den letzten Betrachtungen, dass, wenn die Curve keine Rückkehrtangente besitzt, A, B, C ihr Zeichen beibehalten müssen.

§ 10.

Bei unseren letzten Untersuchungen haben wir die Frage nicht berücksichtigt, ob die Ableitungen von η und ζ immer endlich sind. Wir wissen daher noch nicht, ob wir in der Ebene E einen Rückkehrpunkt von genau denselben Eigenschaften erhalten, wie den in § 8 definirten, da für denselben die Coordinaten und ihre Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung hinauf endliche Functionen des Parameters t sein mussten. Es ist daher jedenfalls von Interesse, die Grenzwerthe der Ableitungen von η und ζ

zu finden, es wird sich dabei ergeben, dass sie bis zu einer gewissen Ordnung hinauf endlich sein müssen und wir in der That einen Rückkehrpunkt von denselben Eigenschaften, wie den früher betrachteten, erhalten. Wir wollen daher das Kriterium für die Rückkehrtangente vollkommen streng herleiten, indem wir die auf einander folgenden Ableitungen von ζ einzeln untersuchen.

Wir wollen zunächst annehmen, dass x', y', z' von Null verschieden sind. Im Fall die Curve eine Rückkehrtangente besitzt, muss, wie wir gefunden haben, der Punkt $(\eta\zeta)$ ein Rückkehrpunkt sein. Die ersten Ableitungen seiner Coordinaten hatten folgende Gestalt:

$$\zeta' = \frac{xB}{x'^2}, \quad \eta' = \frac{-xC}{x'^2}.$$

Wenn der Punkt $(\eta\zeta)$ ein Rückkehrpunkt ist, so muss

$$B = C = 0$$

sein, denn von $x = 0$ kann man absehen, da das nur bei einer speciellen Lage des Coordinatensystems der Fall wäre; ausserdem ginge dann auch die Ebene E durch den betrachteten Punkt, was wir ausgeschlossen haben. Um zu erkennen, ob $B = C = 0$ auch die hinreichende Bedingung dafür ist, dass der Punkt $(\eta\zeta)$ in der Ebene E $(\xi = 0)$ seine Fortgangsrichtung umkehrt, ist es nöthig, die folgenden Ableitungen von η und ζ zu bilden. Setzen wir $xx'^{-2} = b$, so ist $\zeta' = bB$ und eine beliebige, etwa die $r$te Ableitung von ζ hat die Gestalt:

$$(1.) \qquad \zeta^{(r)} = b^{(r-1)}B + (r-1)b^{(r-2)}B' + \frac{(r-1)(r-2)}{1.2}b^{(r-3)}B'' + \cdots + bB^{(r-1)}.$$

Die Factoren $b^{(r)}$ können nicht unendlich gross werden, da sie Bruchform haben und der Nenner immer eine Potenz von x' ist, welches wir als von Null verschieden angenommen haben. Die Grösse b selbst ist endlich und von Null verschieden.

Für $B = 0$ reducirt sich $\zeta'' = b'B + bB'$ auf bB'. Der Ausdruck ζ'' ist von Null verschieden oder gleich Null, je nachdem B' von Null verschieden oder gleich Null ist und umgekehrt. Ist etwa $B' = 0$, so bleibt in dem Ausdrucke

$$\zeta''' = b''B + 2b'B' + bB''$$

nur ein Glied übrig:

$$\zeta''' = bB''.$$

Es ist also ζ''' gleich Null oder von Null verschieden, je nachdem B'' verschwindet oder nicht.

Wir nehmen an, dass von den folgenden beiden Systemen das erste immer aus dem zweiten folgt und umgekehrt das zweite eine Folge des ersten ist:

$$(2.)\quad \begin{cases} \zeta' = \zeta'' = \cdots = \zeta^{(r-1)} = 0, \\ B = B' = \cdots = B^{(r-2)} = 0. \end{cases}$$

Man kann dann zeigen, dass $\zeta^{(r)}$ gleich Null oder von Null verschieden ist, je nachdem $B^{(r-1)}$ verschwindet oder nicht.

Aus der Reihenentwickelung (1.) ist ersichtlich, dass $\zeta^{(r)}$ sich auf $bB^{(r-1)}$ reducirt, woraus unsere Behauptung folgt. Die Gleichungen (2.) sind, wie wir gezeigt haben, richtig für $r-1=2$ und $r-1=3$, es folgen also immer die nachstehenden zwei Gleichungssysteme aus einander:

$$\zeta' = \zeta'' = \cdots = \zeta^{(r)} = 0, \quad \zeta^{(r+1)} \gtrless 0,$$
$$B = B' = \cdots = B^{(r-1)} = 0, \quad B^{(r)} \gtrless 0.$$

Ist der Punkt $(\eta\zeta)$ in der Ebene $\xi = 0$ ein Rückkehrpunkt, so müssen die Ableitungen von ζ bis zu einer ungeraden Ordnung hinauf gleich Null und die erste nicht verschwindende Ableitung von ζ von gerader Ordnung sein:

$$\zeta' = \zeta'' = \cdots = \zeta^{(2\beta+1)} = 0, \quad \zeta^{(2\beta+2)} \gtrless 0.$$

Daraus folgt aber, wie wir eben gesehen haben:

$$B = B' = \cdots = B^{(2\beta)} = 0, \quad B^{(2\beta+1)} \gtrless 0.$$

Für die Grössen C und A erhält man analoge Gleichungen, das eben hergeleitete Kriterium für die Rückkehrtangente stimmt genau mit dem früher gefundenen überein.

§ 11.

Schwieriger gestaltet sich die Untersuchung, wenn $x' = y' = z' = 0$ ist, da dann der Ausdruck:

$$\zeta' = \frac{xB}{x'^2}$$

die Form $\frac{0}{0}$ annimmt.

Es sei jetzt:

$$x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, \quad x^{(n+1)} \gtrless 0,$$
$$y' = y'' = \cdots = y^{(n)} = 0, \quad y^{(n+1)} \gtrless 0,$$
$$z' = z'' = \cdots = z^{(n)} = 0, \quad z^{(n+1)} \gtrless 0.$$

Nach Satz II verschwinden dann die folgenden Ableitungen von B:

$$B = B' = \cdots = B^{(2n-1)} = 0,$$

während die $2n$te Ableitung von B von Null verschieden sein kann.

$$\frac{\zeta'}{x} = \frac{B}{x'^2}. \tag{3.}$$

Die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung des Zählers B ist grösser oder gleich $2n$, je nachdem $B^{(2n)}$ gleich Null oder von Null verschieden ist. Die erste nicht verschwindende Ableitung von x' ist die $n$te, folglich nach Satz III die erste nicht verschwindende Ableitung des Nenners x'^2 die $2n$te. Der Grenzwerth des Bruches Bx'^{-2} kann nach Satz IV nicht unendlich gross sein und ist gleich Null oder von Null verschieden, je nachdem $B^{(2n)}$ verschwindet oder nicht. Wir können dieses Resultat auch noch verificiren, indem wir von Zähler und Nenner des Ausdruckes (3.) die $2n$te Ableitung bilden, dieselbe reducirt sich auf ein Glied:

$$\frac{\zeta'}{x} = \frac{B^{(2n)}}{\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n}(x^{(n+1)})^2} = \frac{1.2\ldots n\, B^{(2n)}}{2n(2n-1)\ldots(n+1)(x^{(n+1)})^2}.$$

Bilden wir jetzt unter der Voraussetzung $\zeta' = 0$, also auch $B^{(2n)} = 0$, den ersten Differentialquotienten des Ausdruckes (3.):

$$\frac{\zeta''}{x} = \frac{B'}{x'^2} - \frac{2x''B}{x'^3}. \tag{4.}$$

Die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung des Zählers B' im ersten Bruche ist $\geqq 2n$, des Zählers $x''B$ im zweiten Bruche $\geqq 3n$ (Satz III). In beiden Fällen gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem $B^{(2n+1)}$ gleich Null oder von Null verschieden ist. Die ersten nicht verschwindenden Ableitungen der Nenner sind von der Ordnung $2n$ resp. $3n$. Wir müssen also nach Satz IV erhalten, dass ζ'' gleich Null oder von Null verschieden ist, je nachdem $B^{(2n+1)}$ verschwindet oder nicht. Um den wahren Werth des Ausdruckes $\zeta'' x^{-1}$ zu finden, müssen wir von Zähler und Nenner des ersten Buches die $2n$te, von Zähler und Nenner des zweiten Bruches die $3n$te Ableitung bilden.

$$\frac{B'}{x'^2} = \frac{1.2\ldots n B^{(2n+1)}}{2n(2n-1)\ldots(n+1)(x^{(n+1)})^2}.$$

Um die $3n$te Ableitung von $x''B$ zu bilden, müssen wir in der Reihe

$$(uv)^{(p)} = u^{(p)}v + pu^{(p-1)}v' + \cdots + \frac{p(p-1)\ldots(\nu+1)}{1.2\ldots(p-\nu)}u^{(\nu)}v^{(p-\nu)} + \cdots + uv^{(p)}$$

die Buchstaben u, v, p durch die folgenden Werthe ersetzen:

$$u = x'', \quad v = B, \quad p = 3n.$$

Es verschwinden alle Glieder bis auf dasjenige, in welchem $\nu = n-1$, $p-\nu = 2n+1$ ist, und man erhält:

$$(x''B)^{(3n)} = \frac{3n(3n-1)\ldots n}{1.2\ldots(2n+1)} x^{(n+1)} B^{(2n+1)}.$$

Um die $3n$te Ableitung von x'^3 zu bilden, setzen wir:

$$u = x', \quad v = x'^2, \quad p = 3n.$$

Es verschwinden alle Glieder, bis auf dasjenige, in dem $\nu = n$, $p-\nu = 2n$ ist, und man erhält:

$$(x'^3)^{(3n)} = \frac{3n(3n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots 2n} x^{(n+1)} (x'^2)^{(2n)}.$$

Es ist aber:

$$(x'^2)^{(2n)} = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n} (x^{(n+1)})^2.$$

Setzt man diesen Werth in den vorigen Ausdruck ein:

$$(x'^3)^{(3n)} = \frac{3n(3n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots 2n} \cdot \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n} (x^{(n+1)})^3.$$

Das zweite Glied des Ausdruckes (4.) hat den folgenden Grenzwerth:

$$\frac{2x''B}{x'^3} = \frac{2n.1.2\ldots n}{(2n+1)2n(2n-1)\ldots(n+1)} \cdot \frac{B^{(2n+1)}}{(x^{(n+1)})^2}.$$

Der Ausdruck (4.) selbst gestaltet sich folgendermassen:

$$\frac{\zeta''}{x} = \frac{1.2\ldots n}{2n(2n-1)\ldots(n+1)} \left(1 - \frac{2n}{2n+1}\right) \frac{B^{(2n+1)}}{(x^{(n+1)})^2}$$

$$= \frac{1.2\ldots n B^{(2n+1)}}{(2n+1)2n(2n-1)\ldots(n+1)(x^{(n+1)})^2}.$$

Aus $\zeta'' = 0$ folgt $B^{(2n+1)} = 0$ und umgekehrt.

Wir wollen jetzt annehmen, es sei:

$$\zeta' = \zeta'' = \cdots = \zeta^{(r-1)} = 0$$

und es seien die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür:

$$B^{(2n)} = B^{(2n+1)} = \cdots = B^{(2n+r-2)} = 0,$$

wie wir es für $r-1 = 1$ und $r-1 = 2$ gezeigt haben. Es lässt sich zeigen,

dass $\zeta^{(r)}$ gleich Null oder von Null verschieden ist, je nachdem $B^{(2n+r-1)}$ verschwindet oder nicht.

Bildet man von $\zeta' x^{-1} = Bx'^{-2}$ die $(r-1)$-te Ableitung, so fallen auf der linken Seite alle Glieder weg, bis auf $\zeta^{(r)} x^{-1}$ und man erhält:

$$\frac{\zeta^{(r)}}{x} = B^{(r-1)}x'^{-2} + (r-1)B^{(r-2)}(x'^{-2})' + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(r-1)(r-2)\ldots(r-p)}{1.2\ldots p} B^{(r-p-1)}(x'^{-2})^{(p)} + \cdots + B(x'^{-2})^{(r-1)}.$$

Die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung von $B^{(r-1)}$ ist $\geqq 2n$, je nachdem $B^{(2n+r-1)}$ gleich Null oder von Null verschieden ist. Die erste nicht verschwindende Ableitung von x'^2 ist die $2n$te. Der Grenzwerth des ersten Gliedes $B^{(r-1)}x'^{-2}$ ist endlich (Satz IV) und zwar Null oder von Null verschieden, je nachdem $B^{(2n+r-1)}$ verschwindet oder nicht.

Untersuchen wir gleich das allgemeine Glied auf seinen Grenzwerth hin. Die Ableitungen von x'^{-2} haben die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
x'^{-2} &= x'^{-2},\\
(x'^{-2})' &= -2x'^{-3}x'',\\
(x'^{-2})'' &= 3!\,x'^{-4}x''^2 - 2x'^{-3}x''',\\
(x'^{-2})''' &= -4!\,x'^{-5}x''^3 + 3!\,3x'^{-4}x''x''' - 2x'^{-3}x^{IV},\\
(x'^{-2})^{IV} &= 5!\,x'^{-6}x''^4 - 4!\,6x'^{-5}x''^2x''' + 3!\,3x'^{-4}x'''^2 + 3!\,4x'^{-4}x''x^{IV} - 2x'^{-3}x^{V},\\
(x'^{-2})^{(p)} &= \sum k_\nu \frac{(x'')^{\nu_2}(x''')^{\nu_3}\ldots(x^{(p+1)})^{\nu_{p+1}}}{(x')^{\nu_1}}.
\end{aligned}$$

Die Summe ist, wie aus der Betrachtung der vier ersten Ableitungen von x'^{-2} hervorgeht, zu bilden für alle ganzzahligen Werthsysteme ν, für welche die Gleichungen bestehen:

$$(5.)\qquad \begin{cases} \nu_2 + \nu_3 + \cdots + \nu_{p+1} - \nu_1 = -2, \\ 2\nu_2 + 3\nu_3 + \cdots + (p+1)\nu_{p+1} - \nu_1 = p-2. \end{cases}$$

Das allgemeine Glied in dem Ausdrucke für $\zeta^{(r)}x^{-1}$ hat die Gestalt:

$$M = \binom{r-1}{p} B^{(r-p-1)}(x'^{-2})^{(p)} = \binom{r-1}{p} B^{(r-p-1)} \sum k_\nu \frac{(x'')^{\nu_2}(x''')^{\nu_3}\ldots(x^{(p+1)})^{\nu_{p+1}}}{(x')^{\nu_1}}.$$

Jeder einzelne Summand M_ϱ hat die Form $\frac{0}{0}$.

$$M_\varrho = c_\varrho B^{(r-p-1)} \frac{(x'')^{\nu_2}(x''')^{\nu_3}\ldots(x^{(p+1)})^{\nu_{p+1}}}{(x')^{\nu_1}}.$$

Die erste nicht verschwindende Ableitung

von	x'	ist	von	der	Ordnung	n,
-	x''	-	-	-	-	$n-1$,
-	x'''	-	-	-	-	$n-2$,
	⋮					⋮
-	$x^{(p+1)}$	-	-	-	-	$n-p$,
-	$B^{(r-p-1)}$	-	-	-	-	$\geqq 2n+p$.

Aus Satz III folgt, dass die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung des Zählers von M_ϱ grösser ist oder gleich

$$(n-1)\nu_2+(n-2)\nu_3+\cdots+(n-p)\nu_{p+1}+2n+p.$$

Multiplicirt man die erste der beiden Gleichungen (5.) mit $n+1$ und subtrahirt von ihr die zweite, so erhält man

$$(n-1)\nu_2+(n-2)\nu_3+\cdots+(n-p)\nu_{p+1}-n\nu_1 = -2n-p.$$

Die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung des Zählers von M_ϱ ist also grösser oder gleich $n\nu_1$, je nachdem $B^{(2n+r-1)}$ verschwindet oder nicht. Die erste nicht verschwindende Ableitung des Nenners ist die $n\nu_1$-te, der Grenzwerth von M_ϱ ist also endlich und zwar gleich Null oder von Null verschieden, je nachdem die $(2n+r-1)$-te Ableitung von B gleich Null ist oder nicht. Um den Grenzwerth von M_ϱ zu finden, muss man von Zähler und Nenner die $n\nu_1$-te Ableitung bilden. Es wird offenbar im Zähler sowohl, als im Nenner nur ein Glied übrig bleiben, welches von Null verschieden ist, und man erhält, wenn C_ϱ einen numerischen Factor bedeutet:

$$M_\varrho = C_\varrho B^{(2n+r-1)} \frac{(x^{(n+1)})^{\nu_2}(x^{(n+1)})^{\nu_3}\ldots(x^{(n+1)})^{\nu_{p+1}}}{(x^{(n+1)})^{\nu_1}}$$

$$= C_\varrho B^{(2n+r-1)}(x^{(n+1)})^{\nu_2+\nu_3+\cdots+\nu_{p+1}-\nu_1}.$$

Nach der ersten der beiden Gleichungen (5.) ist

$$\nu_2+\nu_3+\cdots+\nu_{p+1}-\nu_1 = -2,$$

folglich

$$M_\varrho = C_\varrho \frac{B^{(2n+r-1)}}{(x^{(n+1)})^2}.$$

Der Ausdruck $\zeta^{(r)}x^{-1}$ ist eine Summe von lauter solchen Gliedern, also, wenn man durch K_r einen numerischen Coefficienten bezeichnet:

$$\frac{\zeta^{(r)}}{x} = K_r \frac{B^{(2n+r-1)}}{(x^{(n+1)})^2}.$$

Ist K_r von Null verschieden, was nachträglich bewiesen werden soll, so erhalten wir in der That unsere Behauptung, dass $\zeta^{(r)}$ gleich Null oder von Null verschieden ist, je nachdem $B^{(2n+r-1)}$ verschwindet oder nicht.

Es sind also für das Bestehen der Relationen

$$\zeta' = \zeta'' = \cdots = \zeta^{(r)} = 0, \quad \zeta^{(r+1)} \gtrless 0$$

unter der Voraussetzung, dass die n ersten Ableitungen von x, y, z verschwinden, die $(n+1)$-ten dagegen nicht mehr, die folgenden Bedingungen nothwendig und hinreichend:

$$B = B' = \cdots = B^{(2n+r-1)} = 0, \quad B^{(2n+r)} \gtrless 0,$$

und umgekehrt.

Es war gefunden worden, dass eine Curve dann und nur dann in einem Punkte eine Rückkehrtangente besitzt, wenn der Durchschnittspunkt $(\eta\zeta)$ der Tangente mit einer beliebigen Ebene E ein Rückkehrpunkt ist. Der Punkt $(\eta\zeta)$ ist dann und nur dann ein Rückkehrpunkt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\zeta' = \zeta'' = \cdots = \zeta^{(2\gamma-1)} = 0, \quad \zeta^{(2\gamma)} \gtrless 0.$$

Das ist, wie eben gezeigt worden ist, nur möglich und immer der Fall, wenn

$$B = B' = \cdots = B^{(2n+2\gamma-2)} = 0, \quad B^{(2n+2\gamma-1)} \gtrless 0.$$

Ebenso findet man noch die folgenden beiden Bedingungen:

$$C = C' = \cdots = C^{(2n+2\gamma-2)} = 0, \quad C^{(2n+2\gamma-1)} \gtrless 0,$$
$$A = A' = \cdots = A^{(2n+2\gamma-2)} = 0, \quad A^{(2n+2\gamma-1)} \gtrless 0.$$

Wir haben durch diese Betrachtungen genau dasselbe Kriterium für das Auftreten einer Rückkehrtangente erhalten wie früher S. 66.

§ 12.

Wir hatten bei unseren Betrachtungen angenommen, dass der Coefficient K_r in dem Ausdrucke

$$\frac{\zeta^{(r)}}{x} = K_r \frac{B^{(2n+r-1)}}{(x^{(n+1)})^2} \tag{6.}$$

von Null verschieden ist, was wir jetzt noch beweisen müssen. Der Ausdruck (6.) ist der Grenzwerth von

$$\frac{\zeta^{(r)}}{x} = B^{(r-1)}x'^{-2} + (r-1)B^{(r-2)}(x'^{-2})' + \cdots + B(x'^{-2})^{(r-1)}.$$

Hierbei sind von x, y, z und B nur die folgenden Eigenschaften benutzt worden:

$$(7.)\qquad \begin{cases} x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, & x^{(n+1)} \gtrless 0, \\ y' = y'' = \cdots = y^{(n)} = 0, & y^{(n+1)} \gtrless 0, \\ z' = z'' = \cdots = z^{(n)} = 0, & z^{(n+1)} \gtrless 0, \end{cases}$$

$$(8.)\qquad B = B' = \cdots = B^{(2n+r-2)} = 0.$$

Der Factor K_r ist constant und aus Grössen, die nur von r und n abhängen, zusammengesetzt. Für eine andere Curve, deren Punkte durch die Coordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ gegeben sein mögen, ist $\bar{B} = \bar{z}'\bar{x}'' - \bar{z}''\bar{x}'$. Genügen $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ und $\bar{B}$ den Bedingungen (7.) und (8.), so erhalten wir offenbar in dem Ausdrucke $\bar{\zeta}^{(r)}\bar{x}^{-1}$ denselben Factor K_r, wie bei der ursprünglichen Curve, da K_r nur von r und n abhängt. Um K_r zu berechnen, können wir also von einer speciellen Curve ausgehen, die für irgend einen Werth des Parameters t den Gleichungen (7.) und (8.) genügt, etwa von der Curve

$$(9.)\qquad \begin{cases} x = t^{n+1}, \\ y = t^{n+1}(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots), \\ z = t^{n+1}(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots). \end{cases}$$

Die Ableitungen von x sind

$$\begin{aligned} x' &= (n+1)t^n, \\ x'' &= (n+1)nt^{n-1}, \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ x^{(p)} &= (n+1)n(n-1)\ldots(n+2-p)t^{n+1-p}, \\ &\vdots \\ x^{(n)} &= (n+1)n(n-1)\ldots 3.2t, \\ x^{(n+1)} &= (n+1)n(n-1)\ldots 1. \end{aligned}$$

Die Coordinaten x, y, z genügen für den Parameterwerth $t = 0$ den Bedingungen (7.). Man muss noch zeigen, dass auch B die Bedingung (8.) erfüllt.

$$\begin{aligned} B &= z'x'' - z''x' \\ &= (n+1)nt^{2n-1}((n+1)c_0 + (n+2)c_1 t + (n+3)c_2 t^2 + \cdots) \\ &\quad -(n+1)t^{2n-1}((n+1)nc_0 + (n+2)(n+1)c_1 t + (n+3)(n+2)c_2 t^2 + \cdots) \\ &= -(n+1)t^{2n}((n+2)c_1 + 2(n+3)c_2 t + \cdots). \end{aligned}$$

Die ersten $2n-1$ Ableitungen von B verschwinden für $t=0$ sicher; ist $c_1=0$, so ist auch $B^{(2n)}=0$, ebenso folgt aus $c_2=0$ das Verschwinden von $B^{(2n+1)}$ u. s. f. Soll $B=B'=\cdots=B^{(2n+r-2)}=0$ sein, so müssen in dem Ausdrucke für z die Coefficienten $c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}$ verschwinden. Es genügt also B der Bedingung (8.); wir können zur Berechnung von K_r von der Curve (9.) ausgehen.

Aus $x'=(n+1)t^n$ folgt:

$$\begin{aligned}
x'^{-2} &= \frac{1}{(n+1)^2 t^{2n}},\\
(x'^{-2})' &= \frac{-2n}{(n+1)^2 t^{2n+1}},\\
(x'^{-2})'' &= \frac{2n(2n+1)}{(n+1)^2 t^{2n+2}},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
(x'^{-2})^{(p)} &= \frac{(-1)^p 2n(2n+1)\ldots(2n+p-1)}{(n+1)^2 t^{2n+p}}.
\end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck für $\zeta^{(r)}x^{-1}$ ein, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta^{(r)}}{x} = \frac{1}{(n+1)^2}\Big\{&\frac{B^{(r-1)}}{t^{2n}} - (r-1)2n\frac{B^{(r-2)}}{t^{2n+1}} + \frac{(r-1)(r-2)}{1.2}2n(2n+1)\frac{B^{(r-3)}}{t^{2n+2}} + \cdots\\
&\cdots + (-1)^p\frac{(r-1)(r-2)\ldots(r-p)}{1.2\ldots p}2n(2n+1)\ldots(2n+p-1)\frac{B^{(r-p-1)}}{t^{2n+p}} + \cdots\\
&\cdots + (-1)^{r-1}2n(2n+1)\ldots(2n+r-2)\frac{B}{t^{2n+r-1}}\Big\}.
\end{aligned}$$

Gehen wir zum Grenzfall $t=0$ über.

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta^{(r)}}{x} &= \frac{B^{(2n+r-1)}}{(n+1)^2}\Big\{\frac{1}{(2n)!} - (r-1)\frac{2n}{(2n+1)!} + \frac{(r-1)(r-2)}{1.2}\cdot\frac{2n(2n+1)}{(2n+2)!} + \cdots\\
&\qquad \cdots + (-1)^p\frac{(r-1)(r-2)\ldots(r-p)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{2n(2n+1)\ldots(2n+p-1)}{(2n+p)!} + \cdots\\
&\qquad \cdots + (-1)^{r-1}\frac{2n(2n+1)\ldots(2n+r-2)}{(2n+r-1)!}\Big\}\\
&= \frac{B^{(2n+r-1)}}{(n+1)^2(2n-1)!}\Big\{\frac{1}{2n} - \frac{r-1}{2n+1} + \frac{(r-1)(r-2)}{1.2}\cdot\frac{1}{2n+2} + \cdots\\
&\qquad \cdots + (-1)^p\frac{(r-1)(r-2)\ldots(r-p)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{1}{2n+p} + \cdots + (-1)^{r-1}\cdot\frac{1}{2n+r-1}\Big\}.
\end{aligned}$$

Bilden wir den Klammerausdruck für $r=2$ und $r=3$.

$$r=2: \quad \frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2n(2n+1)},$$

$$r=3: \quad \frac{1}{2n}-\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}=\frac{1.2}{2n(2n+1)(2n+2)}.$$

Durch den Schluss von $r-1$ auf r lässt sich beweisen, dass überhaupt

$$(10.) \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2n}-\frac{r-1}{2n+1}+\frac{(r-1)(r-2)}{1.2}\cdot\frac{1}{2n+2}+\cdots+(-1)^p\frac{(r-1)(r-2)\ldots(r-p)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{1}{2n+p}+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+(-1)^{r-1}\frac{1}{2n+r-1} = \frac{(r-1)!}{2n(2n+1)\ldots(2n+r-1)}. \end{array}\right.$$

Es sei gefunden, dass

$$(11.) \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2n}-\frac{r-2}{2n+1}+\frac{(r-2)(r-3)}{1.2}\cdot\frac{1}{2n+2}+\cdots+(-1)^p\frac{(r-2)(r-3)\ldots(r-p-1)}{1.2\ldots p}\cdot\frac{1}{2n+p}+\cdots \\ \qquad\qquad \cdots+(-1)^{r-2}\frac{1}{2n+r-2} = \frac{(r-2)!}{2n(2n+1)\ldots(2n+r-2)} \end{array}\right.$$

ist, wie wir es für $r-1=2$ und $r-1=3$ gezeigt haben.

Subtrahirt man die Gleichung (10.) von der Gleichung (11.) so erhält man:

$$(12.) \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2n+1}-\frac{r-2}{2n+2}+\frac{(r-2)(r-3)}{1.2}\cdot\frac{1}{2n+3}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{(r-2)(r-3)\ldots(r-p)}{1.2\ldots(p-1)}\cdot\frac{1}{2n+p}+\cdots \\ \qquad \cdots+(-1)^{r-3}\frac{r-2}{2n+r-2}+(-1)^{r-2}\cdot\frac{1}{2n+r-1} = \frac{(r-2)!}{(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+r-1)}. \end{array}\right.$$

Die Gleichung (12.) hat genau die Gestalt der Gleichung (11.), nur dass $2n+1$ statt $2n$ gesetzt ist. Da die Gleichung (11.) für jedes beliebige n gilt, so besteht die Gleichung (12.), folglich auch die Gleichung (10.).

Man kann also in unserem Specialfall setzen:

$$\frac{\zeta^{(r)}}{x} = \frac{B^{(2n+r-1)}(r-1)!}{(n+1)^2(2n+r-1)!}.$$

Da $x^{(n+1)}=(n+1)!$ ist, so ist im allgemeinen Falle

$$\frac{\zeta^{(r)}}{x} = \frac{(r-1)!\,(n!)^2}{(2n+r-1)!}\cdot\frac{B^{(2n+r-1)}}{(x^{(n+1)})^2}.$$

$$K_r = \frac{(r-1)!\,(n!)^2}{(2n+r-1)!}.$$

K_r ist von Null verschieden, die von uns aufgestellte Bedingung für das Auftreten einer Rückkehrtangente ist in der That nothwendig und hinreichend.

Setzen wir $r = 1$, so erhalten wir

$$K_1 = \frac{1.2 \ldots n}{(n+1)(n+2) \ldots 2n}.$$

Für $r = 2$ wird

$$K_2 = \frac{1.2 \ldots n}{(n+1)(n+2) \ldots (2n+1)},$$

was genau mit den S. 69 und S. 70 gefundenen Ausdrücken übereinstimmt.

IV.

Rückkehr- oder stationäre Schmiegungsebene.

§ 13.

Aus der in der Einleitung gegebenen Definition des Drehungssinnes der Schmiegungsebene folgt unabhängig von Tangenten- und Punktsingularitäten: Kehrt die Schmiegungsebene in einem Punkte der Curve den Sinn ihrer Drehung um die Tangente um, so ändert auch der Durchschnittspunkt der Schmiegungsebene mit einer beliebigen festen Geraden, welche zur Curve keine besonders ausgezeichnete Lage hat, seine Fortgangsrichtung auf dieser Geraden und umgekehrt. Die Gleichung der Schmiegungsebene ist:

$$(\xi - x)A + (\eta - y)B + (\zeta - z)C = 0.$$

Die feste Gerade sei die x-Axe. Den Durchschnittspunkt der Schmiegungsebene mit der x-Axe erhält man, wenn man in der Gleichung der Schmiegungsebene $\eta = \zeta = 0$ setzt:

$$\xi = \frac{Ax + By + Cz}{A}.$$

Soll der Punkt $(\xi, 0, 0)$ seine Fortgangsrichtung auf der x-Axe umkehren, so muss $\xi' = 0$ sein.

$$\xi' = \frac{y(AB' - A'B) - z(CA' - C'A)}{A^2}.$$

Führt man wieder die Bezeichnung ein:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

so kann man schreiben

$$(AB'-A'B)\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} Ax'+By'+Cz' & A'x'+B'y'+C'z' & z' \\ Ax''+By''+Cz'' & A'x''+B'y''+C'z'' & z'' \\ Ax'''+By'''+Cz''' & A'x'''+B'y'''+C'z''' & z''' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & z' \\ 0 & -\Delta & z'' \\ \Delta & 0 & z''' \end{vmatrix} = z'\Delta^2.$$

$$AB'-A'B = z'\Delta.$$

Ebenso findet man

$$CA'-C'A = y'\Delta.$$

Der Ausdruck für ξ' geht in den folgenden über:

$$\xi' = \frac{(yz'-y'z)\Delta}{A^2}.$$

Soll der Punkt $(\xi, 0, 0)$ seine Fortgangsrichtung umkehren, so muss ξ' sein Zeichen wechseln. Da der Nenner A^2 sein Zeichen nicht umkehren kann, so tritt das dann und nur dann ein, wenn der eine der beiden Factoren im Zähler sein Zeichen umkehrt. Der erste Factor $yz'-y'z$ kehrt sein Zeichen um, wenn y' und z' ihr Zeichen wechseln, denn von y und z kann man absehen, da dieselben nur von der Lage der Coordinatenaxen abhängen. Je nachdem y' und z' ihr Zeichen umkehren oder beibehalten, ist der Punkt der Curve ein Rückkehrpunkt oder nicht. Im ersten Falle muss also Δ sein Zeichen behalten, im zweiten dagegen umkehren.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Schmiegungsebene in einem Punkte der Curve ihren Drehungssinn umkehrt, wird, wenn der Punkt kein Rückkehrpunkt ist, durch die folgenden Relationen gegeben:

$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(2\gamma)} = 0, \quad \Delta^{(2\gamma+1)} \gtrless 0.$$

Ist der Punkt der Curve dagegen ein Rückkehrpunkt, so sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine Rückkehrschmiegungsebene die folgenden:

$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(2\gamma+1)} = 0, \quad \Delta^{(2\gamma+2)} \gtrless 0,$$

wo γ eine positive ganze Zahl oder Null ist.

§ 14.

Wir können auch hier, wie bei der Rückkehrtangente dieses Resultat verificiren, indem wir genau untersuchen, wieviel Ableitungen von Δ verschwinden müssen, wenn eine gewisse Anzahl der ersten auf einander folgenden Ableitungen von ξ gleich Null ist.

Es seien für den zu untersuchenden Punkt folgende Relationen erfüllt:

$$(1.)\quad \begin{cases} x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, & x^{(n+1)} \gtrless 0, \\ y' = y'' = \cdots = y^{(n)} = 0, & y^{(n+1)} \gtrless 0, \\ z' = z'' = \cdots = z^{(n)} = 0, & z^{(n+1)} \gtrless 0; \end{cases}$$

$$(2.)\quad \begin{cases} A = A' = \cdots = A^{(m)} = 0, & A^{(m+1)} \gtrless 0, \\ B = B' = \cdots = B^{(m)} = 0, & B^{(m+1)} \gtrless 0, \\ C = C' = \cdots = C^{(m)} = 0, & C^{(m+1)} \gtrless 0. \end{cases}$$

Der Ausdruck $\xi' = \Delta(yz'-y'z)A^{-2}$ nimmt dann die Form $\frac{0}{0}$ an.

Setzen wir

$$\Delta(yz'-y'z) = l,$$

so nimmt ξ' die folgende Gestalt an:

$$\xi' = lA^{-2}.$$

Durch diese Substitution haben wir erreicht, dass der zu untersuchende Ausdruck in genau derselben Art und Weise aus l und A zusammengesetzt ist, wie der Ausdruck, den wir bei der Aufstellung des Kriteriums für eine Rückkehrtangente untersucht haben, aus B und x':

$$\frac{\zeta'}{x} = Bx'^{-2}.$$

Ueber die Grössen l und A einerseits und B und x' andererseits wird vorausgesetzt, dass sie nebst einer gewissen Anzahl von auf einander folgenden Ableitungen verschwinden. In dem Ausdruck für ζ' war die erste nicht verschwindende Ableitung des Zählers B von derselben oder höherer Ordnung wie die erste nicht verschwindende Ableitung des Nenners x'^2. Für den Ausdruck $\xi' = lA^{-2}$ ist diese Bedingung ebenfalls erfüllt. Die erste nicht verschwindende Ableitung des Nenners A^2 ist von der Ordnung $2m+2$. Aus $l = \Delta(yz'-y'z)$ sehen wir, da nach Satz II die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung von Δ wegen der Bedingungen (1.) und (2.) grösser ist oder gleich $2m-n+2$, die von $yz'-y'z$ aber gleich n,

dass die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung von l grösser ist oder gleich $2m+2$. Die $n$te Ableitung von $yz'-y'z$ reducirt sich auf $yz^{(n+1)}-y^{(n+1)}z$, welcher Ausdruck nur in einem speciellen Coordinatensystem verschwinden könnte. Also auch für ξ' ist die Bedingung erfüllt, dass die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung des Zählers grösser ist oder höchstens gleich der Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung des Nenners.

Bei der Rückkehrtangente kam es darauf an, unter den eben genannten Voraussetzungen zu finden, wieviele Ableitungen von B verschwinden, wenn die ersten r Ableitungen von ζ gleich Null sind. Jetzt müssen wir feststellen, wieviel Ableitungen von l verschwinden, wenn die ersten r Ableitungen von ξ gleich Null sind. Bei der Aufstellung des Kriteriums für eine Rückkehrtangente fanden wir daraus, dass die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung von x'^2 gleich $2n$ war, für

$$\zeta' = \zeta'' = \cdots = \zeta^{(r)} = 0, \quad \zeta^{(r+1)} \gtrless 0$$

die folgende Relation als nothwendige und hinreichende Bedingung:

$$B = B' = \cdots = B^{(2n+r-1)} = 0, \quad B^{(2n+r)} \gtrless 0.$$

In unserem Falle ist die erste nicht verschwindende Ableitung des Nenners A^2 in dem Ausdrucke für ξ' von der Ordnung $2m+2$, die nothwendige und hinreichende Bedingung für

$$\xi' = \xi'' = \cdots = \xi^{(r)} = 0, \quad \xi^{(r+1)} \gtrless 0$$

ist also analog dem Vorigen:

$$(3.) \qquad l = l' = \cdots = l^{(2m+r+1)} = 0, \quad l^{(2m+r+2)} \gtrless 0.$$

Es fragt sich noch, wann die Relationen (3.) erfüllt sind. Es war mit l der folgende Ausdruck bezeichnet worden:

$$l = \Delta b, \quad b = yz'-y'z.$$

Eine beliebige, etwa die νte Ableitung von l hat die nachstehende Gestalt:

$$l^{(\nu)} = \Delta^{(\nu)} b + \nu \Delta^{(\nu-1)} b' + \cdots + \Delta b^{(\nu)}.$$

Wegen der Bedingungen (1.) und (2.) bestehen die Gleichungen

$$b = b' = \cdots = b^{(n-1)} = 0, \quad b^{(n)} \gtrless 0,$$

$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(2m-n+1)} = 0,$$

folglich auch

$$l = l' = \cdots = l^{(2m+1)} = 0.$$

Die $(2m+2)$-te Ableitung von l reducirt sich auf ein einziges Glied:

$$l^{(2m+2)} = k \Delta^{(2m-n+2)} b^{(n)},$$

wo k ein Binomialcoefficient ist. Ist $l^{(2m+2)} = 0$, so muss $\Delta^{(2m-n+2)} = 0$ sein und es ist

$$l^{(2m+3)} = k_1 \Delta^{(2m-n+3)} b^{(n)}.$$

Für $l^{(2m+3)} = 0$ erhält man $\Delta^{(2m-n+3)} = 0$. So fortfahrend findet man, dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen der Relationen (3.) die folgenden sind:

$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(2m-n+r+1)} = 0, \quad \Delta^{(2m-n+r+2)} \gtrless 0.$$

Im Falle einer Rückkehrebene der Curve muss r eine ungerade Zahl sein, da dann der Punkt $(\xi, 0, 0)$ auf der x-Axe ein Rückkehrpunkt ist. Es ist dann die letzte verschwindende Ableitung von Δ von gerader oder ungerader Ordnung, je nachdem n gerade oder ungerade, d. h. je nachdem der Punkt der Curve kein Rückkehrpunkt oder ein Rückkehrpunkt ist. Wir haben, wie es ja auch sein musste, unsere schon auf Seite 78 ausgesprochene Bedingung für das Auftreten einer Rückkehrschmiegungsebene gefunden.

§ 15.

Da, wie wir in § 2 gesehen haben, in einem allgemeinen Coordinatensystem die ersten nicht verschwindenden Ableitungen von x, y, z einerseits und A, B, C andererseits alle von der resp. gleichen Ordnung sind, so sei von jetzt an durch das Ansetzen der Gleichungen

$$x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, \quad x^{(n+1)} \gtrless 0, \quad A = A' = \cdots = A^{(m)} = 0, \quad A^{(m+1)} \gtrless 0$$

auch das Bestehen der entsprechenden Relationen in y, z und B, C ausgedrückt:

$$y' = y'' = \cdots = y^{(n)} = 0, \quad y^{(n+1)} \gtrless 0, \quad B = B' = \cdots = B^{(m)} = 0, \quad B^{(m+1)} \gtrless 0,$$
$$z' = z'' = \cdots = z^{(n)} = 0, \quad z^{(n+1)} \gtrless 0, \quad C = C' = \cdots = C^{(m)} = 0, \quad C^{(m+1)} \gtrless 0.$$

Wir können dann, wenn α, β, γ irgend welche positive ganze Zahlen oder Null sind, die acht Arten von singulären Punkten durch die folgenden Gleichungen definiren (cf. S. 52):

I. $+++$.
$$x' = x'' = \cdots = x^{(2\alpha)} = 0, \quad x^{(2\alpha+1)} \gtrless 0,$$
$$A = A' = \cdots = A^{(2\beta-1)} = 0, \quad A^{(2\beta)} \gtrless 0,$$
$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(2\gamma-1)} = 0, \quad \Delta^{(2\gamma)} \gtrless 0.$$

II. $++-$.
$$x' = x'' = \cdots = x^{(2\alpha)} = 0, \quad x^{(2\alpha+1)} \gtrless 0,$$
$$A = A' = \cdots = A^{(2\beta-1)} = 0, \quad A^{(2\beta)} \gtrless 0,$$
$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(2\gamma)} = 0, \quad \Delta^{(2\gamma+1)} \gtrless 0.$$

III. $+-+$.
$$x' = x'' = \cdots = x^{(2\alpha)} = 0, \quad x^{(2\alpha+1)} \gtrless 0,$$
$$A = A' = \cdots = A^{(2\beta)} = 0, \quad A^{(2\beta+1)} \gtrless 0,$$
$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(2\gamma-1)} = 0, \quad \Delta^{(2\gamma)} \gtrless 0.$$

IV. $+--$.
$$x' = x'' = \cdots = x^{(2\alpha)} = 0, \quad x^{(2\alpha+1)} \gtrless 0,$$
$$A = A' = \cdots = A^{(2\beta)} = 0, \quad A^{(2\beta+1)} \gtrless 0,$$
$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(2\gamma)} = 0, \quad \Delta^{(2\gamma+1)} \gtrless 0.$$

V. $-++$.
$$x' = x'' = \cdots = x^{(2\alpha-1)} = 0, \quad x^{(2\alpha)} \gtrless 0,$$
$$A = A' = \cdots = A^{(2\beta-1)} = 0, \quad A^{(2\beta)} \gtrless 0,$$
$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(2\gamma)} = 0, \quad \Delta^{(2\gamma+1)} \gtrless 0.$$

VI. $-+-$.
$$x' = x'' = \cdots = x^{(2\alpha-1)} = 0, \quad x^{(2\alpha)} \gtrless 0,$$
$$A = A' = \cdots = A^{(2\beta-1)} = 0, \quad A^{(2\beta)} \gtrless 0,$$
$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(2\gamma-1)} = 0, \quad \Delta^{(2\gamma)} \gtrless 0.$$

VII. $--+$.
$$x' = x'' = \cdots = x^{(2\alpha-1)} = 0, \quad x^{(2\alpha)} \gtrless 0,$$
$$A = A' = \cdots = A^{(2\beta)} = 0, \quad A^{(2\beta+1)} \gtrless 0,$$
$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(2\gamma)} = 0, \quad \Delta^{(2\gamma+1)} \gtrless 0.$$

VIII. $---$.
$$x' = x'' = \cdots = x^{(2\alpha-1)} = 0, \quad x^{(2\alpha)} \gtrless 0,$$
$$A = A' = \cdots = A^{(2\beta)} = 0, \quad A^{(2\beta+1)} \gtrless 0,$$
$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(2\gamma-1)} = 0, \quad \Delta^{(2\gamma)} \gtrless 0.$$

Wird die Art eines Punktes durch die folgenden Bedingungen definirt:

$$x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, \quad x^{(n+1)} \gtrless 0,$$
$$A = A' = \cdots = A^{(m)} = 0, \quad A^{(m+1)} \gtrless 0,$$
$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(p)} = 0, \quad \Delta^{(p+1)} \gtrless 0,$$

so bestehen zwischen n, m, p nach Satz II die nachstehenden Relationen:

$$m \gtrless 2n-1,$$
$$p \gtrless 2m-n+1.^{*})$$

§ 16.

Es könnte noch die Frage aufgeworfen werden, ob die Singularität des Punktes dieselbe bleibt bei Einführung eines anderen Parameters τ.

(4.) $$t = a\tau^{\alpha} + b\tau^{\alpha+1} + c\tau^{\alpha+2} + \cdots.$$

Die Ableitungen der Coordinaten nach diesem Parameter τ drücken

*) Während des Druckes der vorliegenden Arbeit ist von ***Staude*** unter dem Titel: „Ueber den Sinn der Windung in den singulären Punkten einer Raumcurve“ (American Journal of Mathematics, Vol. XVII) erschienen, in der die Kriterien für diejenigen Singularitäten aufgestellt werden, bei denen nach meiner Bezeichnungsweise α, β, γ ihre kleinsten möglichen Werthe haben. Durch diese Arbeit von ***Staude*** bin ich auch erst auf eine Untersuchung von ***Fine*** aufmerksam geworden, die in derselben Zeitschrift (Vol. VIII) unter der Ueberschrift „On the Singularities of Curves of Double Curvature“ veröffentlicht worden ist; in derselben werden für die ***Staudt-Wiener***schen Singularitäten mit Hülfe der ***Grassmann***schen Methoden analytische Kriterien hergeleitet.

sich dann durch die Ableitungen nach t, die wir wieder durch Accente bezeichnen, in folgender Weise aus:

$$\frac{dx}{d\tau} = x' \frac{dt}{d\tau},$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = x' \frac{d^2t}{d\tau^2} + x'' \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2,$$

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} = x' \frac{d^3t}{d\tau^3} + 3x'' \frac{dt}{d\tau} \cdot \frac{d^2t}{d\tau^2} + x''' \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^3.$$

Aus diesen Entwickelungen ist ersichtlich, dass, wenn wir den Punkt $t = 0$ betrachten wollen, in der Reihe (4.) für t niemals eine gebrochene Potenz von τ vorkommen darf, denn dann würden die Ableitungen der Coordinaten von einer niedrigeren Ordnung an unendlich gross werden, als es nach den in den letzten Abschnitten durchgeführten Untersuchungen sein darf. Es ist also α immer eine ganze Zahl und zwar muss es eine positive ganze Zahl sein, wenn, wie wir annehmen, t und τ für denselben Punkt der Curve verschwinden.

Bezeichnet man die unter Zugrundelegung des Parameters τ gebildeten Ausdrücke A und Δ durch Ueberstreichen, so ist

$$\overline{A} = \begin{vmatrix} y' \frac{dt}{d\tau} & z' \frac{dt}{d\tau} \\ y' \frac{d^2t}{d\tau^2} + y'' \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 & z' \frac{d^2t}{d\tau^2} + z'' \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \end{vmatrix},$$

$$\overline{A} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^3 A, \qquad \overline{\Delta} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^6 \Delta.$$

Ist die Singularität eines Punktes durch die folgenden Bedingungen definirt:

$$x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, \quad x^{(n+1)} \gtrless 0,$$

$$A = A' = \cdots = A^{(m)} = 0, \quad A^{(m+1)} \gtrless 0,$$

$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(p)} = 0, \quad \Delta^{(p+1)} \gtrless 0,$$

so haben die Coordinaten, sowie A, B, C und Δ, wenn dieser Punkt dem Parameter $t = 0$ entspricht, die folgende Gestalt:

$$x = a_0 + a_1 t^{n+1} + a_2 t^{n+2} + \cdots,$$

$$A = b_1 t^{m+1} + b_2 t^{m+2} + \cdots,$$

$$\Delta = c_1 t^{p+1} + c_2 t^{p+2} + \cdots,$$

wo a_1, b_1, c_1 von Null verschieden sind. Führen wir den Parameter τ nach der Gleichung (4.) ein, so erhalten wir

$$\frac{dt}{d\tau} = a\alpha\tau^{\alpha-1} + b(\alpha+1)\tau^{\alpha} + \cdots, \qquad x = a_0 + \tau^{(n+1)} (\overline{a}_1 + \tau(\cdots)),$$

$$\overline{A} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^3 A = (a\alpha\tau^{\alpha-1} + b(\alpha+1)\tau^{\alpha} + \cdots)^3 \tau^{(m+1)\alpha}(b_1 a^{m+1} + \tau(\cdots))$$
$$= \tau^{(m+4)\alpha-3}(\overline{b}_1 + \tau(\cdots)),$$
$$\overline{\Delta} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^6 \Delta = (a\alpha\tau^{\alpha-1} + b(\alpha+1)\tau^{\alpha} + \cdots)^6 \tau^{(p+1)\alpha}(c_1 a^{p+1} + \tau(\cdots))$$
$$= \tau^{(p+7)\alpha-6}(\overline{c}_1 + \tau(\cdots)),$$

wo $\overline{a}_1$, $\overline{b}_1$, $\overline{c}_1$ von Null verschieden sind. Bezeichnet man mit $\overline{n}$, $\overline{m}$, $\overline{p}$ die Ordnungen der letzten verschwindenden Ableitungen von x, $\overline{A}$ und $\overline{\Delta}$ nach τ, so ist offenbar

$$\overline{n} = (n+1)\alpha - 1, \quad \overline{m} = (m+4)\alpha - 4, \quad \overline{p} = (p+7)\alpha - 7.$$

Ist α ungerade, so sind die Grössen $\overline{n}$, $\overline{m}$, $\overline{p}$ gerade oder ungerade, je nachdem n, m, p gerade oder ungerade sind; ist dagegen α eine gerade Zahl, so sind $\overline{n}$ und $\overline{p}$ immer ungerade, $\overline{m}$ dagegen immer gerade. Im Falle eines ungeraden α bleibt die Singularität des Punktes ungeändert, ist aber α gerade, so genügt der Punkt immer nur der Singularität VIII $---$.

Dieses letztere erklärt sich folgendermassen. Wir können uns zunächst einen Parameter θ eingeführt denken vermittelst der Gleichung

(5.) $$t = \theta^{\alpha},$$

wo α eine gerade Zahl ist, und darauf erst den Parameter τ durch die Gleichung

(6.) $$\theta = \overline{a}\tau + \overline{b}\tau^2 + \overline{c}\tau^3 + \cdots,$$

wobei man die Coefficienten $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, ... durch die Coefficienten a, b, c, ... der Reihe (4.) ausdrücken kann. Durch die Einführung (6.) des Parameters τ bleibt nach unseren letzten Betrachtungen die Singularität des Punktes dieselbe wie bei Zugrundelegung des Parameters θ, wir brauchen also nur die Einführung von θ durch die Gleichung (5.) zu betrachten. Da α gerade ist, so erhalten wir für negative t keinen reellen Werth von θ, zu jedem positiven Werth von t gehören dagegen zwei dem absoluten Werthe nach gleiche, sich aber durch das Vorzeichen unterscheidende Werthe von θ. Geht θ aus dem Positiven ins Negative über, so nimmt der Parameter t von irgend einem Anfangswerthe bis Null ab und darauf wieder zu, die Curve wird also doppelt durchlaufen und zwar nur bis zu einem gewissen Punkte $t = 0$, und dann von diesem Punkt aus noch einmal in entgegengesetzter Richtung. Bei Einführung des Parameters θ vermittelst der Gleichung (5.) müssen sich in der That, wenn α gerade ist, für $t = 0$ alle Singularitäten auf den Fall VIII reduciren. (Fortsetzung folgt.)

Sur une extension du théorème de *Laurent*.

(Extrait d'une lettre adressée par M. *Ch. Hermite* à M. *L. Fuchs*.)

.... En considérant les racines d'une équation algébrique quelconque, et leurs discontinuités, points critiques ou pôles, j'envisage l'ensemble des circonférences qui ont leurs centres à l'origine et pour rayons les modules de ces discontinuités. Elles décomposent le plan en couronnes circulaires auxquelles succède un espace infini, et les racines sont à l'intérieur de chacune de ces régions, des fonctions finies et continues mais non uniformes. Leurs valeurs s'échangent d'une certaine manière, si l'on fait décrire à la variable un contour fermé comprenant l'une des circonférences limites, et par conséquent des points critiques à son intérieur. La différence de nature avec les fonctions uniformes se manifeste par cette circonstance qu'il est nécessaire de décrire plusieurs fois le même contour pour obtenir au départ et à l'arrivée les mêmes valeurs. Désignons ce nombre par p, pour l'une des racines, représentons la variable par x et posons $\xi = x^{\frac{1}{p}}$. L'image fournie par cette substitution est une courbe fermée, décrite une seule et unique fois au lieu du contour répété p fois successivement. La quantité considérée devient par suite une fonction uniforme de ξ, dans l'espace limité par deux nouvelles circonférences, transformées des précédentes, ayant comme elles leurs centres à l'origine. On peut donc faire l'application du théorème de *Laurent* et en conclure que la racine s'exprime par une série de puissances entières positives et négatives de ξ ou de $x^{\frac{1}{p}}$. Pour le cas où la variable est supposée dans la dernière région, on la considérera comme une couronne circulaire limitée par la circonférence relative à la plus grande des discontinuités et une autre dont on fera croître indéfiniment le rayon. Cette seconde circonférence, lorsqu'il s'agit d'une fonction uniforme $f(x)$, étant prise pour contour de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)dz}{x-z}$, dont se

tire le théorème de ***Laurent,*** conduit à une fonction holomorphe dans son intérieur, et qui devient, en faisant croître le rayon, holomorphe dans tout le plan. Nous en concluons alors comme précédemment les expressions analytiques des racines dans cette région, mais il faut observer, ce qui est le côté imparfait de cette méthode, que les ayant obtenues dans le plan tout entier, on doit exclure de la représentation, les circonférences sur lesquelles se trouvent les points de discontinuités.

Pour donner un exemple dans un cas facile, je vais chercher l'expression de la quantité $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, en supposant

$$|a| < |x| < |b|$$

de sorte que la variable sera dans la couronne limitée par les circonférences de rayon $|a|$ et $|b|$.

Soit pour abréger

$$(m) = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m},$$

nous aurons les deux séries

$$\frac{1}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Sigma \frac{(m)a^m}{x^m},$$

$$\frac{1}{\sqrt{b-x}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \Sigma \frac{(n)x^n}{b^n} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

puis en multipliant membre à membre

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{\sqrt{bx}} \Sigma \frac{(m)(n)a^m}{b^n x^{m-n}}.$$

Soit maintenant $m-n=p$, supposons p positif et différent de zéro, le terme en $\frac{1}{x^p}$ sera donné par la somme

$$\frac{a^p}{x^p} \Sigma \frac{(n)(n+p)a^n}{b^n}$$

qui se rapporte aux valeurs $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Faisant donc

$$S_p = \Sigma \frac{(n)(n+p)a^n}{b^n}$$

nous obtenons pour l'ensemble des termes en $\frac{1}{x}$ la série suivante,

$$\Sigma S_p \frac{a^p}{x^p}$$

où $p = 1, 2, 3, \ldots$. De la même manière se trouve ensuite la seconde série,

$$\Sigma S_p \frac{x^p}{b^p}$$

où entrent les puissances positives de la variable; en écrivant pour simplifier S au lieu de S_0, on en conclut le résultat cherché, à savoir

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{\sqrt{bx}} S + \frac{1}{\sqrt{bx}} \Sigma S_p \left(\frac{a^p}{x^p} + \frac{x^p}{b^p}\right). \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

On peut comme je vais le faire voir le démontrer à postériori. Soit pour cela $a = bk^2$, puis,

$$R(y) = (1-y^2)(1-k^2y^2)$$

j'emploierai la relation suivante

$$\int_0^1 \frac{y^{2p}\,dy}{\sqrt{R(y)}} = \frac{\pi}{2} S_p$$

qui résulte du développement

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2y^2}} = \Sigma(n) k^{2n} y^{2n}$$

et de la formule élémentaire

$$\int_0^1 \frac{y^{2(n+p)}\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2}(n+p).$$

J'observe ensuite que les progressions géométriques $\Sigma\left(\frac{ay^2}{x}\right)^p$ et $\Sigma\left(\frac{xy^2}{b}\right)^p$ ont pour sommes $\frac{ay^2}{x-ay^2}$ et $\frac{xy^2}{b-xy^2}$, on est donc amené à l'égalité

$$S + \Sigma S_p \left(\frac{a^p}{x^p} + \frac{x^p}{b^p}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left[1 + \frac{ay^2}{x-ay^2} + \frac{xy^2}{b-xy^2}\right] \frac{dy}{\sqrt{R(y)}}$$

et à chercher l'intégrale définie qui figure dans le second membre. Je fais à cet effet, $y = \mathrm{sn}\xi$, je pose aussi $\frac{a}{x} = k^2 \sin^2\alpha$, ce qui donne $\frac{x}{b} = k^2 \mathrm{sn}^2(\alpha + iK')$, d'après la condition admise, $a = bk^2$. L'intégrale relative à la nouvelle variable étant représentée par

$$J = \int_0^K \left[1 + \frac{k^2 \mathrm{sn}^2\alpha \mathrm{sn}^2\xi}{1-k^2\mathrm{sn}^2\alpha\mathrm{sn}^2\xi} + \frac{k^2\mathrm{sn}^2(\alpha+iK')\mathrm{sn}^2\xi}{1-k^2\mathrm{sn}^2(\alpha+iK')\mathrm{sn}^2\xi}\right] d\xi$$

s'exprime au moyen des fonctions complètes de 3ième espèce. Multiplions par $\frac{\mathrm{cn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{sn}\alpha}$ et remarquons que cette quantité se reproduit changée de signe, quand on remplace α par $\alpha + iK'$, on aura en effet,

$$\frac{\mathrm{cn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{sn}\alpha} J = \frac{\mathrm{cn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{sn}\alpha} \cdot K + \Pi(K, \alpha) - \Pi(K, \alpha + iK').$$

Cela étant, la formule des Fundamenta

$$\Pi(K, \alpha) = K D_\alpha \log \Theta(\alpha)$$

nous donne

$$\Pi(K,\ \alpha)-\Pi(K,\ \alpha+iK') = KD_\alpha \log\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\alpha+iK')}.$$

En recourant à l'égalité

$$\Theta(\alpha+iK') = iH(\alpha).e^{-\frac{i\pi}{4K}(2\alpha+iK')}$$

on a ensuite

$$D_\alpha \log\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\alpha+iK')} = \frac{i\pi}{2K} - D_\alpha \log\frac{H(\alpha)}{\Theta(\alpha)} = \frac{i\pi}{2K} - \frac{\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha}$$

et une réduction évidente conduit à la valeur cherchée

$$J = \frac{i\pi}{2}\frac{\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha} \quad \text{ou bien} \quad J = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{bx}}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

puisque l'on a $\mathrm{sn}\,\alpha = \sqrt{\frac{b}{x}}$, $\mathrm{cn}\,\alpha = i\sqrt{\frac{b-x}{x}}$ et $\mathrm{dn}\,\alpha = \sqrt{\frac{x-a}{x}}$.

L'expression du radical $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ est d'une autre nature dans les deux régions où l'on suppose $|x|<|a|$ et $|x|>|b|$. En désignant par $P^{(n)}(x)$ le polynôme de *Legendre* du degré n, on obtient alors les séries

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}\sum_{(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)} P_n\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{ab}}\right)^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{ab}}\sum_{(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)} P_n\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{\sqrt{ab}}{x}\right)^n.$$

Une application des résultats que nous venons d'obtenir s'offre d'elle-même à l'intégrale elliptique, en prenant $a=1$, $b=k^2$, et changeant x en x^2; elle est, je crois, à remarquer dans le cas où l'on suppose $1<|x|<\left|\frac{1}{k}\right|$, je l'indiquerai succinctement. Nous avons alors la formule

$$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{x}S + \frac{1}{x}\sum S_p\left(\frac{1}{x^{2p}}+k^{2p}x^{2p}\right) \qquad (p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

et l'on en tire, en désignant par C une constante

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = C + S\log x - \sum\frac{S_p}{2p}\left(\frac{1}{x^{2p}}-k^{2p}x^{2p}\right).$$

Faisons successivement $x=1$ et $x=\frac{1}{k}$, on aura les égalités,

$$0 = C - \sum\frac{S_p}{2p}(1-k^{2p}),$$

$$K' = C + S\log\frac{1}{k} - \sum\frac{S_p}{2p}(k^{2p}-1);$$

en les ajoutant, les séries infinies se détruisent, on obtient

$$K' = 2C + S\log\frac{1}{k}$$

d'où

$$C = S\log\sqrt{k} + \tfrac{1}{2}K'$$

et par conséquent

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = S\log(x\sqrt{k}) + \tfrac{1}{2}K' - \Sigma\frac{S_p}{2p}\left(\frac{1}{x^{2p}} - k^{2p}x^{2p}\right).$$

Employons ensuite l'expression de K' qui a été donnée par *Legendre*, le logarithme de k disparaît dans le second membre, et l'on parvient à la formule suivante:

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = S\log(2x) - \Sigma\frac{S_p}{2p}\left(\frac{1}{x^{2p}} - k^{2p}x^{2p}\right) - \frac{1}{1.2}(S-1) - \frac{1}{3.4}\left(S-1-\frac{1}{2^2}k^2\right) - \cdots$$

où n'entre plus, comme il le faut, que le carré du module.

Ableitung der *Gauss*schen Formel zur Bestimmung des jüdischen Osterfestes.

(Von Herrn *M. Hamburger*.)

Gauss hat im Jahre 1802*) eine Formel für die Berechnung des jüdischen Osterfestes ohne Beweis mitgetheilt. Sie ist dadurch ausgezeichnet, dass ihre Anwendung eine nähere Bekanntschaft mit den Einrichtungen des jüdischen Kalenders nicht voraussetzt. Die Herleitungen, die bisher unseres Wissens von der Formel gegeben worden sind**), entbehren der nöthigen Durchsichtigkeit, welche den leitenden Gedanken des Urhebers der Formel klar hervortreten lässt, und entsprechen in der künstlichen Art, wie sie schliesslich zur Formel gelangen, wenig der Einfachheit und Eleganz, die der Formel eigen ist. Es schien daher der Mühe werth, die Frage von Neuem aufzunehmen. Bei näherer Erforschung ergab sich die Thatsache, dass in dem Intervall von 8 auf einander folgenden Jahren jedesmal 3 Schaltjahre enthalten sind, mit Ausnahme des Intervalles: $19C+9$, $19C+10$, ..., $19C+16$ (für einen beliebigen Werth von C), in welchem nur 2 Schaltjahre enthalten sind. Diese Beobachtung erweist sich als die naturgemässe Grundlage der fraglichen Formel, denn sie führt zu einem zweckmässigen Ausdruck für die Anzahl A der seit dem Anfange der jüdischen Zeitrechnung (der Schöpfung) verflossenen Jahre, woraus dann durch einfache Rechnung die Formel folgt.

Zur Ableitung der *Gauss*schen Regel schicken wir Folgendes voraus. Der Monat des jüdischen Kalenders hat 29 Tage $12\frac{793}{1080}$ Stunden oder

$$\mu = 29\frac{13753}{25920} \text{ Tage.}$$

Die Jahre sind entweder Gemeinjahre von 12 Monaten oder Schaltjahre

*) *Zach*, Monatliche Correspondenz 1802 Mai p. 435. *Gauss*' Werke Bd. VI p. 80.

**) *Gresy*, *Zach*s Correspondance astronomique, Gênes Vol. I 1818. — *Knobloch*, Die wichtigsten Kalender der Gegenwart. Wien.

von 13 Monaten. In einem Cyklus von 19 Jahren sind stets 12 Gemeinjahre und 7 Schaltjahre, und zwar sind die Jahre

$$3,\quad 6,\quad 8,\quad 11,\quad 14,\quad 17,\quad 19$$

des Cyklus Schaltjahre, die übrigen Gemeinjahre. Ein Cyklus von 19 Jahren enthält demnach

(1.) $$(19.12+7)\text{ Monate} = (19.12+7)a\text{ Tage.}$$

Ist also für ein Jahr das Datum des Festes bekannt, so ist das Datum desselben für ein Jahr, welches von dem ersteren um eine Anzahl C von Cyklen differirt,

$$(19.12+7)C\text{ Monate}$$

später, wo C positiv oder negativ sein kann, und eine negative Anzahl eben soviel Monate früher bedeutet.

Nimmt man vom Jahre 16 der Schöpfung beginnend, die folgenden 19 Jahre, indem man um je 8 Jahre fortschreitet:

$$16,\quad 16+8,\quad 16+2.8,\quad \ldots,\quad 16+18.8$$

oder allgemein $16+8a$ ($a = 0, 1, 2, \ldots, 18$) so erhält man, wenn man die Reste betrachtet, die bei der Division dieser Jahre durch 19 übrig bleiben, sämmtliche Jahre eines Cyklus in veränderter Reihenfolge, nämlich:

$a =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11,
Jahre des Cyklus:	16	5	13	2	10	18	7	15	4	12	1	9,
$a =$	12	13	14	15	16	17	18,					
Jahre des Cyklus:	17	6	14	3	11	19	8.					

In dieser Folge sind die ersten 12 Jahre Gemeinjahre, die letzten 7 Jahre Schaltjahre des Cyklus, so dass jedem $a < 12$ *ein Gemeinjahr,* jedem $a > 11$ *ein Schaltjahr* entspricht. Ferner sind in den folgenden 18 Intervallen von je 8 Jahren:

$$17 \text{ bis } 16+8,\quad 16+9 \text{ bis } 16+2.8,\quad \ldots,\quad 16+17.8+1 \text{ bis } 16+18.8$$

jedesmal 3 Schaltjahre und 5 Gemeinjahre enthalten, während in den 16 ersten Jahren 1 bis 16 5 Schaltjahre (3, 6, 8, 11, 14) und 11 Gemeinjahre enthalten sind, es sind also in den $16+8a$ ersten Jahren, wo a auf die Werthe von 0 bis 18 beschränkt ist,

$$5+3a \text{ Schaltjahre und } 11+5a \text{ Gemeinjahre}$$

enthalten.

Bedeutet nun A die Anzahl der Jahre seit der Erschaffung der Welt, also die Jahreszahl der jüdischen Zeitrechnung, so kann man A stets und nur auf *eine* Weise auf die Form

$$A = 16+8a+19C \tag{1.}$$

bringen, wenn a auf die Werthe 0, 1, ..., 18 beschränkt bleibt, während C jeden beliebigen, auch negativen Werth erhalten kann. Multiplicirt man nämlich die Gleichung (1.) mit 12, so erhält man

$$12A = 2+a+19(10+5a+12C)$$

also

$$12A+17 = a+19(11+5a+12C). \tag{2.}$$

Hieraus sieht man, dass a der positive Rest ist, der bei der Division von $12A+17$ durch 19 entsteht, also

$$a = R\cdot\left(\frac{12A+17}{19}\right), \quad R = \text{Rest.}$$

Ist a so eindeutig bestimmt, dann muss $A-16-8a$ durch 19 theilbar sein, und der Quotient ergiebt einen ebenfalls wohlbestimmten Werth von C, der in dem Falle, wo $A < 16+8a$ ist — was nur in den Jahren von 0 bis 160 vorkommen kann — negativ ausfallen wird. Aus (2.) folgt noch

$$11+5a+12C = \frac{12A+17-a}{19}. \tag{3.}$$

Aus der Form (1.) für A

$$A = 16+8a+19C \quad (a = 0,\ 1,\ \ldots,\ 18,\ C \text{ beliebig})$$

ergiebt sich Folgendes: Wie bereits bemerkt, sind in $16+8a$ Jahren, wenn a auf die Werthe 0 bis 18 beschränkt bleibt, $11+5a$ Gemeinjahre und in $19C$ Jahren bei beliebigem C $12C$ Gemeinjahre enthalten, folglich sind in A Jahren

$$11+5a+12C \text{ Gemeinjahre}$$

oder nach (3.)

$$\frac{12A+17-a}{19} \text{ Gemeinjahre}^*),$$

---

*) Da a der Rest von $12A+17$ dividirt durch 19 ist, so ergiebt sich hieraus unmittelbar, dass die grösste in $(12A+17):19$ enthaltene ganze Zahl g die Anzahl der in A enthaltenen Gemeinjahre angiebt, ein Satz, den ***Gresy*** ohne Beweis anführt, Herr ***Knobloch*** auf Umwegen mit Hülfe einer Tafel für die zugehörigen Werthe von A und g mühsam feststellt. Die eigentliche Bedeutung der Zahl a in der ***Gauss***schen Formel bleibt bei beiden Autoren im Dunkeln.

somit

$$A-\frac{12A+17-a}{19} = \frac{7}{19}A+\frac{1}{19}a-\frac{17}{19} \text{ Schaltjahre}$$

enthalten. Da nun auf je ein Schaltjahr 1 Monat zu den 12 Monaten eines Gemeinjahres hinzukommt, so enthalten die Jahre vom Beginn an ($A=0$) bis A, im Ganzen $12A+\frac{7}{19}A+\frac{1}{19}a-\frac{17}{19}$ Monate, den Monat zu $\mu = 29\frac{13753}{25920}$ Tagen gerechnet, also

$$(-\tfrac{17}{19}+\tfrac{1}{19}a+12\tfrac{7}{19}A)\mu \text{ Tage.}$$

Andererseits erhält man die Anzahl der Tage, die in A Jahren des Julianischen Kalenders (von $A=0$ an) verflossen sind, in folgender Weise. Man bringt A auf die Form

$$A = 4s+b,$$

wo s die Anzahl der in diesem Zeitraum enthaltenen Julianischen Schaltjahre und b eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, den Rest von A getheilt durch 4, bedeutet. Alsdann ist die gesuchte Anzahl der Tage

$$365A+s$$

oder, da $s=\frac{A-b}{4}$ ist,

$$365A+\frac{A-b}{4} = 365\frac{1}{4}A-\frac{b}{4}.$$

Demnach ist nach dem Julianischen Kalender das Datum des Osterfestes im Jahre A um

$$\left(-\frac{17}{19}+\frac{1}{19}a+12\frac{7}{19}A\right)\mu-\left(365\frac{1}{4}A-\frac{b}{4}\right) \text{ Tage}$$

oder

$$-\frac{17}{19}\mu+\frac{\mu}{19}a+\frac{b}{4}+\left(12\frac{7}{19}\mu-365\frac{1}{4}\right)A \text{ Tage}$$

später als im Jahre $A=0$, wobei ein negatives Resultat bedeutet, dass das Fest eben so viel Tage früher eintritt.

Es handelt sich nur noch um die Bestimmung des Datums des Osterfestes im Jahre $A=0$. Man rechnet als Datum des ersten Tischri oder Neujahrs des Jahres $A=1$ (Erschaffung der Welt), den 7. Julianischen October des Jahres 3761 v. Chr., der auf einen Montag fiel und zwar $5\frac{204}{1080}$ Stunden $=\frac{467}{2160}$ Tag nach Beginn dieses Tages, der nach jüdischer Zählung Sonntag 6 Uhr Abends stattfand (Baharad). Demnach war also der erste Tischri des Jahres $A=1$ October $7+\frac{467}{2160}$ und da Ostern des

vorhergehenden Jahres $A = 0$ 163 Tage früher eintritt, so war das Datum des Osterfestes im Jahre $A = 0$

$$\text{April } 27 + \frac{467}{2160} \quad \text{oder} \quad \text{März } 58 + \frac{467}{2160}$$

und fiel auf einen Sonnabend.

Nun hat *Gauss* der Bestimmung „Jach", wonach, wenn der erste Tischri in der 18. Stunde des Tages (12 Uhr Mittag) oder später eintritt, das Neujahrsfest und damit dann auch das Osterfest des vorhergehenden Jahres auf den folgenden Tag verschoben wird, dadurch Rechnung getragen, dass er die Ausgangszeit der Zählung um $\frac{1}{4}$ Tag vergrössert. Wir rechnen also als Datum des Osterfestes für $A = 0$

$$\text{März } 58 + \frac{467}{2160} + \frac{1}{4} = \text{März } 58 + \frac{1007}{2160}.$$

Also erhält man als Datum des Osterfestes im Jahre A, abgesehen von den noch anzuführenden Ausnahmefällen

$$\text{März: } 58\frac{1007}{2160} - \frac{17}{19}\mu + \frac{\mu}{19}a + \frac{b}{4} + \left(12\frac{7}{19}\mu - 365\tfrac{1}{4}\right)A.$$

Indem man nun für μ seinen Werth $29\frac{13753}{25920}$ einsetzt, ergiebt sich die *Gauss*sche Regel: Man dividire $12A+17$ durch 19, nenne den Rest a, ferner dividire man A durch 4, nenne den Rest b und berechne den Werth von

$$(4.) \quad \begin{cases} 32\frac{4343}{98496} + 1\frac{272953}{492480}a + \frac{b}{4} - \frac{313}{98496}A \text{ *)} \\ = 32{,}0440932 + 1{,}5542418a + 0{,}25b - 0{,}003177794A \end{cases}$$

und setze ihn $= M+m$, wo M die ganze Zahl und m den Bruch bedeutet, so fällt Ostern im Allgemeinen auf den Mten März alten Styls.

Führt man an Stelle des jüdischen Jahres A das entsprechende Julianische Jahr B ein, zwischen denen die Beziehung besteht

$$A = B + 3760$$

---

*) Zur leichteren Controlle fügen wir die Rechnung bei:

$$\frac{\mu}{19} = 1\frac{272953}{492480}, \quad \frac{17}{19}\mu = 26\frac{207881}{492480},$$

$$58\frac{1007}{2160} - 26\frac{207881}{492480} = 32\frac{4343}{98496}, \quad 12\frac{7}{19}\mu = 365\frac{24311}{98496},$$

$$12\frac{7}{19}\mu - 365\tfrac{1}{4} = -\frac{313}{98496}.$$

so folgt, dass

$$a = R\cdot\left(\frac{12A+17}{19}\right) = R\cdot\left(\frac{12B+12}{19}\right),$$

$$b = R\cdot\left(\frac{A}{4}\right) = R\cdot\left(\frac{B}{4}\right)$$

und die Formel (4.) geht über in

$$20\frac{9415}{98496}+1\frac{272953}{492480}a+\frac{b}{4}-\frac{313}{98496}B,$$

$$= 20{,}0955877+1{,}5542418a+0{,}25b-0{,}003177794B.$$

Zur Berücksichtigung der Ausnahmefälle ist die Bestimmung des Wochentages c nöthig, auf den der Mte März des Jahres A fällt. Da das Osterfest im Jahre $A = 0$ der 58. März war und auf Sonnabend ($c = 0$) fiel, so fiel für das Jahr $A = 0$ der Wochentag des Mten März auf den Rest von: $0+M-58$ getheilt durch 7, oder indem man 63 als Vielfaches von 7 hinzufügen kann, auf

$$R\cdot\left(\frac{M+5}{7}\right).$$

Nun sind aber vom Mten März des Jahres $A = 0$ bis zum gleichen Datum des Jahres A nach der schon oben angestellten Rechnung $365A+\frac{A-b}{4}$ Tage verflossen. Indem man die ganzen Wochen unberücksichtigt lässt, erkennt man, dass der Wochentag des Mten März im Jahre A um $A+\frac{A-b}{4}$ Tage später, oder auch, da man $7\cdot\frac{A-b}{4}$, als durch 7 theilbar, hinzufügen kann, um $A+2(A-b) = 3A-2b$ oder endlich, da man noch $7b$ hinzufügen kann, um $3A+5b$ Tage später fällt, als im Jahre $A = 0$. Der Wochentag c des Mten März im Jahre A wird also erhalten als Rest der Division von $M+3A+5b+5$ durch 7

$$c = R\cdot\left(\frac{M+3A+5b+5}{7}\right).$$

Führt man B statt A ein ($A = 3760+B$) und berücksichtigt, dass $3.3760+5$ durch 7 dividirt, den Rest 1 giebt, so erhält man für den Wochentag des Mten März im Jahre A auch die Formel

$$c = R\cdot\left(\frac{M+3B+5b+1}{7}\right).$$

Ausnahmefälle:

1. Die Ausnahme wegen „Adu“ tritt ein, wenn der erste Tischri auf den 1., 4. oder 6. Wochentag fällt. Es wird dann das Neujahrsfest und mit ihm das vorhergehende Osterfest auf den folgenden Tag verlegt. Da nun das vorhergehende Osterfest 163 Tage also 2 Wochentage früher

stattfindet, so folgt, dass es auf den folgenden Tag verlegt wird, wenn es auf den 2. oder 4. oder 6. Wochentag fällt. Demnach die Regel:

Ist $c = 2$ oder 4 oder 6, dann fällt Ostern auf den $(M+1)$-ten März alten Styls.

2. Die Ausnahme wegen „Gatrad" tritt ein, wenn der erste Tischri in einem Gemeinjahr auf den 3. Wochentag und $9\frac{204}{1080}$ Stunden oder später nach Beginn des Tages, also das vorhergehende Osterfest auf den Wochentag $1+9\frac{204}{1080}$ Stunden $= 1+\frac{827}{2160}$ Tag oder später fällt. Da aber nach der *Gauss*schen Rechnung die Ausgangszeit um $\frac{1}{4}$ Tag vergrössert ist, so muss man statt $1\frac{827}{2160}$ hier $1\frac{827}{2160}+\frac{1}{4} = 1\frac{1367}{2160}$ setzen, also $c = 1$, $m \geqq \frac{1367}{2160}$. Nach dem Gesagten muss ferner das auf das Osterfest im Jahre A folgende Jahr $A+1$ ein Gemeinjahr sein. Wir bemerken, dass wenn dem Jahre A die Zahl $a = a_1 = R\left(\frac{12A+17}{19}\right)$ entspricht, dem Jahre $A+1$ die Zahl $a = R\left(\frac{12(A+1)+17}{19}\right) = R\left(\frac{a_1+12}{19}\right)$ zugehört. Ist nun $a_1 > 6$, und nur in diesem Falle, so wird $R\cdot\left(\frac{a_1+12}{19}\right) < 12$, also das Jahr $A+1$ ein Gemeinjahr sein. In dem hier besprochenen Ausnahmefalle wird das Fest auf 2 Tage später verlegt. Daher die Regel:

Wenn $c = 1$, $a > 6$ und $m \geqq \frac{1367}{2160}$ ist, dann fällt Ostern auf den $(M+2)$-ten März alten Styls.

3. Ausnahme wegen „Betu Thakpat". Sie tritt ein, wenn der Wochentag des ersten Tischri in einem Gemeinjahre, das auf ein Schaltjahr folgt, auf den Wochentag 2 und zwar $15\frac{589}{1080}$ Stunden $= \frac{16789}{25920}$ Tag nach Beginn desselben oder später eintrifft, also der *Gauss*schen Zählung zufolge, wodurch $\frac{1}{4}$ Tag hinzukommt, auf den Wochentag 2 und $\frac{23269}{25920}$ nach Beginn desselben oder später. Das vorhergehende Osterfest trifft dann auf den Wochentag 0, folglich hier $c = 0$ $m \geqq \frac{23269}{25920}$, ferner muss das Jahr $A+1$ auf ein Schaltjahr folgen, also A ein Schaltjahr sein. Dem entspricht $a > 11$. In diesem Ausnahmefalle wird das Fest auf den folgenden Tag verlegt. Hieraus die Regel:

Wenn $c = 0$, $a > 11$ und $m \geqq \frac{23269}{25920}$, dann fällt Ostern auf den $(M+1)$-ten März alten Styls.

Ueber die Integration linearer homogener Differentialgleichungen durch Quadraturen.

(Von Herrn *Ludwig Schlesinger.*)

Unter den linearen homogenen Differentialgleichungen, die eine Integration durch Quadraturen gestatten, d. h. deren Lösungen sich darstellen lassen in der Form von bestimmten Integralen, in denen die zu integrirende Function die unabhängige Veränderliche der Differentialgleichung als Parameter enthält, sind insbesondere zwei Typen von hervorragendem analytischem und praktischem Interesse: die Differentialgleichung der *Gauss*schen Reihe und die sogenannte *Laplace*sche Differentialgleichung. Die Integration der ersteren durch Quadraturen erfolgt nach einer Methode, die im Wesentlichen von *Euler* herrührt und die von verschiedenen Mathematikern, in der neueren Zeit besonders auch von Herrn *Pochhammer* auf Differentialgleichungen von allgemeinerer Art übertragen worden ist. Die *Laplace*sche Methode hat Herr *Poincaré* in seiner bewundernswerthen Abhandlung*) in einer Form dargestellt, die ihre Anwendbarkeit auf beliebige lineare homogene Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten erkennen lässt.

Wir beabsichtigen zu zeigen, dass die Methode von *Euler* einer ähnlichen allgemeinen Anwendbarkeit fähig ist wie die von *Laplace,* und weisen besonders auf die bedeutsame Rolle hin, die hierbei der zu einer vorgelegten Differentialgleichung adjungirten Differentialgleichung zufällt. Es tritt dadurch ein Zusammenhang hervor mit Untersuchungen, die ganz andere Zwecke verfolgen wie die Integration von Differentialgleichungen mittelst Quadraturen, nämlich mit den Untersuchungen von *Abel* und *Jacobi* über die Vertauschung von Parameter und Argument und den sich darauf stützenden von Herrn *Fuchs* über die Beziehungen, welche durch die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer

*) American Journal Bd. 7.

Differentialgleichungen befriedigt werden*). Dieser Zusammenhang scheint bisher noch nicht bemerkt worden zu sein.

I.

Die Darstellung, welche Herr *Poincaré* der Methode von *Laplace* gegeben hat, soll zunächst in etwas anderer Form vorgeführt werden; es wird dabei deutlich zu erkennen sein, was der *Laplace*schen Methode eigenthümlich ist und welche Bedeutung der adjungirten Differentialgleichung zufällt.

Sei wie bei Herrn *Poincaré* die gegebene Differentialgleichung

$$(A.) \qquad D_x(y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} = 0$$

von der $n$ten Ordnung und die Coefficienten

$$P_k(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

ganze rationale Functionen vom $m$ten oder von niedrigerem Grade. Es lässt sich dann der von x und von einem Parameter z abhängende Ausdruck

$$D_x(e^{zx}) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) z^k e^{zx}$$

umformen, wenn man beachtet, dass

$$(\alpha.) \qquad x^k \frac{\partial^k e^{zx}}{\partial x^k} = z^k \frac{\partial^k e^{zx}}{\partial z^k}$$

ist. Entwickeln wir nämlich die Producte

$$P_k(x) e^{zx} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

nach den successiven Ableitungen von e^{zx}, d. h. setzen wir

$$e^{zx} P_k(x) = \sum_{i=0}^{m} C_{ik} \frac{d^i e^{zx}}{dz^i} = e^{zx} \sum_{i=0}^{n} C_{ik} x^i,$$

so ergiebt sich

$$(1.) \qquad D_x(e^{zx}) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} C_{ik} x^i z^k e^{zx} = \Delta_z(e^{zx}),$$

wo Δ_z als linearer homogener Differentialausdruck mit der unabhängigen Variablen z durch die Gleichung

$$\Delta_z(u) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} C_{ik} z^k \frac{d^i u}{dz^i} = \sum_{i=0}^{m} \Pi_i(z) \frac{d^i u}{dz^i}$$

---

*) Dieses Journal Bd. 76, S. 177 ff.; Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1892, S. 1113 ff.

definirt wird. Die Coefficienten $\Pi_i(z)$ sind ganze rationale Functionen $n$ten Grades von z, und wenn man sich das rechteckige System

$$(C_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i=0,\ 1,\ \ldots,\ m \\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}$$

hingeschrieben denkt, so liefern die durch den Index k charakterisirten Reihen die Coefficienten der $P_k(x)$, die durch den Index i charakterisirten Reihen die Coefficienten der $\Pi_i(z)$.

Bedeute nun

$$\Delta'_z(v) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \frac{d^i(\Pi_i(z)v)}{dz^i}$$

den zu $\Delta_z(u)$ adjungirten,

$$\Delta_z(f,\ g) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=0}^{i-1} (-1)^h \frac{d^h(\Pi_i(z)g)}{dz^h} \frac{d^{i-h-1}f}{dz^{i-h-1}}$$

den begleitenden bilinearen Differentialausdruck, dann besteht bekanntlich für zwei willkürliche Functionen u, v von z die *Lagrange*sche Beziehung

$$(2.) \qquad v\Delta_z(u) - u\Delta'_z(v) = \frac{d}{dz}\Delta_z(u,\ v).$$

Nun ist nach (1.) für eine willkürliche Function v von z

$$D_x(ve^{zx}) = v\Delta_z(e^{zx}),$$

also nach (2.)

$$D_x(ve^{zx}) = \frac{d}{dz}\Delta_z(e^{zx},\ v) + e^{zx}\Delta'_z(v),$$

und wenn wir in Bezug auf z auf einem noch näher zu bestimmenden Wege L integriren, so ergiebt sich

$$D_x\Big(\int_L ve^{zx}dz\Big) = \int_L \frac{d}{dz}\Delta_z(e^{zx},\ v)dz + \int_L e^{zx}\Delta'_z(v)dz.$$

Wählt man nun die Function v als Lösung der adjungirten Differentialgleichung

$$(3.) \qquad \Delta'_z(v) = 0$$

und den Integrationsweg L so, dass

$$\int_L \frac{d}{dz}\Delta_z(e^{zx},\ v)dz = 0$$

ist, so stellt

$$y = \int_L ve^{zx}dz$$

eine Lösung von (A.) dar. Die Differentialgleichung (3.) ist nichts anderes

als die von Herrn *Poincaré* sogenannte *Laplace*sche *Transformirte* der Differentialgleichung (A.).

Wie ich bereits gelegentlich*) bemerkt habe, ist die Beziehung zwischen den Differentialgleichungen (A.) und

$$\text{(B.)} \qquad \Delta_z(u) = 0$$

eine *gegenseitige*. In der That, bedeuten

$$D'_x(w), \quad D_x(f, g)$$

den adjungirten linearen und den begleitenden bilinearen Differentialausdruck von $D_x(y)$, so ist zufolge der Gleichung (1.) auch für eine willkürliche Function w von x und einen geeigneten Integrationsweg Δ

$$\Delta_z\Big(\int_\Delta w e^{zx} dx\Big) = \int_\Delta w \Delta_z(e^{zx}) dx = \int_\Delta \frac{d}{dx} D_x(e^{zx}, w) dx + \int_\Delta e^{zx} D'_x(w) dx.$$

Wenn also w eine Lösung der adjungirten Differentialgleichung von (A.) und Δ einen Integrationsweg bedeutet, längs welchem integrirt

$$\int_\Delta \frac{d}{dx} D_x(e^{zx}, w) dx = 0$$

ist, so stellt

$$u = \int_\Delta w e^{zx} dx$$

eine Lösung von (B.) dar. Wir können also sagen:

Die Differentialgleichungen (A.) *und* (B.) *integriren sich gegenseitig durch Quadraturen nach der Methode von Laplace; die adjungirte Differentialgleichung von* (B.) *ist die Laplacesche Transformirte von* (A.), *und umgekehrt ist auch die adjungirte Differentialgleichung von* (A.) *die Laplacesche Transformirte von* (B.).

Wie die Integrationswege L beziehungsweise Δ einzurichten sind, findet sich in der eingangs erwähnten *Poincaré*schen Arbeit angegeben. Das Charakteristische der *Laplace*schen Methode besteht in der Anwendung der Function e^{zx}. Man könnte nun sofort daran denken, an Stelle dieser Function andere von z und x abhängende Ausdrücke in ähnlicher Weise zu benutzen. Ein solcher Ausdruck müsste nur die Eigenschaft haben, dass zwischen seinen Ableitungen nach z und denen nach x ähnliche Beziehungen

*) Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen Bd. I, (Leipzig, 1895) S. 426.

bestehen, wie die für e^{zx} geltende Gleichung (α.). Ohne hier genauer auf allgemeine Ueberlegungen, die in dieser Richtung liegen, einzugehen, bemerke ich nur, dass sich in den neuesten Untersuchungen von Herrn *Fuchs**) eine grosse Klasse von Functionen zweier Veränderlicher charakterisirt findet, die auch in der hier angedeuteten Richtung von besonderer Wichtigkeit sein dürften. Herr *Fuchs* untersucht nämlich Differentialgleichungen

$$P(y) = \sum_{k=0}^{n} p_x(x, z)\frac{d^k y}{dx^k} = 0,$$

deren Coefficienten etwa rationale Functionen der beiden unabhängigen Variablen x, z sind, und für welche ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \ldots, y_n$ existirt, dessen Fundamentalsubstitutionen von z unabhängig sind. In gewissen Fällen ist dann, wie Herr *Fuchs* nachgewiesen hat

$$(\beta.) \qquad \frac{\partial^\mu y_k}{\partial z^\mu} = A_{\mu 0} y_k + A_{\mu 1}\frac{\partial y_k}{\partial x} + \cdots + A_{\mu,n-1}\frac{\partial^{n-1} y_k}{\partial x^{n-1}}, \qquad \binom{k = 1, 2, \ldots, n}{\mu = 1, 2, \ldots, n}$$

wo die $A_{\mu 0}, A_{\mu 1}, \ldots, A_{\mu,n-1}$ rationale Functionen von x und z sind. Man kann die zwischen den Ableitungen der y_k bestehenden Beziehungen (β.) als die Verallgemeinerung der für e^{zx} bestehenden Gleichungen (α.) ansehen, und ich werde bei anderer Gelegenheit zu zeigen versuchen, wie man, auf Grund der Gleichungen (β.), die y_k in ähnlicher Weise benutzen kann, wie das ve^{zx} bei der Methode von *Laplace*. Hier wollen wir uns darauf beschränken, an die Stelle von e^{zx} die Function

$$(z-x)^{\xi-1}$$

treten zu lassen, wo ξ irgend eine beliebige von z und x unabhängige Grösse bedeutet.

II.

Wir betrachten wieder die Differentialgleichung (A.) unter denselben Voraussetzungen wie in der No. I und setzen in die linke Seite derselben an die Stelle von y den Ausdruck $(z-x)^{\xi-1}$ ein. Dann ist

$$(1.) \quad D_x((z-x)^{\xi-1}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k P_k(x)(\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-k)(z-x)^{\xi-k-1}$$

im wesentlichen die zur Stelle $x = z$ gehörige *charakteristische Function* des Herrn *Frobenius*. Um dieselbe in ähnlicher Weise umzuformen wie in

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1888—1894.

der No. I den Ausdruck

$$D_x(e^{zx}),$$

entwickeln wir die Producte

$$P_k(x)(z-x)^{\xi-1}$$

nach den successiven Ableitungen von $(z-x)^{\xi-1}$, d. h. die ganzen Functionen $P_k(x)$ nach Potenzen von $x-z$. Es sei also

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{P_k^{(i)}(z)}{i!}(x-z)^i, \qquad (k=0, 1, \ldots, n)$$

dann ist

$$D_x\big((z-x)^{\xi-1}\big) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}(-1)^{k+i}\frac{(\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-k)}{i!}P_k^{(i)}(z)(z-x)^{\xi-k+i-1},$$

oder wenn wir einen neuen Summationsindex

$$\nu = m+k-i$$

einführen, der dann alle ganzzahligen Werthe von 0 bis $m+n$ durchläuft, und

$$(2.)\quad \varphi_\nu(z) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{m-\nu}\frac{(\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-k)}{(\xi+m-1)(\xi+m-2)\ldots(\xi+m-\nu)}\frac{P_k^{(m+k-\nu)}(z)}{(m+k-\nu)!}$$

setzen, so ist

$$D_x\big((z-x)^{\xi-1}\big) = \sum_{\nu=0}^{m+n}\varphi_\nu(z)\frac{d^\nu}{dz^\nu}(z-x)^{\xi+m-1}.$$

Indem wir endlich durch die Formel

$$\mathfrak{D}_z(u) = \sum_{\nu=0}^{m+n}\varphi_\nu(z)\frac{d^\nu u}{dz^\nu}$$

einen homogenen linearen Differentialausdruck $(m+n)$-ter Ordnung mit der unabhängigen Variabeln z und mit in z ganzen rationalen Coefficienten einführen, finden wir die Gleichung

$$(C.)\qquad D_x\big((z-x)^{\xi-1}\big) = \mathfrak{D}_z\big((z-x)^{\xi+m-1}\big),$$

die wir im Folgenden als den *Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument* bezeichnen wollen. Diese Bezeichnung wird sich dadurch rechtfertigen, dass, wie wir sehr bald sehen werden, der von *Abel* aufgestellte*) von *Jacobi* in eleganter Weise bewiesene**) Vertauschungssatz als specieller Fall in unserer Gleichung (C.) enthalten ist.

Um den gesammten für die folgenden Betrachtungen erforderlichen Formelapparat zur Hand zu haben, berechnen wir gleich die den Gleichungen (2.) reciprok gegenüberstehenden Ausdrücke der P_k durch die φ_ν.

*) Œuvres complètes (1881) Bd. 2, Abhandlungen VIII, IX.

**) dieses Journal Bd. 32, S. 185—196.

Entwickeln wir zu dem Ende die $\varphi_\nu(z)$ nach Potenzen von $z-x$,

$$\varphi_\nu(z) = \sum_{\lambda=0}^{m} \frac{\varphi_\nu^{(\lambda)}(x)}{\lambda!}(z-x)^\lambda$$

und setzen diese Ausdrücke in die rechte Seite der Gleichung (C.) ein, so kommt,

$$\mathfrak{D}_z\big((z-x)^{\xi+m-1}\big) = \sum_{\nu=0}^{m+n}\sum_{\lambda=0}^{m}\frac{(\xi+m-1)(\xi+m-2)\ldots(\xi+m-\nu)}{\lambda!}\varphi_\nu^{(\lambda)}(x)(z-x)^{\xi+m-\nu+\lambda-1},$$

oder wenn wir $\varkappa = \nu-\lambda-m$ als neuen Summationsindex einführen,

$$\mathfrak{D}_z\big((z-x)^{\xi+m-1}\big) = \sum_{\varkappa=-2m}^{n}(z-x)^{\xi-\varkappa-1}\sum_{\nu=0}^{m+n}(\xi+m-1)(\xi+m-2)\ldots(\xi+m-\nu)\frac{\varphi_\nu^{(\nu-m-\varkappa)}(x)}{(\nu-m-\varkappa)!},$$

und dies muss zufolge des Vertauschungssatzes (C.) mit der rechten Seite von (1.) übereinstimmen. Es ist folglich

$$(3.)\qquad \sum_{\nu=0}^{m+n}(-1)^\varkappa\frac{(\xi+m-1)(\xi+m-2)\ldots(\xi+m-\nu)}{(\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-\varkappa)}\frac{\varphi_\nu^{(\nu-m-\varkappa)}(x)}{(\nu-m-\varkappa)!} = \begin{cases} 0 & \text{für } \varkappa<0 \\ P_\varkappa(x) & \text{für } \varkappa\geqq 0. \end{cases}$$

Die gegenseitige Beziehung der Differentialausdrücke $D_x(y)$ und $\mathfrak{D}_z(u)$ lässt sich aber in noch eleganterer und übersichtlicherer Weise darstellen. Setzen wir nämlich

$$\overline{P}_{\varkappa+m}(x) = (-1)^{m+\varkappa}\frac{(\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-\varkappa)}{(m+\varkappa)!}P_\varkappa(x), \qquad (\varkappa=0,1,\ldots,n)$$

$$\overline{P}_\nu(x) = 0 \quad \text{für} \quad \nu<m,$$

$$\overline{\varphi}_\varkappa(x) = (-1)^\varkappa(\xi+m-1)_\varkappa\varphi_\varkappa(x), \qquad (\varkappa=0,1,\ldots,m+n)$$

so ist nach (2.) und (3.)

$$\overline{\varphi}_\nu(x) = \sum_{k=0}^{m+n}(-1)^k k_\nu \overline{P}_k^{(k-\nu)}(x),$$

$$\overline{P}_k(x) = \sum_{\nu=0}^{m+n}(-1)^\nu \nu_k \overline{\varphi}_\nu^{(\nu-k)}(x).$$

Nun lautet aber die explicite Form des zu einem Differentialausdrucke

$$\sum_{k=0}^{p} p_k\frac{d^k y}{dx^k}$$

adjungirten Differentialausdruckes,

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{d^k(p_k w)}{dx^k} = \sum_{k=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^k k_\nu\frac{d^{k-\nu}p_k}{dx^{k-\nu}}\frac{d^\nu w}{dx^\nu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p}\frac{d^\nu w}{dx^\nu}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k k_\nu\frac{d^{k-\nu}p_k}{dx^{k-\nu}}.$$

Setzen wir also

$$\overline{D}_x(y) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{(\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-k)}{(m+k)!} P_k(x) \frac{d^k y}{dx^k},$$

$$\overline{\mathfrak{D}}_x(u) = \sum_{\nu=0}^{m+n}(-1)^\nu (\xi+m-1)_\nu \varphi_\nu(x) \frac{d^\nu u}{dx^\nu},$$

so sind die beiden Differentialausdrücke

$$(-1)^m \overline{D}_x\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \overline{P}_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{D}}_x(u)$$

einander adjungirt. Bezeichnen wir durch $\overline{D}'_x(w)$ den adjungirten Differentialausdruck von $\overline{D}_x(y)$, so ist nach dem Reciprocitätssatze der Herren *Thomé* und *Frobenius**)

$$\overline{\mathfrak{D}}_x(u) = \frac{d^m}{dx^m} \overline{D}'_x(u).$$

Da offenbar

$$\frac{d^{m+\mu}}{dz^{m+\mu}}(z-x)^{\xi+m-1} = \xi(\xi+1)\ldots(\xi+m-1)\frac{d^\mu (z-x)^{\xi-1}}{dz^\mu}$$

ist, so haben wir zufolge der Gleichungen (2.)

$$\mathfrak{D}_z\left((z-x)^{\xi+m-1}\right) = \sum_{\mu=0}^{n} \frac{d^\mu (z-x)^{\xi-1}}{dz^\mu} \sum_{k=\mu}^{n}(-1)^\mu \frac{(\xi-1)\ldots(\xi-k)}{(\xi-1)\ldots(\xi-\mu)} \frac{P_k^{(k-\mu)}(z)}{(k-\mu)!}$$

$$+\sum_{\nu=0}^{m-1}(\xi+m-1)\ldots(\xi+m-\nu)(z-x)^{\xi+m-\nu-1}$$

$$\times \sum_{k=0}^{n}(-1)^{m-\nu}\frac{(\xi-1)\ldots(\xi-k)}{(\xi+m-1)\ldots(\xi+m-\nu)}\frac{P_k^{(m+k-\nu)}(z)}{(m+k-\nu)!},$$

also für $\xi = 0$

$$(4.)\quad \mathfrak{D}_z\left((z-x)^{m-1}\right) = D'_z\left((z-x)^{-1}\right) + \sum_{\nu=0}^{m-1}(z-x)^{m-\nu-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{P_k^{(m+k-\nu)}(z)}{(m+k-\nu)!}(-1)^{m-\nu-k}k!.$$

Nun ist aber, wie eine einfache Rechnung zeigt,

$$\frac{d^k}{dz^k}\frac{P_k(z)-P_k(x)}{z-x} = \frac{d^k}{dz^k}\sum_{i=1}^{m}\frac{P_k^{(i)}(z)}{i!}(x-z)^{i-1}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1}(x-z)^{m-\nu-1}\frac{P_k^{(m-\nu+k)}(z)}{(m-\nu-1)!}\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{(-1)^\lambda k_\lambda}{m-\nu+\lambda},$$

und nach einer bekannten combinatorischen Formel**)

$$\sum_{\lambda=0}^{k}(-1)^\lambda \frac{k_\lambda}{m+1+\lambda} = \frac{k!}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k+1)};$$

---

*) Vgl. *Frobenius*, dieses Journal Bd. 76, S. 265.

**) Vgl. z. B. *Jacobi* a. a. O. S. 191 die in der Anmerkung stehende Formel für $p = 0$.

wir finden also

$$(5.) \qquad \frac{d^k}{dz^k}\frac{P_k(z)-P_k(x)}{z-x} = \sum_{\nu=0}^{m-1}(-1)^{m-\nu-1}k!(z-x)^{m-\nu-1}\frac{P_k^{(m-\nu+k)}(z)}{(m-\nu+k)!}.$$

Auf Grund der Gleichungen (4.), (5.) verwandelt sich nunmehr die Beziehung (C.) für $\xi = 0$ in

$$D_x((z-x)^{-1}) = D_z'((z-x)^{-1}) - \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{d^k}{dz^k}\frac{P_k(z)-P_k(x)}{z-x},$$

und dies ist genau die von *Jacobi* gegebene Form des *Abel*schen Satzes von der Vertauschung von Parameter und Argument.

III.

Wir verfahren nun mit der den Vertauschungssatz darstellenden Gleichung (C.) genau ebenso wie in der Nr. I mit der Gleichung (1.) jener Nummer.

Für eine beliebige Function v von z und einen Integrationsweg L ergiebt sich zufolge der Beziehung von *Lagrange*

$$D_x\Big(\int_L v(z-x)^{\xi-1}dz\Big) = \int_L \frac{d}{dz}\mathfrak{D}_z((z-x)^{\xi+m-1},\ v)dz + \int_L (z-x)^{\xi+m-1}\mathfrak{D}_z'(v)dz,$$

wenn wir durch

$$\mathfrak{D}_z'(v), \quad \mathfrak{D}_z(u,\ v)$$

den adjungirten linearen, beziehungsweise den begleitenden bilinearen Differentialausdruck von $\mathfrak{D}_z(u)$ darstellen. Bedeutet also v eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mathfrak{D}_z'(v) = 0,$$

und denken wir uns den Integrationsweg L so gewählt, dass

$$(1.) \qquad \int_L \frac{d}{dz}\mathfrak{D}_z((z-x)^{\xi+m-1},\ v)dz = 0$$

ist, so besitzen wir in

$$(2.) \qquad y = \int_L v(z-x)^{\xi-1}dz$$

eine Lösung von (A.). Ebenso ist umgekehrt

$$(3.) \qquad u = \int_A w(z-x)^{\xi+m-1}dx$$

eine Lösung der Differentialgleichung $(m+n)$-ter Ordnung

$$(\mathfrak{A}.) \qquad \mathfrak{D}_z(u) = 0,$$

wenn w eine Lösung der zu (A.) adjungirten Differentialgleichung und Δ einen Integrationsweg bedeutet, für welchen

$$(4.) \qquad \int_{\Delta} \frac{d}{dx} D_x((z-x)^{\xi-1},\ w)dx = 0$$

ist.

Die Auswahl der Integrationswege L beziehungsweise Δ hängt wesentlich ab von der Lage der singulären Stellen der Differentialgleichungen (𝔐.) beziehungsweise (A.). Da aber

$$\varphi_{m+n}(z) = (-1)^{m+n} P_n(z)$$

ist, *so sind diese Stellen für beide Differentialgleichungen dieselben,* und wir können uns also darauf beschränken, etwa die Bestimmnng der Integrationswege Δ zu unserer Aufgabe zu machen.

Ein solcher Integrationsweg muss zu Folge der Gleichung (4.) so beschaffen sein, dass im Anfangs- und Endpunkte desselben der Ausdruck

$$D_x((z-x)^{\xi-1},\ w)$$

denselben Werth annimmt, dass aber trotzdem das über denselben erstreckte Integral (2.) nicht identisch verschwindet. In der neueren Litteratur*) sind vornehmlich zwei verschiedene Arten solcher Integrationswege angewandt worden.

Die eine Art sind die sogenannten *Doppelschleifen.*

Bezeichnet man mit $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ die von einander verschiedenen Nullstellen der ganzen rationalen Function $P_n(x)$ und mit s_k die von einem regulären Punkte $x = \zeta$ aus um den singulären Punkt $x = a_k$ in positivem Sinne herumgelegte einfache Schleife, mit s_0 die von demselben Punkte $x = \zeta$ aus um den Punkt $x = z$ herum gelegte Schleife, so sind die Doppelschleifen durch die Symbole

$$(5.) \qquad s_\alpha s_\beta s_\alpha^{-1} s_\beta^{-1} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots, \sigma;\ \alpha \neq \beta)$$

charakterisirt.

Die andere Art von Integrationswegen beginnt und endet in einem und demselben der singulären Punkte

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\sigma, \quad \infty$$

---

*) *Poincaré,* American Journal Bd. VII, Acta Mathematica Bd. VIII; *Camille Jordan,* Cours d'Analyse, Bd. III (1887); *Pochhammer*, Mathematische Annalen, Bd. 35, 36, 37; *Nekrassoff,* Mathem. Annalen Bd. 38.

und zwar in der Weise, dass die ersten und letzten Wegelemente ganz bestimmte Richtungen einhalten, die so gewählt werden müssen, dass die Bedingung (4.) erfüllt wird. Daraus erhellt, dass diese zweite Art von Integrationswegen nur bei solchen singulären Punkten mit Erfolg zur Anwendung gelangt, die ***Unbestimmtheitsstellen*** für die Integrale w sind. Da wir die Untersuchung von Differentialgleichungen im Auge haben, die der *Fuchs*schen Klasse angehören, so werden wir uns auf die Betrachtung der ersteren Art von Integrationswegen beschränken.

Dabei erweist es sich als zweckmässig, die folgende Auffassung Platz greifen zu lassen.

Wir können offenbar die über die sämmtlichen Doppelschleifen (5.) erstreckten Integrale (2.) aus über die Doppelschleifen

$$s_\alpha s_0 s_\alpha^{-1} s_0^{-1} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \sigma) \tag{6.}$$

erstreckten zusammensetzen. Statt dieser letzteren betrachten wir allgemeiner die Wege

$$l s_0 l^{-1} s_0^{-1}, \tag{7.}$$

wo l irgend einen von $x = \zeta$ ausgehenden geschlossenen Weg bedeutet, auf welchem fortgesetzt das beliebige Integral w der zu (A.) adjungirten Differentialgleichung nicht ungeändert bleibt, sondern etwa in θw verwandelt wird. Dann ist

$$\left\{\begin{aligned} \int_{l s_0 l^{-1} s_0^{-1}} w(z-x)^{\xi+m-1} dx \;&=\; (1-e^{2\pi\xi\sqrt{-1}}) \int_{l} w(z-x)^{\xi+m-1} dx \\ &\quad - \int_{s_0} (w-\theta w)(z-x)^{\xi+m-1} dx. \end{aligned}\right. \tag{8.}$$

Bedeutet also $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ein Fundamentalsystem der zu (A.) adjungirten Differentialgleichung, so lassen sich die über die Wege (7.) und also auch die über die Doppelschleifen (6.) erstreckten Integrale (2.), linear homogen und mit constanten Coefficienten aus den folgenden zusammensetzen

$$\int_{s_\alpha} w_k (z-x)^{\xi+m-1} dx. \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \ldots, \sigma \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{9.}$$

Wir fragen nun:

1) wie sind die Coefficienten von linearen homogenen Verbindungen der Integrale (9.) zu bestimmen, damit diese Verbindungen Lösungen der Differentialgleichung (𝔄.) darstellen, und

2) lässt sich aus solchen Verbindungen ein Fundamentalsystem von (𝔄.) zusammensetzen?

IV.

Wir wollen diese Fragen nur in dem besonders wichtigen Specialfalle zu erörtern versuchen, wo die vorgelegte Differentialgleichung (A.) der *Fuchs*schen Klasse angehört.

Zunächst schliessen wir aus den Formeln der Nr. II, am einfachsten wohl daraus, dass die Differentialausdrücke

$$\sum_{k=0}^{m+n} P_k(x)\frac{d^k y}{dx^k} \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_x(u)$$

einander adjungirt sind, dass eine singuläre Stelle die für die eine der beiden Differentialgleichungen (A.) und (𝔄.) eine Stelle der Bestimmtheit ist, auch für die andere eine Stelle der Bestimmtheit sein müsse. *Wenn also die eine der beiden Differentialgleichungen* (A.) *und* (𝔄.) *der Fuchsschen Klasse angehört, so ist dies auch für die andere der Fall.*

Wir wollen vorläufig nur die allgemeinere Voraussetzurg machen, dass der unendlich ferne Punkt eine Stelle der Bestimmtheit für die Differentialgleichung (A.) sei; es werden dann die Formeln der Nr. II einer wesentlichen Vereinfachung fähig, indem sich nämlich die Differentialgleichung $(m+n)$-ter Ordnung (𝔄.) durch eine solche von der $m$ten Ordnung ersetzen lässt.

In der That ist, damit sich die sämmtlichen Lösungen der Differentialgleichung im Punkte $x=\infty$ bestimmt verhalten, nothwendig und hinreichend, dass die Grade der Coefficienten P_n, P_{n-1}, ..., P_0 abnehmen. Wenn also m der wirkliche Grad von $P_n(x)$ ist, so hat man $m \geqq n$, und $P_k(x)$ darf höchstens vom Grade $m-n+k$ sein. Also ist für $\nu < n$

$$P_k^{(m+k-\nu)}(x) = 0,$$

d. h. es sind nach Gleichung (2.) Nr. II die

$$\varphi_0(z), \quad \varphi_1(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}(z)$$

sämmtlich gleich Null, so dass sich die Differentialgleichung (𝔄.) in der Form

$$\mathfrak{D}_z(u) = \sum_{\nu=0}^{m} \varphi_{n+\nu}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right) = 0$$

als Differentialgleichung $m$ter Ordnung für die $n$te Ableitung von u schreiben

lässt. Setzen wir also

$$(1.)\quad \begin{cases} Q_\nu(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{m-n-\nu} \dfrac{(\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-k)}{(\xi+m-n-1)\dots(\xi+m-n-\nu)} \dfrac{P_k^{(m+k-n-\nu)}(z)}{(m+k-n-\nu)!} \\ = (\xi+m-1)(\xi+m-2)\dots(\xi+m-n)\varphi_{n+\nu}(z), \end{cases}$$

woraus sich nach den Gleichungen (2.), (3.) der Nr. II umgekehrt

$$(2.)\quad \sum_{\nu=0}^{m} \frac{Q_\nu^{(\nu-m+n-k)}(x)}{(\nu-m+n-k)!} \frac{(\xi+m-n-1)\dots(\xi+m-n-\nu)}{(\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-k)} (-1)^k = \begin{cases} 0 \text{ für } k<0, \\ P_k(x) \text{ für } k \geqq 0 \end{cases}$$

ergiebt, so kann die Differentialgleichung $m$ter Ordnung

$$(\mathrm{E.})\qquad E_z(u) = \sum_{\nu=0}^{m} Q_\nu(z) \frac{d^\nu u}{dz^\nu} = 0$$

an die Stelle von (A.) treten. Denn aus den Formeln der Nummern II und III erhalten wir die Gleichung

$$(3.)\qquad D_x((z-x)^{\xi-1}) = E_z((z-x)^{\xi+m-n-1}),$$

und wenn

$$E_z'(v), \quad E_z(f, g)$$

den adjungirten linearen beziehungsweise den begleitenden bilinearen Differentialausdruck von $E_z(u)$ bedeuten, so haben wir

$$(4.)\qquad D_x\Big(\int v(z-x)^{\xi-1}dz\Big) = E_z((z-x)^{\xi+m-n-1}, v) + \int (z-x)^{\xi+m-n-1} E_z'(v)dz,$$

$$(5.)\qquad E_z\Big(\int w(z-x)^{\xi+m-n-1}dx\Big) = D_x((z-x)^{\xi-1}, w) + \int (z-x)^{\xi-1} D_x'(w)dx.$$

Folglich stellt

$$(6.)\qquad y = \int_L v(z-x)^{\xi-1}dz$$

eine Lösung von (A.) dar, wenn

$$(\mathrm{E}'.)\qquad E_z'(v) = 0,$$

$$(7.)\qquad \int_L \frac{d}{dz} E_z((z-x)^{\xi+m-n-1}, v)dz = 0,$$

ist, und umgekehrt haben wir in

$$(8.)\qquad u = \int_A w(z-x)^{\xi+m-n-1}dx$$

eine Lösung von (E.), wenn

$$(\mathrm{A}'.)\qquad D_x'(w) = 0,$$

$$(9.)\qquad \int_A \frac{d}{dx} D_x((z-x)^{\xi-1}, w)dx = 0$$

ist.

Die Differentialgleichung (E.) ***hat die besondere Eigenschaft, dass ihre Ordnung mit dem Grade des Coefficienten der höchsten Ableitung übereinstimmt.*** Die Form der Gleichungen (1.) bis (5.) lässt erkennen, dass der Fall eine besondere Beachtung verdient, wo auch in der Differentialgleichung (A.) die Ordnungszahl n dieselbe ist wie der Grad m des Coefficienten der höchsten Ableitung, denn alsdann ist die Reciprocität zwischen den Differentialgleichungen (A.) und (E.) eine vollkommene. Es ist nämlich für $m = n$ der Coefficient $P_k(x)$ der $k$ten Ableitung von y in $D_x(y)$ vom $k$ten Grade, und wir können demnach die Beziehung zwischen den Differentialgleichungen (A.) und (E.) in elegantester Weise dadurch zum Ausdruck bringen, dass wir sagen: wenn

$$\overline{P}_k(x) = (-1)^k \frac{(\xi-1)\ldots(\xi-k)}{k!} P_k(x),$$

$$\overline{Q}_\nu(x) = (-1)^\nu \frac{(\xi-1)\ldots(\xi-\nu)}{\nu!} Q_\nu(x)$$

gesetzt wird, so ist

$$\overline{Q}_\nu(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k k_\nu \overline{P}_k^{(k-\nu)}(x),$$

$$\overline{P}_k(x) = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \nu_k \overline{Q}_\nu^{(\nu-k)}(x),$$

d. h. ***die beiden Differentialgleichungen***

$$\sum_{k=0}^{m} \overline{P}_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{m} \overline{Q}_\nu(x) \frac{d^\nu u}{dx^\nu} = 0$$

sind einander adjungirt. Der durch die Gleichung (C.) dargestellte Vertauschungssatz nimmt die einfache Form an

(10.) $$D_x((z-x)^{\xi-1}) = E_z((z-x)^{\xi-1}).$$

Wenn $m > n$ sein sollte, so können wir z. B. dadurch, dass wir y gleich der $(m-n)$-ten Ableitung einer neuen unabhängigen Variabeln setzen, eine Differentialgleichung herstellen, deren Ordnungszahl gleich m ist, und die, nebst einer ganzen rationalen Function $(m-n)$-ten Grades von x mit willkürlichen Coefficienten noch n Lösungen besitzt, deren $(m-n)$-te Ableitungen ein Fundamentalsystem der gegebenen Differentialgleichung bilden. Wir wollen darum im Folgenden zunächst voraussetzen, dass

$$m = n$$

sei, und dann in der No. VI noch besonders auf den Fall eingehen, wo in

der gegebenen Differentialgleichung (A.) die Coefficienten gewisser erster Ableitungen verschwinden.

V.

Wir fügen jetzt den in der vorigen Nummer über die Beschaffenheit der Differentialgleichung (A.) gemachten Voraussetzungen noch die Annahme hinzu, dass (A.) der *Fuchs*schen Klasse angehören möge. Sei dann der Coefficient $P_m(x)$ der höchsten Ableitung in seine linearen Factoren zerlegt

$$(1.) \qquad P_m(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_\sigma)^{\alpha_\sigma},$$

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_i = m,$$

so muss, damit der singuläre Punkt $x = a_i$ eine Stelle der Bestimmtheit für die Lösungen von (A.) sei, der Factor $x-a_i$ in $P_{m-1}(x)$ mindestens zur (a_i-1)-ten, in $P_{m-2}(x)$ mindestens zur (α_i-2)-ten u. s. w., in $P_{m-\alpha_i+1}(x)$ mindestens zur ersten Potenz enthalten sein. Bezeichnen wir durch

$$\varrho_{i1}, \quad \varrho_{i2}, \quad \ldots, \quad \varrho_{im}$$

die Wurzeln der zu $x = a_i$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so sind bekanntlich $m-\alpha_i$ derselben mit den Zahlen 0, 1, 2, ..., $m-\alpha_i-1$ identisch, und die zu diesen als Exponenten gehörigen Elemente des kanonischen Fundamentalsystems verhalten sich in der Umgebung von $x = a_i$ regulär, wenn keine der α_i übrigen Wurzeln eine positive ganze Zahl grösser als $m-\alpha_i-1$ ist. Um Complicationen aus dem Wege zu gehen, die das Wesen der anzustellenden Ueberlegungen nicht berühren, wollen wir überhaupt annehmen, dass für alle singulären Punkte a_i die Grössen

$$\varrho_{i\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i)$$

weder ganzzahlig noch auch um ganze Zahlen von einander verschieden seien. Dann enthalten die Entwickelungen der Elemente

$$y_{i\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

des zu $x = a_i$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems in der Umgebung von $x = a_i$ keinen Logarithmus und haben also die Form

$$(2.) \qquad y_{i\alpha} = (x-a_i)^{\varrho_{i\alpha}}\mathfrak{P}_{i\alpha}(x|a_i), \quad \mathfrak{P}_{i\alpha}(a_i|a_i) \neq 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

wo $\mathfrak{P}_{i\alpha}(x|a_i)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von $x-a_i$ fortschreitende Reihe bedeutet. Die Bezeichnung ist dabei so gewählt worden, dass

$$(3.) \qquad \varrho_{ia_i+1} = 0, \quad \varrho_{ia_i+2} = 1, \quad \ldots, \quad \varrho_{im} = m-\alpha_i-1$$

ist.

Multipliciren wir die linke Seite von (A.) mit dem Factor

$$\chi(x) = \prod_{i=1}^{\sigma} (x-a_i)^{m-\alpha_i}, \tag{4.}$$

so lauten die Wurzeln der zu $x = a_i$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung für die adjungirte Differentialgleichung von

$$\chi(x) D_x(y) = 0 \tag{5.}$$

bekanntlich*)

$$-\varrho_{i\alpha}-1. \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

Die adjungirte Differentialgleichung von (5.) ist nach dem Reciprocitätssatze der Herren *Thomé* und *Frobenius*

$$D'_x(\chi(x)\mathfrak{w}) = 0, \tag{6.}$$

die zu $x = a_i$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der zu (A.) adjungirten Differentialgleichung (A'.) hat also die Wurzeln

$$\sigma_{i\alpha} = m-\alpha_i-\varrho_{i\alpha}-1, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{7.}$$

und die zugehörigen Elemente des kanonischen Fundamentalsystems haben die Form

$$w_{i\alpha} = (x-a_i)^{\sigma_{i\alpha}} \overline{\mathfrak{P}}_{i\alpha}(x|a_i), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{8.}$$

wo $\overline{\mathfrak{P}}_{i\alpha}(x|a_i)$ eine nach $x-a_i$ fortschreitende gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, die für $x = a_i$ nicht verschwindet. Insbesondere sind die

$$w_{i,a_i+k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-a_i)$$

in der Umgebung von $x = a_i$ regulär und gehören zu den Exponenten

$$\sigma_{i,a_i+k} = m-\alpha_i-k.$$

Es sei nun w das allgemeine Integral der Differentialgleichung (A'.). Wir betrachten (vergl. Nr. III) die über die von $x = \zeta$ ausgehenden Schleifen $s_0, s_1, \ldots, s_\sigma$ erstreckten Integrale

$$\int_{s_i} w(z-x)^{\xi-1} dx. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \sigma)$$

Sei b_i ein Punkt in der Umgebung von a_i und bezeichne $\tilde{s}_i$ die von b_i aus um $x = a_i$ herumgelegte Schleife, so ist

$$\int_{s_i} w(z-x)^{\xi-1} dx = \int_{\zeta}^{b_i} (w-\theta_i w)(z-x)^{\xi-1} dx + \int_{\tilde{s}_i} w(z-x)^{\xi-1} dx,$$

*) *Fuchs,* dieses Journal Bd. 76, S. 180.

wenn $\theta_i w$ diejenige Lösung von (A'.) bedeutet, in welche sich w nach einem einfachen positiven Umlaufe von x um den Punkt $x = a_i$ verwandelt hat, und das erste Integral auf der rechten Seite auf directem Wege erstreckt wird. Sei

$$w = \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha^{(i)} w_{i\alpha},$$

also in der Umgebung von $x = a_i$

$$w = \sum_{\alpha=1}^{a_i} c_\alpha^{(i)} w_{i\alpha} + \mathfrak{P}(x|a_i),$$

wo $\mathfrak{P}(x|a_i)$ eine nach $x-a_i$ fortschreitende gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, so ist

$$\int_{s_i} w(z-x)^{\xi-1} dx = \sum_{\alpha=1}^{a_i} c_\alpha^{(i)} \int_{s_i} w_{i\alpha}(z-x)^{\xi-1} dx$$

und ferner

$$w - \theta_i w = \sum_{\alpha=1}^{a_i} c_\alpha^{(i)} (w_{i\alpha} - \theta_i w_{i\alpha}).$$

Wir haben folglich

$$\int_{s_i} w(z-x)^{\xi-1} dx = \sum_{\alpha=1}^{a_i} c_\alpha^{(i)} A_{i\alpha},$$

woselbst

$$A_{i\alpha} = \int_{s_i} w_{i\alpha}(z-x)^{\xi-1} dx$$

gesetzt wurde. — Wir können uns also, was die über die Schleifen $s_1, s_2, \ldots, s_\sigma$ erstreckten Integrale anlangt, auf die Betrachtung der Ausdrüke

$$A_{i\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, a_i;\ i = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

beschränken, deren Anzahl gleich m ist.

Beachten wir, dass

$$\theta_i w_{i\alpha} = \varepsilon_{i\alpha} w_{i\alpha}, \quad \varepsilon_{i\alpha} = e^{2\pi\sigma_{i\alpha}\sqrt{-1}}$$

ist, so können wir $A_{i\alpha}$ in die Form setzen

$$A_{i\alpha} = (1-\varepsilon_{i\alpha}) \int_{\zeta}^{b_i} w_{i\alpha}(z-x)^{\xi-1} dx + \int_{s_i} w_{i\alpha}(z-x)^{\xi-1} dx.$$

Um die über die Schleife s_0 zu erstreckenden Integrale darzustellen, nehmen wir irgend ein Fundamentalsystem $w_1, w_2, \ldots, w_m$, der Differential-

gleichung (A'.) und setzen

$$Z_\beta = \int_{s_0} w_\beta (z-x)^{\xi-1} dx; \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, m)$$

dann sind auch die m Integrale

$$Z_{i\alpha} = \int_{s_0} w_{i\alpha} (z-x)^{\xi-1} dx \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \sigma \\ \alpha = 1, 2, \ldots, a_i \end{pmatrix}$$

durch $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ linear homogen und mit constanten Coefficienten darstellbar.

Wir fragen nunmehr nach den Aenderungen, welche die als Functionen von z aufgefassten Schleifenintegrale $A_{i\alpha}, Z_\beta$ erleiden, wenn die unabhängige Variable geschlossene Wege in ihrer Ebene durchläuft. Singuläre Stellen dieser Integrale können nebst den Punkten

$$z = a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\sigma$$

nur noch die Punkte $z = \zeta$ und $z = \infty$ sein; wir haben also nur das Verhalten der in Rede stehenden Integrale bei einfachen geschlossenen Umläufen von z um die Punkte

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\sigma, \quad \zeta$$

zu untersuchen, und wollen uns hierbei der von Herrn *Fuchs* begründeten *„Methode der veränderlichen Integrationswege"* bedienen (bei Herrn *Fuchs**) sind es die veränderlichen Querschnitte der daselbst betrachteten *Riemann*schen Fläche), einer Methode, die später auch von vielen anderen Autoren bei ähnlichen Untersuchungen angewandt worden ist**).

Denken wir uns in der Ebene der Integrationsvariabeln x die Punkte

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\sigma, \quad z, \quad \zeta$$

nebst den von ζ aus nach den übrigen dieser Punkte hin gelegten Schleifen fixirt, und verfolgen dann die Aenderungen der $A_{i\alpha}, Z_\beta$, wenn wir z geschlossene Umläufe um $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, \zeta$ vollziehen lassen. Die von ζ ausgehenden Schleifen, dürfen niemals durch einen der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, z$ hindurchgehen; wenn sich z bewegt, so werden sich folglich auch die Schleifen verändern müssen, so wie z auf seinem Wege eine derselben

---

*) Dieses Journal Bd. 71.

**) *Hossenfelder,* Mathem. Annalen Bd. 4; *Jordan,* Cours d'Analyse Bd. III; *Goursat,* Acta Mathematica Bd. 2; *Nekrassoff,* Mathem. Annalen Bd. 38; *Broecker,* Inaugural-Dissertation (Berlin, 1893); u. A.

trifft. D. h. also, wenn z eine geschlossene Bahn beschreibt, so treibt es die Schleifen (die man sich mit Herrn *Nekrassoff* zweckmässig als biegsame und ausdehnbare Fäden vorstellen mag) so lange vor sich her, bis es ungehindert in seine Ausgangslage zurückkehren kann. Die Aenderung, die ein Integral

$$\int_{s_i} w(z-x)^{\xi-1}dx$$

hierbei erleidet, hängt demnach von zwei Umständen ab: einerseits von der Aenderung des Integrationsweges, andererseits aber auch davon, ob gewisse Theile des Integrationsweges innerhalb des von z beschriebenen Umlaufes liegen; für die solchen Theilen des Integrationsweges entsprechenden Elemente des Integrales multiplicirt sich nämlich der Factor

$$(z-x)^{\xi-1}$$

des Integranden mit der Einheitswurzel

$$\varepsilon = e^{2\pi\xi\sqrt{-1}}.$$

Verfolgen wir die Aenderung der Integrationsschleifen, wenn z einen einfachen geschlossenen Weg im positiven Sinne um den Punkt a_i vollzieht, so ist zunächst evident, dass die Schleifen s_k für $k \neq i$ keinerlei Veränderung erfahren. Dagegen ändern sich s_0 und s_i und zwar in verschiedener Weise, je nach der gegenseitigen Lage der Punkte ζ, z, a_i. Wenn das von diesen Punkten gebildete Dreieck in der durch die angegebene Reihenfolge der Ecken bestimmten Richtung so durchlaufen wird, dass die von demselben eingeschlossene Fläche zur Linken bleibt — wir wollen diese Lage als die Lage I bezeichnen —, so verwandelt sich s_i in

$$s_i' = s_0 s_i s_0^{-1}$$

und s_0 in

$$s_0' = s_0 s_i s_0 s_i^{-1} s_0^{-1}.$$

Dagegen wird, falls die Reihenfolge ζ, z, a_i eine Umlaufung des Dreiecks bestimmt, bei der die Dreiecksfläche zur Rechten bleibt — wir bezeichnen diese Lage als Lage II —, die Schleife s_i in

$$s_i'' = s_i s_0 s_i s_0^{-1} s_i^{-1}$$

und s_0 in

$$s_0'' = s_i s_0 s_i^{-1}$$

übergehen. — Bemerken wir gleich, dass, wenn wir uns den geschlossenen

Weg von z unendlich nahe um den Punkt a_i herum gelegt denken, nur der in unendlicher Nachbarschaft von a_i befindliche Theil der Schleife s_i beziehungsweise der in unendlicher Nachbarschaft von z befindliche Theil der Schleife s_0 innerhalb dieses Weges verbleibt. Der auf diesen „Schleifenkopf" bezügliche Theil des Integrales liefert aber im allgemeinen einen unendlich kleinen Beitrag, so dass wir also die Aenderung des Integranden bei Umläufen von z um die Punkte a_i ausser Acht lassen können. — Bezeichnen wir durch $\theta_i f(z)$ dasjenige, was aus einer Function $f(z)$ von z wird, wenn die unabhängige Variable einen einfachen Umlauf im positiven Sinne um den Punkt a_i vollzieht, so ist demnach:

für die Lage I

$$\theta_i A_{i\alpha} = \int_{s_i'} w_{i\alpha}(z-x)^{\xi-1}\,dx = \int_{s_0} w_{i\alpha}(z-x)^{\xi-1} + \varepsilon \int_{s_i} w_{i\alpha}(z-x)^{\xi-1}\,dx$$

$$+ \varepsilon\varepsilon_{i\alpha} \int_{s_0^{-1}} w_{i\alpha}(z-x)^{\xi-1}\,dx,$$

d. h. nach einfachen Umformungen

$$\theta_i A_{i\alpha} = \varepsilon A_{i\alpha} + (1-\varepsilon_{i\alpha}) Z_{i\alpha}, \tag{9.}$$

und analog

$$\theta_i Z_\beta = Z_\beta + (\varepsilon-\varepsilon^2)\int_{s_i} w_\beta (z-x)^{\xi-1}\,dx - \varepsilon \int_{s_0} (w_\beta - \theta_i w_\beta)(z-x)^{\xi-1}\,dx; \tag{10.}$$

insbesondere hat man

$$\theta_i Z_{i\alpha} = (1-\varepsilon+\varepsilon\varepsilon_{i\alpha}) Z_{i\alpha} + (\varepsilon-\varepsilon^2) A_{i\alpha}. \tag{11.}$$

Für die Lage II ist ebenso

$$\theta_i A_{i\alpha} = (1-\varepsilon_{i\alpha}+\varepsilon\varepsilon_{i\alpha}) A_{i\alpha} + (\varepsilon_{i\alpha}-\varepsilon_{i\alpha}^2) Z_{i\alpha}, \tag{12.}$$

$$\theta_i Z_\beta = Z_\beta + (1-\varepsilon)\int_{s_i} w_\beta (z-x)^{\xi-1}\,dx - \int_{s_0} (w_\beta - \theta_i w_\beta)(z-x)^{\xi-1}\,dx, \tag{13.}$$

und insbesondere

$$\theta_i Z_{i\alpha} = \varepsilon_{i\alpha} Z_{i\alpha} + (1-\varepsilon) A_{i\alpha}. \tag{14.}$$

Dagegen ist für beide Lagen

$$\theta_i A_{k\alpha} = A_{k\alpha}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, a_k) \tag{15.}$$

wenn $i \neq k$ ist.

Lassen wir nunmehr z einen Umlauf im positiven Sinne um ζ vollziehen, so verwandelt sich jedes s_i in

$$\bar{s}_i = s_0^{-1} s_i s_0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

während die Schleife s_0 ungeändert in ihre Ausgangslage zurückkehrt; und zwar gilt dies gleichmässig für beide Lagen I, II. Denken wir uns aber den Umlauf von z unendlich nahe an den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ vorübergeführt, so liegen sowohl die Schleife s_0 als auch die sämmtlichen Schleifen s_i, mit Ausnahme ihrer in unendlicher Nähe der Punkte a_i befindlichen Theile, innerhalb des von z beschriebenen Umlaufes. Es wird sich also der Integrand der $A_{i\alpha}$, Z_β mit dem Factor ε multiplicirt haben. — Bezeichnen wir durch ein vorgesetztes $\bar{\theta}$ die dem in Rede stehenden Umlaufe von z entsprechende Aenderung einer Function dieser Variablen, so ist also

$$\bar{\theta} A_{i\alpha} = \varepsilon \left\{ \int_{s_0^{-1}} w_{i\alpha}(z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon^{-1} \int_{s_i} w_{i\alpha}(z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon^{-1}\varepsilon_{i\alpha} \int_{s_0} w_{i\alpha}(z-x)^{\xi-1} dx \right\}$$

d. h. nach einfacher Reduction

$$\bar{\theta} A_{i\alpha} = A_{i\alpha} - (1-\varepsilon_{i\alpha}) Z_{i\alpha} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \sigma \\ \alpha = 1, 2, \ldots, a_i \end{pmatrix} \tag{16.}$$

und endlich

$$\bar{\theta} Z_\beta = \varepsilon Z_\beta. \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, m) \tag{17.}$$

VI.

Ist eine Differentialgleichung mit ganzen rationalen Coefficienten

$$\partial_x(\mathfrak{y}) = \sum_{k=0}^{n} p_k \frac{d^k \mathfrak{y}}{dx^k} = 0 \tag{1.}$$

vorgelegt, wo p_n eine ganze Function $m$ten Grades bedeutet und $m > n$ ist, so gehen wir von derselben zu der Differentialgleichung

$$D_x(y) = \sum_{k=0}^{m} P_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} = 0 \tag{A.}$$

über, indem wir

$$\mathfrak{y} = \frac{d^{m-n} y}{dx^{m-n}}, \quad D_x(y) = \gamma \partial_x(\mathfrak{y}) \tag{2.}$$

setzen, wo γ eine beliebige Constante bedeutet, so dass also

$$P_{k+m-n}(x) = \gamma p_k, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

$$P_\lambda(x) = 0 \qquad (\lambda < m-n)$$

ist. Die Differentialgleichungen (1.) und (A.) gehören offenbar gleichzeitig zur *Fuchs*schen Klasse; wir nehmen an, dass dies der Fall sei. Man hat dann nach dem Reciprocitätssatze zwischen den adjungirten Differential-

ausdrücken der linken Seiten von (1.) und (A.) die Beziehung

$$(3.) \qquad D'_x(w) = (-1)^{m-n}\gamma \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} \partial'_x(w),$$

und die Beziehung von *Lagrange*

$$fD_x(g) - gD'_x(f) = \frac{d}{dx} D_x(g, f)$$

nimmt die Gestalt an

$$\gamma\Big[f\partial_x\Big(\frac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}\Big) - (-1)^{m-n} g \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} \partial'_x(f)\Big] = \frac{d}{dx} D_x(g, f).$$

Da nun direct

$$f\partial_x\Big(\frac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}\Big) - \frac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}} \partial'_x(f) = \frac{d}{dx} \partial_x\Big(\frac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}, f\Big)$$

ist, so haben wir, wenn für f eine willkürliche Lösung w der Differentialgleichung

$$(A'.) \qquad D'_x(w) = 0$$

genommen wird,

$$(4.) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx} D_x(g, w) = \gamma\Big\{\dfrac{d}{dx}\partial_x\Big(\dfrac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}, w\Big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{d^{m-n}g}{dx^{m-n}}(c_0 + c_1 x + \cdots + c_{m-n-1}x^{m-n-1})\Big\}, \end{cases}$$

wo $c_0, c_1, \ldots, c_{m-n-1}$ Integrationsconstanten bedeuten, die sämmtlich verschwinden, wenn die Function w auch die Differentialgleichung

$$(5.) \qquad \partial'_x(w) = 0$$

befriedigt.

Sei nach wie vor

$$\gamma p_n(x) = P_m(x) = \prod_{i=1}^{\sigma} (x - a_i)^{\alpha_i}$$

und mögen

$$r_{i1}, \quad r_{i2}, \quad \ldots, \quad r_{i\alpha_i}, \quad 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad n - \alpha_i - 1$$

die Wurzeln der zu $x = a_i$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von (1.) bedeuten, so sind die nicht nothwendig ganzzahligen Wurzeln der entsprechenden determinirenden Fundamentalgleichungen für die adjungirten Differentialgleichungen von (1.) und (A.)

$$\sigma_{i\alpha} = -r_{i\alpha} + n - \alpha_i - 1, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i)$$

zu denen für die Differentialgleichung (5.) noch die ganzzahligen Wurzeln

$$0, \quad 1, \quad \ldots, \quad n - \alpha_i - 1,$$

für die Differentialgleichung (A′.) nebst diesen noch

$$n-\alpha_i, \quad \ldots, \quad m-\alpha_i-1$$

hinzutreten. Diejenigen Elemente des zum Punkte $x=a_i$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems, die zu den Wurzeln

$$\sigma_{i\alpha} \quad (\alpha=1, 2, \ldots, \alpha_i); \qquad 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad n-\alpha_i-1$$

der determinirenden Fundamentalgleichung als Exponenten gehören, sind für die Differentialgleichungen (A′.) und (5.) dieselben.

Diese einfachen Bemerkungen in Verbindung mit der aus der Gleichung (2.) und aus (10.) Nr. IV direct folgenden Gleichung

$$(6.) \qquad \begin{cases} D_x((z-x)^{\xi-1}) = \gamma(\xi-1)\ldots(\xi+n-m)(-1)^{m-n}\partial_x((z-x)^{\xi+n-m-1}) \\ \qquad\qquad = E_z((z-x)^{\xi-1}) \end{cases}$$

genügen um zu zeigen, dass die Differentialgleichungen (1.) und (A.) im wesentlichen auf dieselbe Differentialgleichung (E.) führen, und dass sie beide die Integration von (E.) bewirken, ebenso wie auch umgekehrt (E.) zur Integration von (1.) sowohl wie von (A.) dienen kann.

Nimmt man in (1.) $n=1$, so muss jedes der α_i gleich Eins sein, wenn die Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse angehören soll. Die Coefficienten der zugehörigen Differentialgleichung (E.) ergeben sich aus den Gleichungen (1.) der Nr. IV nach leichten Umformungen in der Gestalt

$$Q_\nu(z) = \frac{(-1)^{m-\nu-1}}{(\xi-1)\ldots(\xi-m+1)}\{P_m^{(m-\nu)}(z)(\xi-\nu-1)_{m-\nu}+P_{m-1}^{(m-\nu-1)}(z)(\xi-\nu-1)_{m-\nu-1}\};$$

es ist also in diesem Falle (E.) die *Tissot-Pochhammer*sche Differentialgleichung, der die sogenannte allgemeine hypergeometrische Reihe genügt*). Indem wir die Bezeichnungen der Nr. V anwenden, ist also $\sigma=m$, und wenn

$$\frac{P_{m-1}(x)}{P_m(x)} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_k}{x-a_k}$$

gesetzt wird,

$$(7.) \qquad w_{i1} = (x-a_1)^{\beta_1-1}(x-a_2)^{\beta_2-1}\ldots(x-a_m)^{\beta_m-1} = w_1, \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

d. h. gleich der Lösung der Differentialgleichung

$$\partial'_x(w) = -\frac{d}{dx}(p_1 w)+p_0 w = 0$$

zu nehmen, während sich das allgemeine Integral der Differentialgleichung

---

*) *Pochhammer*, dieses Journal Bd. 73.

(A′.) in der Form

$$w = (x-a_1)^{\beta_1-1}\ldots(x-a_m)^{\beta_m-1}\left\{c+\int\frac{c_0+c_1x+\cdots+c_{m-2}x^{m-2}}{(x-a_1)^{\beta_1}\ldots(x-a_m)^{\beta_m}}\,dx\right\}$$

darstellt, wo c, c_0, c_1, …, c_{m-2} willkürliche Constanten bedeuten. Es ist also

$$A_{i1}=\int_{s_i} w_1(z-x)^{\xi-1}dx;\quad Z_{i1}=\int_{s_0} w_1(z-x)^{\xi-1}dx=Z, \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

und die Aenderungen, welche diese Integrale bei Umläufen von z erfahren, ergeben sich aus den allgemeinen Formeln der vorhergehenden Nummer, indem wir daselbst

$$\varepsilon_{i1}=e^{2\pi\beta_i\sqrt{-1}} \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

setzen. Sind die β_1, β_2, …, β_m und ξ rationale Brüche mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner N, so ist (E.) die Differentialgleichung der die Periodicitätsmoduln des zu einer binomischen Gleichung N-ten Grades gehörigen *Abel*schen Integrals

$$\int(x-a_1)^{\beta_1-1}\ldots(x-a_m)^{\beta_m-1}(x-z)^{\xi-1}dx$$

als Functionen des Verzweigungspunktes z Genüge leisten*). Für

$$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_m=\xi=\tfrac{1}{2}$$

haben wir in (E.) insbesondere die Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln eines Systems von hyperelliptischen Integralen erster Gattung wie sie zuerst von Herrn *Fuchs***) aufgestellt und behandelt worden ist. Nimmt man $m=2$, $a_1=0$, $a_2=1$ so ergiebt sich die *Legendre*sche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}};$$

wir kommen auf diese besonderen Fälle in der Nr. VIII zurück.

VII.

Wir knüpfen an die Untersuchungen der Nr. V an und wollen nunmehr die Frage erörtern, ob zwischen den $2m$ Integralen

$$A_{i\alpha}, \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,\sigma \\ \alpha=1,2,\ldots,a_i\end{pmatrix}$$

$$Z_\beta \qquad (\beta=1,2,\ldots,m)$$

*) Mit dieser Differentialgleichung beschäftigt sich die bereits erwähnte Inaugural-Dissertation des Herrn *Broecker*.

**) Dieses Journal, Bd. 71.

eine homogene lineare Beziehung mit von z unabhängigen Coefficienten bestehen kann.

Zunächst ist ersichtlich, dass im allgemeinen weder zwischen den α_i über die Schleife s_i erstreckten Integralen $A_{i\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i)$ noch zwischen den m über die Schleife s_0 erstreckten Integralen Z_β $(\beta = 1, 2, \ldots, m)$ eine homogene lineare Beziehung möglich ist, da ja die bei der Bildung dieser Integrale benutzten Lösungen $w_{i\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i)$ beziehungsweise w_β $(\beta = 1, 2, \ldots, m)$ der Differentialgleichung (A'.) linear unabhängig sind.

Es kann aber auch keine lineare homogene Combination der $A_{i\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i)$

$$(1.) \qquad \gamma_1 A_{i1} + \gamma_2 A_{i2} + \cdots + \gamma_{\alpha_i} A_{i\alpha_i}$$

gleich einer homogenen linearen Verbindung der übrigen

$$A_{k\beta} \qquad (k \neq i,\ \beta = 1, 2, \ldots, \alpha_k)$$

sein. Denn wäre dies der Fall, so müsste zufolge der Gleichung (15.) Nr. V der Ausdruck (1.) ungeändert bleiben, wenn z einen einfachen Umlauf um den Punkt a_i vollzieht, d. h. es müsste

$$\theta_i \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} \gamma_\alpha A_{i\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} \gamma_\alpha A_{i\alpha},$$

also nach den Formeln der Nr. V (S. 116) in der Lage I,

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} \gamma_\alpha \{(1-\varepsilon) A_{i\alpha} - (1-\varepsilon_{i\alpha}) Z_{i\alpha}\} = 0,$$

in der Lage II,

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} \gamma_\alpha \varepsilon_{i\alpha} \{(1-\varepsilon) A_{i\alpha} - (1-\varepsilon_{i\alpha}) Z_{i\alpha}\} = 0$$

sein. Nun ist aber, wenn wir

$$(2.) \qquad (1-\varepsilon) A_{i\alpha} - (1-\varepsilon_{i\alpha}) Z_{i\alpha} = u_{i\alpha}$$

setzen, für beide Lagen

$$(\beta.) \qquad \theta_i u_{i\alpha} = \varepsilon \varepsilon_{i\alpha} u_{i\alpha},$$

und hieraus schliesst man in bekannter Weise*), da die $\varepsilon_{i\alpha}$ als von einander verschiedene Grössen vorausgesetzt wurden, dass zwischen den $u_{i\alpha}$ $(\alpha = 1,2, \ldots, \alpha_i)$ keine homogene lineare Beziehung mit von z unabhängigen Coefficienten bestehen kann.

---

*) ***Fuchs,*** dieses Journal Bd. 66, S. 134.

Es sind also die m Integrale

$$A_{i\alpha} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \sigma \\ \alpha = 1, 2, \ldots, a_i \end{pmatrix}$$

linear unabhängig.

Sollte endlich eine lineare homogene Combination dieser $A_{i\alpha}$ gleich einem Z sein, d. h.

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{\alpha=1}^{a_i} \gamma_{i\alpha} A_{i\alpha} = Z = \int_{s_0} w(z-x)^{\xi-1} dx,$$

so müsste diese Beziehung auch nach einem beliebigen Umlaufe von z bestehen bleiben; die Differenz

$$(3.) \qquad Z - \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{\alpha=1}^{a_i} \gamma_{i\alpha} A_{i\alpha}$$

dürfte also bei keinem Umlaufe von z eine Aenderung erfahren. Nun bleiben aber bei einem Umlaufe um a_ν die $A_{i\alpha}$, wenn $i \neq \nu$ ist, ungeändert, also müsste

$$(4.) \qquad \theta_\nu \Big(Z - \sum_{\alpha=1}^{a_\nu} \gamma_{\nu\alpha} A_{\nu\alpha} \Big) = Z - \sum_{\alpha=1}^{a_\nu} \gamma_{\nu\alpha} A_{\nu\alpha}$$

sein. Denken wir uns die Lösung w von (A'.) durch das zu $x = a_i$ gehörige kanonische Fundamentalsystem dargestellt:

$$(5.) \qquad w = \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha^{(i)} w_{i\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{a_i} c_\alpha^{(i)} w_{i\alpha} + \mathfrak{P}_i(x|a_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

wo die $c_\alpha^{(i)}$ Constanten, die $\mathfrak{P}_i(x|a_i)$ in der Umgebung von $x = a_i$ reguläre Functionen bedeuten, so ist

$$(6.) \qquad \int_{s_i} w(z-x)^{\xi-1} dx = \sum_{\alpha=1}^{a_i} c_\alpha^{(i)} A_{i\alpha}$$

und

$$w - \theta_i w = \sum_{\alpha=1}^{a_i} c_\alpha^{(i)} (1-\varepsilon_{i\alpha}) w_{i\alpha}.$$

Nehmen wir nun um die Vorstellung zu fixiren an, dass sich ζ und z mit jedem der Punkte a_i etwa in der Lage I befinde, dann ist zufolge der in der Nr. V abgeleiteten Formeln

$$\begin{aligned} \theta_i Z &= Z + (\varepsilon - \varepsilon^2) \sum_{\alpha=1}^{a_i} c_\alpha^{(i)} A_{i\alpha} - \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{a_i} c_\alpha^{(i)} (1-\varepsilon_{i\alpha}) Z_{i\alpha} \\ &= Z + \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{a_i} c_\alpha^{(i)} u_{i\alpha}, \\ \theta_i A_{i\alpha} &= A_{i\alpha} - u_{i\alpha}. \end{aligned}$$

Das Bestehen der Gleichung (4.) ist also gleichbedeutend mit

$$\varepsilon \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} c_\alpha^{(i)} u_{i\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} \gamma_{i\alpha} u_{i\alpha} = 0,$$

und hieraus folgt, da die $u_{i\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i)$ linear unabhängig sind, mit Nothwendigkeit

$$\gamma_{i\alpha} = -\varepsilon c_\alpha^{(i)}. \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i \\ i = 1, 2, \ldots, \sigma\end{pmatrix} \tag{7.}$$

Die Differenz (3.) bleibt also dann und nur dann bei allen Umläufen von z um die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ ungeändert, wenn die Constanten $\gamma_{i\alpha}$ durch die Gleichungen (7.) bestimmt werden. Wir fragen nun weiter, kann diese Differenz, d. h. kann

$$Z + \varepsilon \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} c_\alpha^{(i)} A_{i\alpha} = \int_{s_0} w(z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon \sum_{i=1}^{\sigma} \int_{s_i} w(z-x)^{\xi-1} dx \tag{8.}$$

auch ungeändert bleiben, wenn z einen Umlauf um den Punkt ζ vollzieht?

Da sich bei einem solchen Umlaufe von z das Integral

$$\int_{s_i} w(z-x)^{\xi-1} dx$$

nach den Ergebnisen der Nr. V in die Differenz

$$\int_{s_i} w(z-x)^{\xi-1} dx - \int_{s_0} (w - \theta_i w)(z-x)^{\xi-1} dx$$

verwandelt, so wird die Summe (8.) in

$$\varepsilon \int_{s_0} w(z-x)^{\xi-1} dx + \varepsilon \sum_{i=1}^{\sigma} \int_{s_i} w(z-x)^{\xi-1} dx - \varepsilon \sum_{i=1}^{\sigma} \int_{s_0} (w - \theta_i w)(z-x)^{\xi-1} dx$$

übergehen. Soll dies mit (8.) übereinstimmen, so muss also

$$\int_{s_0} \Big[(\varepsilon - 1) w - \varepsilon \sum_{i=1}^{\sigma} (w - \theta_i w)\Big](z-x)^{\xi-1} dx = 0$$

und folglich im allgemeinen

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \theta_i w = \frac{1 - \varepsilon + \sigma\varepsilon}{\varepsilon} w \tag{9.}$$

sein. Wenn umgekehrt ein Integral w dieser Gleichung genügt, so ist die Summe (8.) in der ganzen z-Ebene unverzweigt, also zufolge der analytischen Beschaffenheit der Functionen Z und $A_{i\alpha}$ eine rationale Function von z.

Sei nun $w_1, w_2, \ldots, w_m$ ein beliebiges Fundamentalsystem der zu (A.) adjungirten Differentialgleichung (A′.) und

$$\theta_i w_\lambda = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{\lambda k}^{(i)} w_k, \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 1, 2, \ldots, m \\ i = 1, 2, \ldots, \sigma\end{pmatrix}$$

so dass also

$$A^{(i)} = (\alpha_{\lambda k}^{(i)}) \qquad \binom{i=1, 2, \ldots, \sigma}{\lambda, k=1, 2, \ldots, m}$$

die zu diesem Fundamentalsysteme gehörigen Fundamentalsubstitutionen bedeuten. Soll dann ein Integral

$$w = \sum_{\lambda=1}^{m} c_\lambda w_\lambda$$

so bestimmt werden, dass

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \theta_i w = \delta w$$

ist, wo δ eine Constante bedeutet, d. h. soll

$$\sum_{\lambda=1}^{m} c_\lambda \sum_{k=1}^{m} w_k \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_{\lambda k}^{(i)} = \delta \sum_{k=1}^{m} c_k w_k$$

sein, so müssen die Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ den Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{m} c_\lambda \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_{\lambda k}^{(i)} - \delta c_k = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, m)$$

genügen. Es muss also δ eine Lösung der Gleichung

$$\left| \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_{\lambda k}^{(i)} - \delta \delta_{\lambda k} \right| = 0 \qquad (\lambda, k=1, 2, \ldots, m) \tag{10.}$$

sein, wo

$$\delta_{\lambda k} = 0 \text{ für } \lambda \neq k, \quad \delta_{\lambda\lambda} = 1,$$

gesetzt wurde, und es ist leicht einzusehen, dass diese Gleichung (10.) unabhängig ist von der Wahl des Fundamentalsystems $w_1, w_2, \ldots, w_m$*). Sei in der That

$$\overline{w}_\lambda = \sum_{k=1}^{m} \beta_{\lambda k} w_k \qquad (\lambda=1, 2, \ldots, m)$$

ein mit $w_1, w_2, \ldots, w_m$ durch die Substitution

$$(\beta_{\lambda k}) = B \qquad (\lambda, k=1, 2, \ldots, m)$$

verknüpftes Fundamentalsystem, so lauten die zu $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_m$ gehörigen Fundamentalsubstitutionen

$$\overline{A}^{(i)} = B A^{(i)} B^{-1},$$

d. h. wenn

$$B^{-1} = (\beta'_{\lambda k}), \quad \overline{A}^{(i)} = (\overline{\alpha}_{\lambda k}^{(i)}) \qquad (\lambda, k=1, 2, \ldots, m)$$

gesetzt wird, so ist

$$\overline{\alpha}_{\lambda k}^{(i)} = \sum_{g=1}^{m} \sum_{h=1}^{m} \beta_{\lambda g} \alpha_{gh}^{(i)} \beta'_{hk}$$

---

*) Vgl. ***Fuchs,*** dieses Journal Bd. 66, S. 133.

und folglich auch

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \bar{\alpha}_{\lambda k}^{(i)} = \sum_{g=1}^{m} \sum_{h=1}^{m} \beta_{\lambda g} \sum_{i=1}^{\sigma} \alpha_{gh}^{(i)} \beta'_{hk};$$

hieraus folgt aber die Invarianz der Gleichung (10.), wenn man die $\alpha_{\lambda k}^{(i)}$ durch die $\bar{\alpha}_{\lambda k}^{(i)}$ ersetzt in ähnlicher Weise, wie die Invarianz der zu einer Substitution gehörigen Fundamentalgleichung bewiesen wird. Die Gleichung (10.) hängt also ausschliesslich von der Natur der Differentialgleichung (A.) ab, und es wird demnach nur für ganz besondere Werthe von ξ die Grösse

$$\frac{1-\varepsilon+\sigma\varepsilon}{\varepsilon}$$

eine Wurzel δ dieser Gleichung sein können; *im allgemeinen wird sich also kein Integral w angeben lassen, welches der Gleichung* (9.) *Genüge leistet.* Aber selbst für die besonderen Werthe von ξ, bei welchen die Bestimmung eines solchen Integrales w möglich ist, wird die mit demselben gebildete Summe (8.) nicht nothwendig identisch verschwinden. Wir können also sagen, dass im allgemeinen keine homogene lineare Verbindung der $A_{i\alpha}$ gleich einem Z sein wird, und damit ist zugleich bewiesen, *dass die $2m$ Integrale*

$$A_{i\alpha}, \quad Z_\beta \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i; \quad \beta = 1, 2, \ldots, m)$$

im allgemeinen linear unabhängig sind.

In dem am Schlusse der Nr. VI erwähnten Falle, wo (E.) die Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln eines elliptischen Integrals erster Gattung darstellt, ist z. B.

$$\int_{s_1} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}, \quad \int_{s_2} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}}, \quad \int_{s_0} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}},$$

$$\int_{s_0} \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(z-x)}} \log \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\, dx$$

ein solches System von $2m = 4$ Integralen; man kann leicht direct sehen, dass dieselben linear unabhäng sind.

VIII.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, Systeme von $2m$ Constanten

$$\gamma_{i\alpha}, \quad \gamma_\beta \qquad (i = 1, 2, \ldots, \sigma; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i; \quad \beta = 1, 2, \ldots, m)$$

zu bestimmen, für welche die Summe

$$(1.) \qquad u = \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{\alpha=1}^{\alpha_i} \gamma_{i\alpha} A_{i\alpha} + \sum_{\beta} \gamma_\beta Z_\beta$$

eine Lösung der Differentialgleichung (E.) darstellt.

Zufolge der Gleichung (5.) Nr. IV ist, wenn w eine Lösung der zu (A.) adjungirten Differentialgleichung (A'.) bedeutet,

$$(2.) \qquad E_z\Big(\int w(z-x)^{\xi-1}dx\Big) = \int dD_x((z-x)^{\xi-1},\ w).$$

Der auf der rechten Seite dieser Gleichung auftretende bilineare Differentialausdruck

$$D_x((z-x)^{\xi-1},\ w) = \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}(-1)^{\lambda}\frac{d^{\lambda}(P_{\lambda}w)}{dx^{\lambda}}\,\frac{d^{\nu-\lambda-1}(z-x)^{\xi-1}}{dx^{\nu-\lambda-1}}$$

hat die Gestalt

$$D_x((z-x)^{\xi-1},\ w) = (z-x)^{\xi-m}\sum_{\nu=0}^{m-1}(z-x)^{\nu}\sum_{\lambda=0}^{\nu}P_{\nu\lambda}(x)w^{(\lambda)}(x),$$

wo die $P_{\nu\lambda}(x)$ ganze rationale Functionen von x bedeuten, die sich aus den Coefficienten $P_k(x)$ der Differentialgleichung (A.) und aus deren Ableitungen zusammensetzen, und $w^{(\lambda)}(x)$ den Werth der λten Ableitung des Integrals w im Punkte x darstellt. Es ist folglich nach (2.)

$$E_z(A_{i\alpha}) = \int_{s_i} dD_x((z-x)^{\xi-1},\ w_{i\alpha}) = (z-\zeta)^{\xi-m}\sum_{\nu=0}^{m-1}(z-\zeta)^{\nu}\sum_{\lambda=0}^{\nu}P_{\nu\lambda}(\zeta)(\varepsilon_{i\alpha}-1)w_{i\alpha}^{(\lambda)}(\zeta),$$

$$E_z(Z_{\beta}) = \int_{s_0} dD_x((z-x)^{\xi-1},\ w_{\beta}) = (z-\zeta)^{\xi-m}(\varepsilon-1)\sum_{\nu=0}^{m-1}(z-\zeta)^{\nu}\sum_{\lambda=0}^{\nu}P_{\nu\lambda}(\zeta)w_{\beta}^{(\lambda)}(\zeta),$$

und daher

$$E_z(u) = (z-\zeta)^{\xi-m}\sum_{\nu=0}^{m-1}(z-\zeta)^{\nu}\sum_{\lambda=0}^{\nu}P_{\nu\lambda}(\zeta)\Big\{\sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{\alpha=1}^{a_i}\gamma_{i\alpha}(\varepsilon_{i\alpha}-1)w_{i\alpha}^{(\lambda)}(\zeta) + (\varepsilon-1)\sum_{\beta=1}^{m}\gamma_{\beta}w_{\beta}^{(\lambda)}(\zeta)\Big\}.$$

Soll dieser Ausdruck identisch, d. h. für jeden Werth von z verschwinden, so muss

$$(3.) \qquad \sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{\alpha=1}^{a_i}\gamma_{i\alpha}(\varepsilon_{i\alpha}-1)w_{i\alpha}^{(\lambda)}(\zeta)+(\varepsilon-1)\sum_{\beta=1}^{m}\gamma_{\beta}w_{\beta}^{(\lambda)}(\zeta) = 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

sein. Dieses System von m linearen homogenen Gleichungen für die $2m$ Unbekannten $\gamma_{i\alpha}$, γ_{β} ist vom Range m, weil die Determinante

$$\left|(\varepsilon-1)w_{\beta}^{(\lambda)}(\zeta)\right| \qquad \begin{pmatrix}\beta = 1, 2, \ldots, m\\ \lambda = 0, 1, \ldots, m-1\end{pmatrix}$$

als Determinante eines Fundamentalsystems in dem regulären Punkte $x = \zeta$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Das System (3.) besitzt also nach dem Hauptsatze der Theorie linearer Gleichungssysteme genau m linear unabhängige Lösungssysteme; die mittelst derselben gebildeten Ausdrücke u stellen folglich — da, wie bewiesen wurde, die $A_{i\alpha}$, Z_{β} linear unab-

hängig sind — ein System linear unabhängiger Lösungen der Differentialgleichung (E.) dar. Wir haben also in der That aus den Schleifenintegralen $A_{i\alpha}$, Z_β ein Fundamentalsystem von (E.) zusammengesetzt. Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die so gewonnenen linearen Combinationen jener Schleifenintegrale als Lösungen von (E.) sich nur in den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, \infty$ verzweigen können, während, wie wir gesehen haben, die Schleifenintegrale selbst, auch noch in $z = \zeta$ eine Verzweigungsstelle haben.

Denken wir uns die Integrale $w_{i\alpha}$ durch das Fundamentalsystem $w_1, w_2, \ldots, w_m$ dargestellt,

$$w_{i\alpha} = \delta_1^{(i\alpha)} w_1 + \delta_2^{(i\alpha)} w_2 + \cdots + \delta_m^{(i\alpha)} w_m, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \sigma \\ \alpha = 1, 2, \ldots, a_i \end{pmatrix}$$

und nehmen in den Gleichungen (3.)

$$\gamma_\beta = \gamma \delta_\beta^{(k\nu)}, \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, m)$$

wo k eine bestimmte der Zahlen $1, 2, \ldots, \sigma$, ν eine bestimmte der Zahlen $1, 2, \ldots, \alpha_k$, γ eine Constante bedeutet. Dann erhält das System (3.) die Gestalt

$$\sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{\alpha=1}^{a_i} \gamma_{i\alpha}(\varepsilon_{i\alpha} - 1) w_{i\alpha}^{(\lambda)}(\zeta) + \gamma(\varepsilon - 1) w_{k\nu}^{(\lambda)}(\zeta) = 0,$$

und diese Gleichungen werden offenbar durch die Werthe

$$\gamma_{i\alpha} = 0 \text{ für } i \neq k, \ \alpha \neq \nu; \quad \gamma_{k\nu} = 1 - \varepsilon; \quad \gamma = 1 - \varepsilon_{k\nu}$$

befriedigt, die das Integral

$$(4.) \qquad u_{k\nu} = (1-\varepsilon) A_{k\nu} - (1 - \varepsilon_{k\nu}) Z_{k\nu}$$

der Differentialgleichung (E.) liefern. Dieses ist nach Gleichung (8.) Nr. III nichts anderes als das über die Doppelschleife

$$s_k s_0 s_k^{-1} s_0^{-1}$$

erstreckte Integral

$$\int w_{k\nu} (z - x)^{\xi - 1} dx,$$

und es kommen also auf diese Weise für $k = 1, 2, \ldots, \sigma$; $\nu = 1, 2, \ldots, \alpha_k$ die über die σ Doppelschleifen (6.) Nr. III erstreckten Integrale zum Vorschein. Wenn ε nicht gleich Eins, d. h. ξ keine ganze Zahl ist, so sind diese m Integrale $u_{k\nu}$ auch linear unabhängig. Die m Coefficientensysteme $\gamma_{i\alpha}$, γ_β, die zu denselben führen, bilden nämlich ein System von $2m.m$ Grössen, in welchem die aus den m^2 Grössen $\gamma_{i\alpha}$ gebildete Determinante den Werth $(\varepsilon - 1)^m$ hat; diese m Systeme $\gamma_{i\alpha}$, γ_β sind also linear unabhängig, wenn

$\varepsilon \neq 1$ ist. Ist $\varepsilon = 1$ und ξ eine negative ganze Zahl oder Null, so sind in (3.) die $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ willkürlich, d. h. wir haben in $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ ein Fundamentalsystem von (E.). Für $\xi = 0$ ist (E.) nach Nr. IV die mit der unabhängigen Variablen z geschriebene adjungirte Differentialgleichung von (A.); in diesem Falle sind die Z_β einfach die Darstellungen der $w_\beta(z)$ durch das *Cauchy*sche Integral

$$w_\beta(z) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} Z_\beta = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{s_0} w_\beta(x)(z-x)^{-1}\,dx.$$

Wenn ξ gleich einer negativen ganzen Zahl $-\nu$ ist, so haben wir

$$\frac{d^\nu w_\beta(z)}{dz^\nu} = \frac{(-1)^{\nu+1}\nu!}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{s_0} w_\beta(x)(z-x)^{-(\nu+1)}\,dx,$$

und (E.) ist demnach die mit der unabhängigen Variablen z geschriebene Differentialgleichung, der die νten Ableitungen der Integrale der zu (A.) adjungirten Differentialgleichung genügen.

In dem in der Nr. VI erwähnten Falle der *Tissot-Pochhammer*schen Differentialgleichung, finden wir die für diese Differentialgleichung schon anderweitig bekannten Resultate.

Um die Werthänderungen der Integrale u von (E.) bei Umläufen der unabhängigen Variablen z um die singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ zu finden, hat man nur die entsprechenden Aenderungen der A_{ia}, Z_β, wie sie in der Nr. V berechnet worden sind, in den Ausdrücken der u anzubringen. Für die u_{ia} hatten wir schon in der Nr. VII beiläufig gefunden

$$\theta_i u_{ia} = \varepsilon\varepsilon_{ia} u_{ia}; \qquad (a = 1, 2, \ldots, a_i) \tag{5.}$$

ebenso ergiebt sich, wenn k von i verschieden ist, für die Lage I

$$\theta_k u_{ia} = u_{ia} - (1-\varepsilon_{ia})\varepsilon \sum_{\lambda=1}^{a_k} c_{a\lambda}^{(ik)} u_{k\lambda} \tag{6^I.}$$

und für die Lage II

$$\theta_k u_{ia} = u_{ia} - (1-\varepsilon_{ia}) \sum_{\lambda=1}^{a_k} c_{a\lambda}^{(ik)} u_{k\lambda}, \tag{6^{II}.}$$

wo die Constanten $c_{a\lambda}^{(ik)}$ durch die Gleichungen

$$w_{ia} = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{a\lambda}^{(ik)} w_{k\lambda} \tag{7.}$$

definirt sind. Dabei ist hervorzuheben, dass man um die Ausdrücke (6^I.), (6^II.) herzustellen, nicht alle Coefficienten der „Uebergangssubstitution“ (7.)

zu kennen braucht, sondern nur die $\alpha_i \alpha_k$

$$c_{\alpha\lambda}^{(ik)} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i;\ \lambda = 1, 2, \ldots, \alpha_k)$$

derselben.

Geht man wie in der Nr. VI von der Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$\partial_x(\mathfrak{y}) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) \frac{d^k \mathfrak{y}}{dx^k} = 0 \tag{8.}$$

aus, so stellen, da ja (vgl. No. VI) die $w_{i\alpha}$ für $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ die Elemente des zu $x = a_i$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems der adjungirten Differentialgleichung

$$\partial'_x(\mathfrak{w}) = 0 \tag{9.}$$

sind, die Gleichungen (7.) für $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, die zur Differentialgleichung (9.) gehörigen Uebergangssubstitutionen dar. Es sind also für $\alpha \leqq n$ die

$$c_{\alpha,n+1}^{(ik)}, \quad \ldots, \quad c_{\alpha,m}^{(ik)}$$

gleich Null. Für $n = 1$, d. h. im Falle wo (E.) die *Tissot-Pochhammer*sche Differentialgleichung ist, sind alle α_i gleich Eins und alle w_{i1} gleich dem durch Gleichung (7.) Nr. VI (S. 119) erklärten w_1; die Gleichungen (5.), (6^{I}.), (6^{II}.) nehmen also die einfache Gestalt an

$$\theta_i u_{i1} = \varepsilon \varepsilon_{i1} u_{i1},$$

$$\theta_k u_{i1} = u_{i1} - (1 - \varepsilon_{i1}) \varepsilon u_{k1}$$

beziehungsweise

$$\theta_k u_{i1} = u_{i1} - (1 - \varepsilon_{i1}) u_{k1}.$$

In diesen letzteren Gleichungen sind die Fundamentalsubstitutionen der Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster Gattung, wie sie Herr *Fuchs* aufgestellt hat, ebenso wie die allgemeineren, zu *Abel*schen Integralen mit beliebiger binomischer Irrationalität gehörigen, wie sie später von Herrn *Broecker* gegeben worden sind als specielle Fälle enthalten.

Die Gleichungen (5.) lehren, dass die $u_{i\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i$) Elemente des zu $z = a_i$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems der Differentialgleichung (E.) sind. Nehmen wir für ζ die in der Umgebung von a_i gelegene Stelle b_i und beschränken zugleich z selbst auf die Umgebung von a_i, bezeichnen wir ferner durch l_i die von b_i aus um die Punkte a_i und z herum gelegte Doppelschleife, so können wir in

$$u_{i\alpha} = \int_{l_i} w_{i\alpha} (z - x)^{\xi - 1} dx$$

für $w_{i\alpha}$ seine in der Umgebung von $x = a_i$ gültige Entwickelung

$$w_{i\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu (x-a_i)^{\sigma_{i\alpha}+\nu}, \quad \delta_0 \neq 0,$$

einsetzen und gliedweise integriren. Es ergiebt sich also

$$u_{i\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu \int_{l_i} (x-a_i)^{\sigma_{i\alpha}+\nu} (z-x)^{\xi-1} dx.$$

Machen wir nun in die unter dem Summenzeichen stehenden Integrale die Substitution

$$x - a_i = (z-a_i)t$$

und beachten, dass in der Bezeichnung von *Euler* das über die um die Punkte 0 und 1 herum gelegte Doppelschleife (0, 1) erstreckte Integral

$$\int_{(0,1)} t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = (1-e^{2\pi p\sqrt{-1}})(1-e^{2\pi q\sqrt{-1}}) B(p, q)$$

ist, so erhalten wir die Entwickelung

$$u_{i\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu (1-\varepsilon_{i\alpha})(1-\varepsilon) B(\sigma_{i\alpha}+\nu+1,\ \xi)(z-a_i)^{\sigma_{i\alpha}+\xi+\nu}.$$

Wir ersehen hieraus, dass $u_{i\alpha}$ zum Exponenten $\sigma_{i\alpha}+\xi$ gehört; die zum Punkte $z = a_i$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (E.) besitzt folglich die Wurzeln

$$\sigma_{i\alpha}+\xi, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i)$$

und da diese Gleichung überdies durch die Zahlen 0, 1, ..., $m-\alpha_i-1$ befriedigt werden muss, so sind damit die sämmtlichen Lösungen der determinirenden Fundamentalgleichungen von (E.) bekannt. Im Falle $n = 1$ ergeben sich so die bereits von Herrn *Pochhammer* berechneten Werthe.

Seien $u_{i\alpha_i+1}, \ldots, u_{im}$ die zu den Exponenten 0, 1, ..., $m-\alpha_i-1$ gehörigen Elemente des zu $z = a_i$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems und möge

$$(10.) \qquad u_{i\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{m} \gamma_{\alpha\lambda}^{(ik)} u_{k\lambda} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

die zwischen den Punkten a_i und a_k vermittelnde Uebergangssubstitution von (E.) bedeuten, so gestatten die Gleichungen (5.) und (6^{I}.) beziehungsweise (6^{II}.) diejenigen Coefficienten $\gamma_{\alpha\lambda}^{(ik)}$ dieser Uebergangssubstitutionen anzugeben, für welche

$$\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i; \quad \lambda = 1, 2, \ldots, \alpha_k$$

ist. Aus (10.) folgt nämlich mit Rücksicht auf (5.)

$$u_{ia} - \theta_k u_{ia} = \sum_{\lambda=1}^{a_k} \gamma_{a\lambda}^{(ik)} (1 - \varepsilon\varepsilon_{k\lambda}) u_{k\lambda},$$

und indem wir dies mit (6^{I}.) beziehungsweise (6^{II}.) vergleichen finden wir

$$(11^{\text{I}}.) \qquad \varepsilon(1-\varepsilon_{ia}) c_{a\lambda}^{(ik)} = \gamma_{a\lambda}^{(ik)} (1 - \varepsilon\varepsilon_{k\lambda})$$

beziehungsweise $\begin{pmatrix} a = 1, 2, \ldots, a_i \\ \lambda = 1, 2, \ldots, a_k \end{pmatrix}$

$$(11^{\text{II}}.) \qquad (1-\varepsilon_{ia}) c_{a\lambda}^{(ik)} = \gamma_{a\lambda}^{(ik)} (1 - \varepsilon\varepsilon_{k\lambda}).$$

Analog ergiebt sich für die Coefficienten $\gamma_{a\lambda}^{(ki)}$ der Substitution, die das zu $z = a_k$ gehörige kanonische Fundamentalsystem von (E.) durch das zu $z = a_i$ gehörige darstellt

$$(12^{\text{I}}.) \qquad \varepsilon(1-\varepsilon_{ka}) c_{a\lambda}^{(ki)} = \gamma_{a\lambda}^{(ki)} (1 - \varepsilon\varepsilon_{i\lambda})$$

beziehungsweise $\begin{pmatrix} a = 1, 2, \ldots, a_k \\ \lambda = 1, 2, \ldots, a_i \end{pmatrix}$

$$(12^{\text{II}}.) \qquad (1-\varepsilon_{ka}) c_{a\lambda}^{(ki)} = \gamma_{a\lambda}^{(ki)} (1 - \varepsilon\varepsilon_{i\lambda}).$$

Die Gleichungssysteme (11.) und (12.) liefern eigenthümliche Beziehungen zwischen den Coefficienten der Uebergangssubstitutionen, wenn wir beachten, dass die Substitutionen

$$(c_{a\lambda}^{(ik)}), \quad (c_{a\lambda}^{(ki)}) \qquad (a, \lambda = 1, 2, \ldots, m)$$

einerseits und

$$(\gamma_{a\lambda}^{(ik)}), \quad (\gamma_{a\lambda}^{(ki)}) \qquad (a, \lambda = 1, 2, \ldots, m)$$

andererseits inverse Substitutionen sind.

Für die *Tissot-Pochhammer*sche Differentialgleichung, wo $\alpha = \lambda = 1$ zu nehmen ist, können wir (vgl. (7.) No. VI)

$$c_{11}^{(ki)} = c_{11}^{(ik)} = 1$$

setzen; dann ist also z. B.

$$\gamma_{11}^{(ik)} \gamma_{11}^{(ki)} = \frac{\varepsilon^2 (1-\varepsilon_{i1})(1-\varepsilon_{k1})}{(1-\varepsilon\varepsilon_{i1})(1-\varepsilon\varepsilon_{k1})}$$

beziehungsweise

$$\gamma_{11}^{(ik)} \gamma_{11}^{(ki)} = \frac{(1-\varepsilon_{i1})(1-\varepsilon_{k1})}{(1-\varepsilon\varepsilon_{i1})(1-\varepsilon\varepsilon_{k1})},$$

falls für beide Punkte a_i, a_k gleichzeitig die Lage I beziehungsweise II stattfindet. Hat man für den einen dieser Punkte die Lage I, für den andern die Lage II, so ist

$$(13.) \qquad \gamma_{11}^{(ik)} \gamma_{11}^{(ki)} = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon_{i1})(1-\varepsilon_{k1})}{(1-\varepsilon\varepsilon_{i1})(1-\varepsilon\varepsilon_{k1})}.$$

Für $m=2$ wird die *Tissot-Pochhammer*sche Differentialgleichung mit der Differentialgleichung für die *Gauss*sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ identisch, wenn wir setzen

$$a_1=0, \quad a_2=1, \quad \alpha=-\xi+1, \quad \beta=-(\beta_1+\beta_2+\xi-2), \quad \gamma=-\xi-\beta_1+2.$$

Es ist also in diesem Falle

$$\varepsilon_{11}=e^{2\pi(\alpha-\gamma)\sqrt{-1}}, \quad \varepsilon_{21}=e^{2\pi(\gamma-\beta)\sqrt{-1}}, \quad \varepsilon=e^{-2\pi\alpha\sqrt{-1}}, \tag{14.}$$

und wenn wir

$$\begin{aligned} u_{11} &= z^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ z), \\ u_{21} &= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-z) \end{aligned}$$

nehmen, so findet bei der von *Euler* gegebenen Darstellung dieser Lösungen durch bestimmte Integrale für den Punkt $z=0$ die Lage I, für den Punkt $z=1$ die Lage II Statt. Setzt man

$$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)},$$

so bestehen bekanntlich die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_{11} &= f(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma)u_{21}+\mathfrak{P}(z), \\ u_{21} &= f(1-\alpha,\ 1-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1)u_{11}+\mathfrak{P}_1(1-z), \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{P}(z)$, $\mathfrak{P}_1(1-z)$ in der Umgebung von $z=0$ beziehungsweise $z=1$ reguläre Functionen bedeuten. Es ist also

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^{(12)} &= f(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma), \\ \gamma_{11}^{(21)} &= f(1-\alpha,\ 1-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1) \end{aligned}$$

und folglich

$$\gamma_{11}^{(12)}\gamma_{11}^{(21)}=\frac{\Pi(1-\gamma)\Pi(\gamma-2)\Pi(\gamma-\alpha-\beta)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\beta-\gamma)\Pi(\gamma-\beta-1)}.$$

Wendet man die Relation

$$\Pi(-\varrho)\Pi(\varrho-1)=\frac{\pi}{\sin\pi\varrho} \tag{15.}$$

an, so folgt

$$\gamma_{11}^{(12)}\gamma_{11}^{(21)}=-\frac{\sin\pi(\gamma-\alpha)\sin\pi(\gamma-\beta)}{\sin\pi(1-\gamma)\sin\pi(\gamma-\alpha-\beta)},$$

und das stimmt zu Folge der Gleichungen (14.) mit (13.) für $i=1$, $k=2$ überein. *Man kann also die sich aus den Gleichungen* (11.), (12.) *ergebenden Relationen, gleichsam als eine Verallgemeinerung der Relation* (15.) *ansehen.*

Berlin, den 15. Juni 1895.

Sur les polynômes de *Bernoulli.*

(Extrait d'une lettre adressée par M. *Sonin* à St. Pétersbourg à M. *Hermite* à Paris.)

Je viens de lire dans le nouveau cahier du Journal für Mathematik (t. 115, p. 201—208) votre article „Sur la fonction $\log\Gamma(a)$" et j'ai eu le grand plaisir d'y rencontrer, comme résultat final de vos recherches, une formule que j'ai publiée en langue russe, au commencement de 1888 dans les Annales de l'Université de Varsovie.

Je définis *le polynôme de Bernoulli de rang i* par l'équation aux différences finies

$$\varphi_i(x+1)-\varphi_i(x) = ix^{i-1} \tag{1.}$$

et la condition $\varphi_i(0) = 0$.

En changeant dans (1.) x en $-x$ et ajoutant la nouvelle égalité à l'ancienne multipliée par $(-1)^i$ on aura

$$(-1)^i\varphi_i(1+x)-\varphi_i(-x) = (-1)^i\varphi_i(x)-\varphi_i(1-x),$$

où le premier membre s'obtient du second par le changement de x en $1+x$, ce qui conduit nécessairement à admettre, vu que $\varphi_i(x)$ est un polynôme entier,

$$(-1)^i\varphi_i(x)-\varphi_i(1-x) = \text{const.} = (-1)^i\varphi_i(0)-\varphi_i(1) = 0, \quad i > 1,$$

ou

$$\varphi_i(1-x) = (-1)^i\varphi_i(x), \quad \varphi_i(1+x) = (-1)^i\varphi_i(-x). \tag{2.}$$

Cette dernière égalité jointe à (1.) donne

$$(-1)^i\varphi_i(-x)-\varphi_i(x) = ix^{i-1},$$

d'où l'on conclut aisément que $\varphi_i(x)$ a la forme

$$\varphi_i(x) = x^i - \frac{i}{2}x^{i-1} + \underset{1}{a}^{i}x^{i-2} + \underset{2}{a}^{i}x^{i-4} + \cdots;$$

mais nous ne profiterons pas de cette remarque dans la suite.

Si l'on considère maintenant l'expression

$$\psi(x) = p^{i-1}\sum_{k=0}^{p-1}\varphi_i\left(\frac{x+k}{p}\right),$$

où p est un entier quelconque, on remarque tout de suite que $\psi(x)$ est un polynôme du degré i qui satisfait à l'équation

$$\psi(x+1)-\psi(x) = p^{i-1}\left\{\varphi_i\left(\frac{x}{p}+1\right)-\varphi_i\left(\frac{x}{p}\right)\right\} = ix^{i-1}$$

et qui, par conséquent, ne diffère de $\varphi_i(x)$ que par une constante. On aura donc

$$(3.) \qquad p^{i-1}\left\{\sum_{k=0}^{p-1}\varphi_i\left(\frac{x+k}{p}\right)-A_i(p)\right\} = \varphi_i(x),$$

où la constante $A_i(p)$ se détermine pour $x=0$ et sera

$$A_i(p) = \sum_{k=0}^{p-1}\varphi_i\left(\frac{k}{p}\right).$$

Lorsque i est un nombre impair, cette constante sera égale à zéro en vertu de l'égalité (2.). Pour déterminer $A_{2n}(p)$ nous écrivons (3.) ainsi

$$A_{2n}(p) = \sum_{k=0}^{p-1}\varphi_{2n}\left(\frac{x+k}{p}\right)-p^{1-2n}\varphi_{2n}(x)$$

et intégrons les deux membres par rapport à x de 0 jusqu'à 1. Vu que

$$\int_0^1 \varphi_{2n}\left(\frac{x+k}{p}\right)dx = p\int_{\frac{k}{p}}^{\frac{k+1}{p}}\varphi_{2n}(x)\,dx,$$

nous arriverons à la formule

$$A_{2n}(p) = p(1-p^{-2n})\int_0^1 \varphi_{2n}(x)\,dx,$$

qui détermine la forme de $A_{2n}(p)$ par rapport à p. Quant à l'intégrale elle représente une constante spécifique pour les polynômes de *Bernoulli* et que nous désignerons $(-1)^n B_n$ en sorte que

$$\int_0^1 \varphi_{2n}(x)\,dx = (-1)^n B_n$$

et la formule (3.) devient

$$(4.) \qquad \sum_{k=0}^{p-1}\varphi_{2n}\left(\frac{x+k}{p}\right)-p^{1-2n}\varphi_{2n}(x) = p(1-p^{-2n})(-1)^n B_n.$$

On aura donc pour $p=2$, en ayant égard à (2.):

$$\varphi_{2n}\left(\frac{x}{2}\right)+\varphi_{2n}\left(\frac{1-x}{2}\right)-2^{1-2n}\varphi_{2n}(x) = 2(1-2^{-2n})(-1)^n B_n,$$

d'où l'on tire

pour $x=0$: $\varphi_{2n}(\frac{1}{2}) = 2(1-2^{-2n})(-1)^n B_n$,

pour $x=\frac{1}{2}$: $\varphi_{2n}(\frac{1}{4}) = (1+2^{1-2n})(1-2^{-2n})(-1)^n B_n$.

Ces deux valeurs sont connues: la première est due à *Jacobi,* la seconde à M. *Worpitzky* (Studien über die *Bernoulli*schen und *Euler*schen Zahlen, Journal für Mathematik, t. 94, p. 220).

Pour $p = 3$ on trouve

$$\varphi_{2n}\left(\frac{x}{3}\right)+\varphi_{2n}\left(\frac{1+x}{3}\right)+\varphi_{2n}\left(\frac{1-x}{3}\right)-3^{1-2n}\varphi_{2n}(x) = 3(1-3^{-2n})(-1)^n B_n$$

et l'on obtient de là les deux nouvelles valeurs suivantes:

pour $x = 0$: $\varphi_{2n}(\frac{1}{3}) = \frac{3}{2}(1-3^{-2n})(-1)^n B_n$,

pour $x = \frac{1}{2}$: $\varphi_{2n}(\frac{1}{6}) = \frac{1}{2}(1+2^{1-2n}+3^{1-2n}-6^{1-2n})(-1)^n B_n$.

Il ne paraît pas possible de faire d'autres déterminations au moyen de la formule (4.)

En différentiant plusieurs fois l'équation (1.) on trouve

$$(5.)\quad \begin{cases} \varphi_i^{(k)}(x+1)-\varphi_i^{(k)}(x) = i(i-1)\ldots(i-k+1)(i-k)x^{i-k-1} \\ \qquad\qquad = i(i-1)\ldots(i-k+1)\{\varphi_{i-k}(x+1)-\varphi_{i-k}(x)\}, \end{cases}$$

d'où l'on conclut

$$\varphi_i^{(k)}(x)-i(i-1)\ldots(i-k+1)\varphi_{i-k}(x) = \text{const.} = \varphi_i^{(k)}(0).$$

Si l'on intègre cette égalité par rapport à x de 0 jusqu'à 1 et qu'on remarque qu'en vertu de (5.)

$$\int_0^1 \varphi_i^{(k)}(x)dx = \varphi^{(k-1)}(1)-\varphi^{(k-1)}(0) = 0,$$

on obtient

$$-i(i-1)\ldots(i-k+1)\int_0^1 \varphi_{i-k}(x)dx = \varphi_i^{(k)}(0),$$

où l'intégrale s'annule en vertu de (2.) lorsque $i-k$ est impair et sera égale à $(-1)^m B_m$ pour $i-k = 2m$. L'égalité donnera par conséquent

$$\frac{\varphi_i^{(i-2m)}(0)}{(i-2m)!} = -\binom{i}{i-2m}(-1)^m B_m = -\binom{i}{2m}(-1)^m B_m,$$

ce qui conduit à la représentation suivante de $\varphi_i(x)$:

$$\varphi_i(x) = x^i - \frac{i}{2}x^{i-1}+\binom{i}{2}B_1 x^{i-2}-\binom{i}{4}B_2 x^{i-4}+\binom{i}{6}B_3 x^{i-6}-\cdots,$$

où le dernier terme sera $-(-1)^{\frac{i-1}{2}}\binom{i}{i-1}B_{\frac{i-1}{2}}x$ en cas de i impair et $(-1)^n\binom{2n}{2}B_{n-1}x^2$ pour $i = 2n$.

D'après cette détermination la formule

$$\int_0^1 \varphi_{2n}(x)\,dx = (-1)^n B_n$$

donnera

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} + \binom{2n}{1}\frac{B_1}{2} - \binom{2n}{3}\frac{B_2}{4} + \cdots + (-1)^n \binom{2n}{2n-3}\frac{B_{n-1}}{2n-2} = (-1)^n B_n,$$

ce qui ne diffère que par la forme de la relation récurrente qui détermine successivement tous les nombres de *Bernoulli* B_n. Une autre relation équivalente donne l'égalité

$$\int_0^1 \varphi_{2n+1}(x)\,dx = 0,$$

qui se réduit simplement à $\varphi_{2n+2}(1) = 0$, vu que $\varphi_{2n+1}(x) = \frac{\varphi'_{2n+2}(x)}{2n+2}$.

Soit maintenant $f(z)$ un polynôme entier quelconque du $n^{\text{ième}}$ degré. En développant $f(y+h+xh)-f(y+xh)$ suivant les puissances de x on aura

$$f(y+h+xh)-f(y+xh) = \sum_{i=1}^{n} \{f^{(i-1)}(y+h)-f^{(i-1)}(y)\}\frac{h^{i-1}x^{i-1}}{(i-1)!},$$

où il suffit de remplacer x^{i-1} par $\frac{\varphi_i(x+1)-\varphi_i(x)}{i}$ pour conclure que la différence

$$f(y+xh) - \sum_{i=1}^{n} \{f^{(i-1)}(y+h)-f^{(i-1)}(y)\}h^{i-1}\frac{\varphi_i(x)}{i!}$$

est constante par rapport à x et égale à $f(y)$ pour $x=0$. Donc

$$(6.)\quad f(y+xh) = f(y) + \sum_{i=1}^{n} \{f^{(i-1)}(y+h)-f^{(i-1)}(y)\}h^{i-1}\frac{\varphi_i(x)}{i!}.$$

Nous substituons $1-x$ au lieu de x et ajoutons les deux formules, en ayant égard à (2.), ce qui nous donnera:

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{f(y+xh)+f(y+h-xh)}{2} = \dfrac{f(y+h)+f(y)}{2} \\ \qquad + \displaystyle\sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \{f^{(2m-1)}(y+h)-f^{(2m-1)}(y)\}h^{2m-1}\frac{\varphi_{2m}(x)}{(2m)!}, \end{cases}$$

$\left[\frac{n}{2}\right]$ étant le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$.

Les formules (6.) et (7.) peuvent être considérées comme relations récurrentes générales qui lient entre eux les polynômes de *Bernoulli*. Pour les déterminations spéciales du polynôme $f(z)$ on en tire une foule de relations particulières dont chacune fournit quelques relations entre les nombres

de ***Bernoulli*** soit en posant $x=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$, soit en la divisant par x^2 et posant $x=0$, soit enfin en l'intégrant entre les limites 0 et 1.

On trouve par exemple en posant $y=0$, $h=1$, $f(x)=x^r(x-1)^r$,

$$x^r(x-1)^r = \sum_{m=[\frac{1}{2}r]+1}^{r} \binom{r}{2m-r-1} \frac{\varphi_{2m}(x)}{m},$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
&\text{pour } r=1: \quad x(x-1) &&= \varphi_2(x),\\
&\text{pour } r=2: \quad x^2(x-1)^2 &&= \varphi_4(x),\\
&\text{pour } r=3: \quad x^3(x-1)^3 &&= \varphi_6(x)+\tfrac{1}{2}\varphi_4(x),\\
&\text{pour } r=4: \quad x^4(x-1)^4 &&= \varphi_8(x)+\tfrac{4}{3}\varphi_6(x), \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

On voit par là que $\varphi_{2m}(x)$ se développe suivant les puissances de $x(x-1)=\varphi_2(x)$ et aura la forme

$$\varphi_{2m}(x) = \varphi_2(x)^m + \overset{m}{\underset{1}{a}}\varphi_2(x)^{m-1} + \cdots + \overset{m}{\underset{m-2}{a}}\varphi_2(x)^2.$$

C'est en généralisant la formule (6.) que je suis parvenu à la formule générale

$$f(y+xh)-f(y) = \sum_{i=1}^{n} |f^{i-1}(y+h)-f^{i-1}(y)|h^{i-1}\frac{\varphi_i(x)}{i!} + R_n(x,\ y),$$

où

$$R_n(x,\ y) = \frac{h^n}{n!}\int_0^x \varphi_n(x-\eta)|f^n(y+\eta h+h)-f^n(y+\eta h)|\,d\eta$$

$$-\frac{h^n}{n!}\int_0^1 \varphi_n(1-\vartheta)|f^n(y+xh+\vartheta h)-f^n(y+\vartheta h)|\,d\vartheta,$$

que l'on démontre au moyen de l'intégration par parties de l'expression de $R_n(x,\ y)$. En appliquant cette formule générale à la fonction $f(x)=\log\Gamma(x)$, j'ai trouvé

$$\log\Gamma(y+x)-\log\Gamma(y) = x\log y + \sum_{i=2}^{n}(-1)^i\frac{\varphi_i(x)}{(i-1)i}y^{1-i}+R_n(x,\ y),$$

et j'ai remarqué que pour $0<x\leqq\frac{1}{2}$ on peut écrire

$$R_{2k-1} = \frac{\vartheta}{2k}\left\{\frac{\varphi_{2k}(x)}{2k-1}y-\frac{\varphi_{2k+1}(x)}{2k+1}\right\}y^{-2k}. \qquad (0<\vartheta<1)$$

Pour $x=\frac{1}{2}$ j'ai obtenu la formule

$$\log\frac{\Gamma(y+\frac{1}{2})}{\Gamma(y)} = \tfrac{1}{2}\log y + 2\sum_{m=1}^{k-1}(-1)^m(1-2^{-2m})\frac{B_m}{(2m-1)2m}y^{1-2m}$$

$$+2\vartheta(-1)^k(1-2^{-2k})\frac{B_k}{(2k-1)2k}y^{1-2k}.$$

Laissant de côté les développements que j'ai faits de la formule générale dans mon mémoire cité, je me permets de m'arrêter quelques moments sur la formule que l'on obtient aussi par l'intégration par parties et qui est:

$$(8.)\quad \begin{cases} \dfrac{h}{2}(e^h+1) = \left\{1+\dfrac{B_1}{2!}h^2-\dfrac{B_2}{4!}h^4+\cdots\pm\dfrac{B_k}{(2k)!}h^{2k}\right\}(e^h-1) \\ \qquad\qquad +\dfrac{(-h)^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1\varphi_n(x)e^{hx}dx, \end{cases}$$

où $k=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$.

Si l'on substitue dans cette identité le symbole hD_y au lieu de h et et qu'on multiplie le résultat par $f(y)$, on aura

$$\frac{h}{2}\{f'(y+h)+f'(y)\} = f(y+h)-f(y)+\frac{B_1}{2!}h^2\{f''(y+h)-f''(y)\}-\cdots$$
$$+\frac{(-h)^{n+1}}{n!}\int_0^1\varphi_n(x)f^{(n+1)}(y+hx)dx.$$

On comprend bien que cette dernière formule s'obtient immédiatement au moyen de l'intégration par parties; mais il me semble intéressant de pouvoir obtenir cette formule par une opération symbolique. Nous allons maintenant tirer un autre profit de la formule (8.) et nous y poserons $h=2r\pi i$, r étant un nombre entier et $i^2=-1$. Cela nous donnera

$$\int_0^1\varphi_n(x)e^{2r\pi xi}dx = -\frac{n!i^n}{(2r\pi)^n},$$

d'où l'on obtient

$$\lim_{r=\infty}\int_0^1\varphi_n(x)e^{2\pi xi}\frac{1-e^{2r\pi xi}}{1-e^{2\pi xi}}dx = -\frac{n!i^n}{(2\pi)^n}\sum_{r=1}^{\infty}r^{-n}.$$

Remarquons que

$$\frac{e^{2\pi xi}}{1-e^{2\pi xi}} = -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cot\pi x$$

et que l'intégration par parties donne

$$\int_0^1\varphi_n(x)\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cot\pi x\right)e^{2r\pi xi}dx$$
$$=\frac{1}{4r\pi}\{e^{2r\pi i}(\varphi_n(x)\cot\pi x)_{x=1}-(\varphi_n(x)\cot\pi x)_{x=0}\}$$
$$-\frac{1}{2r\pi i}\int_0^1 e^{2r\pi xi}\left\{-\frac{1}{2}\varphi_n'(x)+\frac{i}{2}\frac{d}{dx}[\varphi_n(x)\cot\pi x]\right\}dx,$$

ce qui s'annule pour $r=\infty$. On aura donc

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cot\pi x\right)dx = -\frac{n!\,i^n}{(2\pi)^n}\sum_{r=1}^{\infty} r^{-n},$$

et cela donne pour $n=2m$

$$(-1)^m\int_0^1 \varphi_{2m}(x)dx = B_m = 2\frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m}}\sum_{r=1}^{\infty} r^{-2m},$$

pour $n=2m+1$

$$\int_0^1 \varphi_{2m+1}(x)\cot\pi x\,dx = -2(-1)^m\frac{(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+1}}\sum_{r=1}^{\infty} r^{-2m-1}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \varphi'_{2m+1}(x)\log\sin\pi x\,dx$$

$$= -\frac{2m+1}{\pi}\int_0^1 \varphi_{2m}(x)\log\sin\pi x\,dx-(-1)^m B_m(2m+1)\frac{\log 2}{\pi}.$$

St. Pétersbourg, le 14 octobre 1895.

Réponse de M. *Hermite.*

La lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'adresser m'a intéressé au plus haut point ainsi que ce que j'ai pu saisir de votre mémoire sur les nombres de *Bernoulli,* qui est écrit en russe, et où il ne m'a été permis de comprendre qu'au moyen des formules les résultats auxquels vous êtes parvenu. Je me suis empressé d'informer M. *Fuchs* de mon devoir de reconnaître que vous aviez déjà publié les séries finies qui représentent avec leurs termes complémentaires, les quantités

$$\log\frac{\Gamma(y+\frac{1}{2})}{\Gamma(y)} \quad \text{et} \quad \log\Gamma(y+x)-\log\Gamma(y),$$

en les tirant comme conséquence d'un théorème général de développement des fonctions suivant les polynômes de *Bernoulli.* Mais nos recherches se sont si étroitement liées, qu' après vous j'ai aussi obtenu cette formule de développement dont j'ai donné communication à M. *Lerch* dans le mois d'août dernier; voici comment j'y suis arrivé.

J'ai employé d'abord au lieu de vos polynômes $\varphi_n(x)$, la fonction de *Jacob Bernoulli* $S_n(x)=\frac{\varphi_{n+1}(x)}{n+1}$, qui est définie par l'égalité,

$$(1.) \qquad \frac{e^{xy}-1}{e^y-1} = \Sigma\frac{S_n(x)}{[n]}y^n,$$

où j'ai posé $[n] = 1.2...n$. Soit ensuite symboliquement

$$\frac{y}{e^y - 1} = e^{\lambda y}$$

avec la convention de faire dans la série exponentielle,

$$\lambda = -\tfrac{1}{2}, \quad \lambda^{2i} = (-1)^{i-1} B_i, \quad \lambda^{2i+1} = 0,$$

je remarque qu'on peut alors écrire,

$$\begin{aligned} \frac{e^{xy} - 1}{e^y - 1} &= \frac{e^{\lambda y}(e^{xy} - 1)}{y} \\ &= \frac{e^{(x+\lambda)y} - e^{\lambda y}}{y} \\ &= \Sigma \frac{(x+\lambda)^{n+1} - \lambda^{n+1}}{[n+1]} y^n \end{aligned}$$

d'où par conséquent cette formule

$$S_n(x) = \frac{(x+\lambda)^{n+1} - \lambda^{n+1}}{n+1}.$$

Cela étant, je considère l'expression

$$\begin{aligned} F(y) &= f(y+x+\lambda) - f(y+\lambda) \\ &= \Sigma \frac{(x+\lambda)^c - \lambda^c}{[c]} f^c(y), \end{aligned} \qquad (c = 1, 2, 3, \ldots)$$

$f(y)$ désignant une fonction quelconque, et j'opère symboliquement comme tout à l'heure sur λ. Le développement de $f(y+\lambda)$ donne par suite la série d'*Euler*, on a ainsi

$$f(y+1+\lambda) - f(y+\lambda) = f'(y);$$

cela étant, il vient en changeant y en $y+x$

$$f(y+x+1+\lambda) - f(y+x+\lambda) = f'(y+x)$$

et en retranchant membre à membre nous parvenons au moyen de l'expression de $F(y)$ à la relation

$$F(y+1) - F(y) = f'(y+x) - f'(y).$$

Mais en même temps $\frac{(x+\lambda)^c - \lambda^c}{c}$ devient le polynôme de *Bernoulli*, $S_{c-1}(x)$, nous obtenons donc la formule générale de développement

$$f'(y+x) - f'(y) = \Sigma \frac{f^c(y+1) - f^c(y)}{[c-1]} S_{c-1}(x) \qquad (c = 1, 2, 3, \ldots)$$

ou bien si l'on remplace $f'(y)$ par $f(y)$ et c par $c+1$,

$$f(y+x) - f(y) = \Sigma \frac{f^c(y+1) - f^c(y)}{[c]} S_c(x). \qquad (c = 0, 1, 2, \ldots)$$

La série ainsi trouvée se démontre immédiatement sans l'emploi des symboles.

En faisant en effet $f(y) = Ae^{ay}$, où A et a sont des constantes, il vient après avoir divisé par $Ae^{ay}(e^a-1)$,

$$\frac{e^{ax}-1}{e^a-1} = \Sigma \frac{S_c(x)}{[c]} a^c$$

ce qui reproduit l'égalité (1.). La même vérification a lieu pour une somme d'un nombre quelconque de termes, $Ae^{ax}+Be^{by}+\cdots$ et par conséquent pour une fonction quelconque.

Mais il s'agit d'avoir cette formule avec un nombre fini de termes; la méthode donnée par *Jacobi* dans le célèbre mémoire *de usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae* pour obtenir l'expression du reste de la série d'*Euler* et de *Maclaurin* conduit facilement au but. A cet effet je ferai usage d'une remarque qui se tire de l'identité

$$\frac{e^{xy}-1}{e^y-1} e^{yz} = \frac{e^{(x+z)y}-e^{yz}}{e^y-1}$$
$$= \frac{e^{(x+z)y}-1}{e^y-1} - \frac{e^{yz}-1}{e^y-1}.$$

Le premier membre étant le produit des séries,

$$\Sigma \frac{S_c(x)}{[c]} y^c \quad \text{et} \quad \Sigma \frac{(yz)^c}{[c]},$$

le coefficient de y^n est donné par la somme

$$\Sigma \frac{S_c(x) z^{n-c}}{[c]},$$

en prenant $c = 0, 1, 2, \ldots, n$, on a donc cette relation

$$(2.) \qquad \frac{S_n(x+z)-S_n(z)}{[n]} = \Sigma \frac{S_c(x) z^{n-c}}{[c][n-c]}.$$

J'observe encore que si nous égalons les termes en y^n dans l'identité

$$e^{xy}-1 = (e^y-1)\Sigma \frac{S_c(x)}{[c]} y^c$$

il vient,

$$(3.) \qquad \frac{x^n}{[n]} = \Sigma \frac{S_c(x)}{[c][n-c]}$$

mais alors la somme se rapporte aux valeurs, $c = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Soit maintenant avec un nombre fini de termes

$$(4.) \qquad f(y+x)-f(y) = \Sigma \frac{f^c(y+1)-f^c(y)}{[c]} S_c(x) - \frac{R_n}{[n]}, \qquad (c = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

j'emploie en suivant l'analyse de *Jacobi* la série de *Taylor*

$$f(y+x)-f(y) = \Sigma \frac{f^c(y)}{[c]} x^c + \frac{1}{[n]} \int_0^x (x-z)^n f^{n+1}(y+z)\, dz,$$
$$(c = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

je pose aussi

$$f^c(y+1)-f^c(y) = \Sigma\frac{f^i(y)}{[i-c]}+\frac{1}{[n-c]}\int_0^1(1-z)^{n-c}f^{n+1}(y+z)dz.$$

Dans cette égalité l'entier i prend les valeurs, $c+1$, $c+2$, ..., n, et pour $i=n$, on a

$$f^n(y+1)-f^n(y) = \int_0^1 f^{n+1}(y+z)dz,$$

cela étant, la relation précédente devient

$$\Sigma\frac{f^c(y)}{[c]}x^c+\frac{1}{[n]}\int_0^x(x-z)^n f^{n+1}(y+z)dz-\frac{R_n}{[n]}$$
$$=\Sigma\frac{S_c(x)f^i(y)}{[c][i-c]}+\frac{1}{[n]}\Sigma\int_0^1\frac{S_c(x)(1-z)^{n-c}}{[c][n-c]}f^{n+1}(y+z)dz$$

et l'on voit immédiatement que les termes qui contiennent $f^i(y)$ se détruisent. Nous devons faire en effet, $c=0, 1, 2, \ldots, i-1$ dans le second membre, la réduction résulte par suite de l'égalité qui vient d'être obtenue,

$$\frac{x^i}{[i]} = \Sigma\frac{S_c(x)}{[c][i-c]}$$

L'équation (2.) nous donne aussi en changeant z en $1-z$,

$$\frac{S_n(x+1-z)-S_n(z)}{[n]} = \Sigma\frac{S_c(x)(1-z)^{n-c}}{[c][n-c]},$$

et l'on en conclut l'expression cherchée

$$R_n = \int_0^x(x-z)^n f^{n+1}(y+z)dz-\int_0^1[S_n(x+1-z)-S_n(z)]f^{n+1}(y+z)dz.$$

Une autre forme du reste s'obtient en décomposant la seconde intégrale en deux parties, comprises entre les limites 0 et x, x et 1; cela étant, au moyen de la relation

$$S_n(x+1-z) = (x-z)^n-S_n(x-z),$$

on trouve ainsi

$$R_n = \int_0^x[S_n(z)-S_n(x-z)]f^{n+1}(x+z)dz$$
$$+\int_x^1[S_n(z)-S_n(x+1-z)]f^{n+1}(x+z)dz.$$

Ce sont vos résultats, Monsieur, ces formules ne diffèrent pas au fond de celles que vous avez données à la page 29 de votre mémoire, lorsqu'on

suppose en particulier $h = 1$. Les relations dont je viens de faire usage, vous les avez aussi obtenues, ce sont les équations des pages 13 et 14,

$$(n+1)x^n = \Sigma(n+1)_i \varphi_i(x),$$

$$\varphi_n(x+z) - \varphi_n(z) = \Sigma n_i \varphi_i(x) z^{n-i}.$$

Mais vous m'avez bien dépassé dans les applications que vous avez faites au produit $\varphi_p(x)\varphi_q(x)$, les conséquences que vous en avez tirées pour les nombres de *Bernoulli* (page 5), la relation si intéressante

$$\varphi_{2p}(x) = \varphi_p^2(x) - \frac{p^2}{2.[3]}\varphi_{p-1}^2(x) + \frac{p^2(p-1)(3p-4)}{3.[5]}\varphi_{p-2}^2(x)\cdots$$

et beaucoup d'autres choses encore. J'attache surtout un grand prix à la seconde partie de votre mémoire où vous traitez des importantes et difficiles questions sur la sommation des séries. Malheureusement je n'ai guère pu la lire, je me trouve arrêté à chaque pas, il ne m'a pas été possible de comprendre le sens d'un certain symbole que vous employez continuellement.

Cependant une note de la page 55 ne m'a demandé aucun effort, et j'ai vu une fois de plus combien nos recherches ont été voisines. Comme vous j'ai étudié avec soin la fonction $\sigma(x) = \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$, et aussi l'expression $\frac{\sigma(x)}{x} = \frac{e^x(x-2)+x+2}{2x^2(e^x-1)}$, qui s'offre dans la relation,

$$\log\Gamma(a) = (a-\tfrac{1}{2})\log a - a + \log\sqrt{2\pi} + \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax}\sigma(x)}{x}\,dx.$$

Je démontre qu'elle atteint son maximum, qui est $\frac{1}{12}$, de la manière suivante. Changeons pour avoir une expression plus simple x en $2x$, divisons haut et bas par e^x, et soit alors

$$f(x) = \frac{x(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})}{4x^2(e^x-e^{-x})}.$$

On prouve que la différence

$$f(x) - \tfrac{1}{12} = \frac{3x(e^x+e^{-x}) - (x^2+3)(e^x-e^{-x})}{12x^2(e^x-e^{-x})},$$

qui est nulle pour $x = 0$, est toujours négative, au moyen de la fraction continue

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cdots}}.$$

La seconde réduite étant $\frac{3x}{x^2+3}$, nous avons en effet si l'on suppose x positif comme il est permis, car $f(x)$ est une fonction paire,

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} > \frac{3x}{x^2+3},$$

c'est-à-dire

$$3x(e^x+e^{-x})-(x^2+3)(e^x-e^{-x}) < 0.$$

Nous pouvons donc écrire, $f(x) = \frac{\theta}{12}$ avec la condition $0 < \theta < 1$ et de là résulte l'expression asymptotique précise

$$\log\Gamma(a) = (a-\tfrac{1}{2})\log a - a + \log\sqrt{2\pi} + \frac{\theta}{12a}.$$

Au point de vue de la sommation des suites je me suis borné aux formules générales, en premier lieu à celle qu'on tire de la relation (4.) en prenant la dérivée par rapport à x, et remplaçant ensuite $f'(y)$ par $f(y)$. On trouve ainsi

$$f(y+x) = \int_x^{x+1} f(z)dz + \Sigma \frac{f^c(x+1)-f^c(x)}{[c]} D_x S_c(x) + \frac{f^n(x+1)-f^n(x)}{[n]} S_n(x)$$
$$-\frac{1}{[n]}\int_0^x S_n(x-z)f^{n+1}(y+z)dz - \frac{1}{[n]}\int_x^1 S_n(x+1-z)f^{n+1}(y+z)dz.$$

En voici une autre qui se tire des polynômes $\chi_n(x)$ définis par l'égalité

$$\frac{e^{xy}}{e^y+1} = \Sigma \frac{\chi_n(x)}{[n]} y^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

et dont je vais indiquer les propriétés les plus simples. Nous avons d'abord les relations:

$$\chi_n(x)+\chi_n(1+x) = x^n,$$
$$(-1)^n\chi_n(1-x) = \chi_n(x),$$
$$2^n\left[S_n\left(\frac{x+1}{2}\right)-S_n\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \chi_n(x).$$

On démontre encore que $(-1)^n\chi_{2n}(x)$ et $\frac{(-1)^n\chi_{2n-1}(x)}{1-2x}$ sont positifs en supposant $0 < x < 1$, on a même pour la seconde quantité la condition plus large, $(2x-1)^2 < 3$. J'indique encore les séries,

$$(-1)^n\chi_{2n}(x) = 2\Gamma(2n+1)\Sigma \frac{\sin d\pi x}{(d\pi)^{2n+1}},$$

$$(-1)^n\chi_{2n-1}(x) = 2\Gamma(2n)\Sigma \frac{\cos d\pi x}{(d\pi)^{2n}},$$

$$(d = 1, 3, 5, \ldots),$$

lorsqu'on a $0 < x < 1$. Ces polynômes conduisent à la formule suivante

$$f(y+x) = \Sigma \frac{f^c(y)+f^c(y+1)}{[c]} \chi_c(x)$$
$$+ \frac{1}{[n]} \int_0^x \chi_n(x-z) f^{n+1}(y+z)\,dz - \frac{1}{[n]} \int_x^1 \chi_n(x+1-z) f^{n+1}(y+z)\,dz,$$

et voici la conséquence à en tirer pour la sommation des séries. Soit

$$F(x) = f(x)-f(x+1)+f(x+2)-\cdots+(-1)^p f(x+p);$$

on obtient l'égalité

$$F(y+x) = \Sigma \frac{f^c(y)+(-1)^p f^c(y+p+1)}{[c]} \chi_c(x)$$
$$+ \frac{1}{[n]} \int_0^x \chi_n(x-z) F^{n+1}(y+z) - \frac{1}{[n]} \int_x^1 \chi_n(x+1-z) F^{n+1}(y+z)\,dz.$$

$(c = 0, 1, 2, \ldots, n)$

Elle montre que les sommes à termes alternativement positifs et négatifs peuvent s'obtenir directement, au lieu de les conclure de la différence de deux autres à termes de même signe.

J'ai aussi considéré des polynômes plus généraux et analogues à ceux de *Bernoulli* en employant la fonction

$$\Phi(x) = Ae^{ax} + Be^{bx} + \cdots + Le^{lx}$$

et le développement de $\frac{e^{xy}}{\Phi(y)}$ suivant les puissances de y. Je les désignerai pour ne pas multiplier les notations par $\varphi_n(x)$, de sorte qu'ils dont définis par l'égalité

$$\frac{e^{xy}}{\Phi(y)} = \Sigma \frac{\varphi_n(x)}{[n]} y^n.$$

Ces polynômes sont du degré n en x, ils satisfont à la condition caractéristique

$$A\varphi_n(x+a)+B\varphi_n(x+b)+\cdots+L\varphi_n(x+l) = x^n$$

et ils conduisent encore à une formule générale de développement en série; je vais indiquer en peu de mots mes résultats.

Soit $f(x)$ une fonction quelconque, et posons pour abréger

$$Af(x+a)+Bf(x+b)+\cdots+Lf(x+l) = F(x)$$

on a cette expression qui procède suivant les polynômes $\varphi_n(x)$ et dont les coefficients sont les dérivées successives de la fonction $F(y)$, à savoir

$$f(y+x) = \Sigma F^c(y) \frac{\varphi_c(x)}{[c]} + \frac{R_n}{[n]} \qquad (c = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

le terme complémentaire étant

$$R_n = \int_a^x A\varphi_n(a+x-z)f^{n+1}(y+z)dz$$
$$+\int_b^x B\varphi_n(b+x-z)f^{n+1}(y+z)dz$$
$$+\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+\int_l^x L\varphi_n(l+x-z)f^{n+1}(y+z)dz.$$

Mais cette formule n'a lieu qu'autant que $\Phi(x)$ ne s'annule pas avec x, supposons maintenant que la fonction contienne le facteur x^s, on posera

$$(5.) \qquad \frac{y^s e^{xy}}{\Phi(y)} = \Sigma \frac{\varphi_n(x)}{[n]} y^n,$$

en désignant encore par $\varphi_n(x)$ un polynôme de degré n en x qui donne lieu aux relations

$$A\varphi_{s+n}(x+a)+B\varphi_{s+n}(x+b)+\cdots+L\varphi_{s+n}(x+l) = \frac{[s+n]}{[n]}x^n,$$
$$A\varphi_c(x+a)+B\varphi_c(x+b)+\cdots+L\varphi_c(x+l) = 0. \qquad (c=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1)$$

Intégrons maintenant s fois de suite par rapport à x, à partir de $x=0$, les deux membres de l'égalité (5.), et posons

$$\frac{1}{\Phi(y)}\left[e^{xy}-1-\frac{xy}{1}-\cdots-\frac{(xy)^{c-1}}{[c-1]}\right] = \Sigma\frac{\theta_n(x)}{[n]}y^n.$$

Le polynôme $\theta_n(x)$ est du degré $s+n$ et contient x^s comme facteur; il satisfait à la condition

$$A\theta_n(x+a)+B\theta_n(x+b)+\cdots+L\theta_n(x+l) = x^n$$

et s'exprime au moyen de $\varphi_n(x)$ par la formule

$$\frac{\theta_n(x)}{[n]} = \frac{\varphi_{s+n}(x)}{[s+n]}$$

en convenant de supprimer dans le second membre les puissances de x dont l'exposant est inférieur à s. Cela étant, on parvient au développement que voici

$$f(y+x)-f(y)-f'(y)\frac{x}{1}-\cdots-f^{s-1}(y)\frac{x^{s-1}}{[s-1]} = \Sigma F^c(y)\frac{\theta_c(x)}{[c]}-\frac{R_n}{[n]}$$
$$(c=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

avec cette expression du reste

$$R_n = \int_0^x (x-z)^n f^{n+1}(y+z)\,dz - \int_0^a A[\theta_n(a+x-z)-S_a] f^{n+1}(y+z)\,dz$$
$$- \int_0^b B[\theta_n(b+x-z)-S_b] f^{n-1}(y+z)\,dz$$
$$- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$- \int_0^l L[\theta_n(b+x-z)-S_l] f^{n+1}(y+z)\,dz$$

où l'on a

$$S_a = \theta_n(a-z)+\theta'_n(a-z)\frac{x}{1}+\cdots+\theta_n^{s-1}(a-z)\frac{x^{s-1}}{[s-1]}$$

et semblablement pour S_b, S_c ....

Ces généralisations, Monsieur, ne me font pas perdre de vue les belles et importantes applications de la formule sommatoire d'*Euler* et de *Maclaurin* que vous avez traitées dans votre mémoire avec une entière rigueur; et sans être entré jusqu' ici dans cet ordre de questions, je ne puis m'empêcher de vous exprimer encore tout l'intérêt que j'y ai pris. En particulier j'attache un grand prix à l'expression asymptotique pour h très petit, de la série $\frac{e^{-h^2}}{h}+\frac{e^{-4h^2}}{2h}+\frac{e^{-9h^2}}{3h}+\cdots$ que vous avez donnée sous la forme, $\frac{C}{2h}-\frac{\log h}{h}$ où C est la constante d'*Euler*. Elle se place à côté de l'expression qu'a obtenue M. *Schlömilch* pour la série de *Lambert*, et d'autres semblables s'offriraient encore dans la théorie des fonctions elliptiques.

Paris, 11. novembre 1895.

Réponse de M. *Sonin*.

... Maintenant je vous demande la permission de continuer mes communications sur les polynômes et les nombres de *Bernoulli*.
En posant

$$(-1)^n B_n - \tfrac{1}{2} = C_n$$

et remarquant que

$$\binom{2n+1}{2}+\binom{2n+1}{4}+\cdots\binom{2n+1}{2n} = 2^{2n}-1,$$

d'où

$$\frac{1}{2}\binom{2n}{1}+\frac{1}{4}\binom{2n}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\binom{2n}{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1},$$

la relation

$$(1.)\quad\begin{cases}(-1)^n B_n = \dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2}+\binom{2n}{1}\dfrac{B_1}{2}-\binom{2n}{3}\dfrac{B_2}{4}+\cdots\\ \qquad\qquad +(-1)^n\binom{2n}{2n-3}\dfrac{B_{n-1}}{2n-2},\end{cases}$$

que j'établis en partant de la définition

$$(-1)^n B_n = \int_0^1 \varphi_{2n}(x)\,dx$$

et qui n'est que celle de *Moivre,* devient

$$C_n = \frac{1-2^{2n-1}-n}{2n+1}-\binom{2n}{1}\frac{C_1}{2}-\binom{2n}{3}\frac{C_2}{4}-\cdots-\binom{2n}{2n-3}\frac{C_{n-1}}{2n-2}.$$

On en conclut aisément que $3.5\ldots(2n+1)\,C_n$ est un nombre entier et que par conséquent $3.5\ldots(2n+1)2B_n$ est un nombre entier impair. Donc on peut poser

$$B_n = \frac{P_n}{2Q_n},$$

P_n et Q_n étant deux nombres entiers impairs premiers entre eux et les diviseurs premiers de Q_n ne surpassent pas $2n+1$.

Lorsque $2n+1$ *est un nombre premier,* la différence

$$(-1)^n B_n - \frac{1}{2n+1}$$

d'après (1.), n'a pas ce facteur premier au dénominateur; donc Q_n *a le diviseur premier* $2n+1$ *au premier degré.* Cette simple remarque suffit à elle seule pour faire voir que ni les termes séparés du second membre de (1.), ni B_n non plus n'ont au dénominateur les facteurs premiers contenus dans la série

$$2n-1,\quad 2n-3,\quad \ldots,\quad \text{jusqu'à } n+1.$$

Lorsque $n+1$ *est un nombre premier impair,* ce qui suppose $n=2m$, *ce nombre au premier degré sera le diviseur de* Q_m et c'est de la sorte que la différence

$$(-1)^n B_n - \frac{1}{n+1}$$

n'aura plus au dénominateur $n+1$. En effet on ne trouvera au second

membre de (1.) qu'un seul terme ayant $n+1$ au dénominateur, à savoir

$$-(-1)^m\binom{4m}{2m-1}\frac{B_m}{2m} = -\left\{(-1)^m B_m - \frac{1}{2m+1}\right\}\binom{4m}{2m-1}\frac{1}{2m} - \frac{1}{2m(2m+1)}\binom{4m}{2m-1},$$

où le premier terme n'a plus $2m+1$ au dénominateur et le second terme est égal à

$$-\frac{1}{2m}\binom{4m}{2m-1}+\frac{1}{2m+1}\binom{4m}{2m-1};$$

mais on a

$$4m(4m-1)\ldots(2m+2) = \overline{(2m+1}+\overline{2m-1)}\overline{(2m+1}+\overline{2m-2)}\ldots\overline{(2m+1}+1) = (2m-1)!+(2m+1)E,$$

E étant un nombre entier; donc on aura

$$-(-1)^m\binom{4m}{2m-1}\frac{B_m}{2m} = \frac{1}{2m+1}+\frac{E}{(2m-1)!}-\frac{1}{2m}\binom{4m}{2m-1} - \left\{(-1)^m B_m - \frac{1}{2m+1}\right\}\binom{4m}{2m-1}\frac{1}{2m},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Lorsque n est un nombre premier égal à $2m+1$ on trouvera au second membre de (1.) deux termes qui *peuvent* avoir n au dénominateur, à savoir

$$-(-1)^m\binom{4m+2}{2m-1}\frac{B_m}{2m}-(-1)^{2m}\binom{4m+2}{4m-1}\frac{B_{2m}}{4m},$$

mais qui n'en ont point, vu que les coefficients entiers de ces termes ont le diviseur premier $n = 2m+1$.

Il importe de remarquer que, $n = 2m+1$ étant premier, $\frac{B_n}{n}$ n'en aura au dénominateur en sorte que P_n sera divisible par n. En effet tous les coefficients entiers $\binom{4m+2}{2x+1}$ qu'on obtient pour $x = 0, 1, \ldots, m-1$ ont $2m+1$ pour facteur, d'où il suit qu'au second membre de (1.) divisé par $n = 2m+1$ il n'y aura que quatre termes qui peuvent avoir n au dénominateur, notamment

$$(2.)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{1}{4m+3}-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{2m+1}-(-1)^m\binom{4m+2}{2m-1}\dfrac{B_m}{2m(2m+1)} \\ \quad +(-1)^m\binom{4m+2}{2m+1}\dfrac{B_{m+1}}{(2m+2)(2m+1)}-(-1)^{2m}\binom{4m+2}{4m-1}\dfrac{B_{2m}}{4m(2m+1)}. \end{cases}$$

Mais, d'après (1.), on a

$$-(-1)^m B_{m+1} = \frac{1}{2m+3} - \frac{1}{2} + \binom{2m+2}{1}\frac{B_1}{2} - \binom{2m+2}{3}\frac{B_2}{4} + \cdots - (-1)^m \binom{2m+2}{3}\frac{B_m}{2m}$$

$$= -\frac{m+1}{6} - \frac{2m+1}{2(2m+3)} - \binom{2m+2}{3}\frac{B_2}{4} + \cdots - \binom{2m+2}{3}\frac{1}{2m}\left\{(-1)^m B_m - \frac{1}{2m+1}\right\},$$

où tous les termes, excepté le premier, ont le facteur premier $2m+1$; on peut donc écrire

$$(-1)^m \frac{B_{m+1}}{2m+1} = \frac{1}{12(2m+1)} + \frac{P}{Q},$$

Q n'ayant pas de diviseur premier $2m+1$.

D'après cela l'expression (2.) s'écrira

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2m+1} - \frac{2}{4m+3} - \frac{\overline{4m+2}.\overline{4m+1}\ldots\overline{2m+4}}{(2m+1)!}\left\{\overline{(-1)^m B_m - \frac{1}{2m+1}} + \frac{1}{2m+1}\right\}$$

$$+ \frac{\overline{4m+2}.\overline{4m+1}\ldots\overline{2m+2}}{(2m+2)!}\left\{\frac{1}{12}\frac{1}{2m+1} + \frac{P}{Q}\right\}$$

$$- \frac{\overline{4m+2}.\overline{4m+1}.4m}{6.4m(2m+1)}\left\{\overline{(-1)^{2m} B_{2m} - \frac{1}{2m+1}} + \frac{1}{2m+1}\right\},$$

où

$$\overline{4m+2}\ldots\overline{2m+4} = 2(2m+1)\{2m.\overline{2m-1}\ldots 3 + (2m+1)E\},$$

$$\overline{4m+2}\ldots\overline{2m+2} = 2(2m+1)(2m+2)\{(2m)! + (2m+1)E_1\}.$$

Donc tous les termes de (2.) qui ont $2m+1$ au dénominateur seront

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{2m+1} = 0, \text{ c. q. f. d.}$$

Cette remarque, due à M. *Adams*, à l'égard de la fraction $\frac{B_n}{n}$ pour n premier a de l'importance, vu qu'au second membre de (1.) entrent seulement les fractions $\frac{B_k}{2k}$ multipliées par des nombres entiers $\binom{2n}{2k-1}$.

Je ne vous donnerai pas, Monsieur, de la peine d'aller avec moi plus loin dans cette voie qui conduit d'une manière la plus élémentaire au théorème de *Staudt*, et je reviens à un autre théorème démontré dans ma lettre, celui de *Raabe*, que j'écris ainsi

$$(3.) \qquad (-1)^n B_n p(p^{2n}-1) = p^{2n}\sum_{k=0}^{p-1}\varphi_{2n}\left(\frac{x+k}{p}\right) - \varphi_{2n}(x)p,$$

où

$$\varphi_{2n}(x) = x^{2n} - nx^{2n-1} + \binom{2n}{2} B_1 x^{2n-2} - \cdots + (-1)^n \binom{2n}{2n-2} B_{n-1} x^2.$$

En employant cette expression l'égalité (3.) devient

$$(4.)\quad \begin{cases} (-1)^n B_n p(p^{2n}-1) = \sum_{k=0}^{p-1} (x+k)^{2n} - np \sum_{k=0}^{p-1} (x+k)^{2n-1} \\ + \binom{2n}{2} B_1 p^2 \sum_{k=0}^{p-1} (x+k)^{2n-2} - \cdots + (-1)^n \binom{2n}{2} B_{n-1} p^{2n-2} \sum_{k=0}^{p-1} (x+k)^2 - p\varphi_{2n}(x). \end{cases}$$

La même expression de $\varphi_{2n}(x)$ donne encore

$$\sum_{k=0}^{p-1} (x+k)^{2n} = \sum_{k=0}^{p-1} \varphi_{2n}(x+k) + n \sum_{k=0}^{p-1} (x+k)^{2n-1} - \binom{2n}{2} B_1 \sum_{k=0}^{p-1} (x+k)^{2n-2} + \cdots$$
$$- (-1)^n \binom{2n}{2} B_{n-1} \sum_{k=0}^{p-1} (x+k)^2.$$

Mais on a d'après la définition de $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_{2n}(x+k) = \varphi_{2n}(x) + 2n\{x^{2n-1} + (x+1)^{2n-1} + \cdots + (x+k-1)^{2n-1}\},$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{p-1} \varphi_{2n}(x+k) - p\varphi_{2n}(x) = 2n \sum_{k=0}^{p-1} (p-1-k)(x+k)^{2n-1}.$$

Ces égalités donnent à (4.) la forme suivante

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{(-1)^n B_n p(p^{2n}-1)}{n} = \sum_{k=0}^{p-1} (p-1-2k)(x+k)^{2n-1} \\ + \binom{2n-1}{1} \dfrac{B_1(p^2-1)}{1} \sum_{k=0}^{p-1} (x+k)^{2n-2} - \cdots \\ \cdots + (-1)^n \binom{2n-1}{2} \dfrac{B_{n-1}(p^{2n-2}-1)}{n-1} \sum_{k=0}^{p-1} (x+k)^2. \end{cases}$$

Il suffit de poser x égal à un nombre entier ou à zéro pour conclure de là que $\dfrac{B_n p^n (p^{2n}-1)}{n}$ ***est un nombre entier.*** Ce théorème remplace le premier de deux théorèmes de M. *Lipschitz,* que l'illustre savant a déduit de la considération du développement de $\dfrac{1}{2}\dfrac{e^y+1}{e^y-1}$ et qui consiste en ce que $\dfrac{B_n p^{2n}(p^{2n}-1)}{2n}$ est un nombre entier (Journ. f. Math. t. 96, p. 1).

Pour n premier, $p=2$ on retrouve la remarque de M. *Adams* à l'égard de $\dfrac{B_n}{n}$, vu que

$$2^{2n}-1 = 1+\binom{2n}{n}+2\left\{\binom{2n}{1}+\binom{2n}{2}+\cdots+\binom{2n}{n-1}\right\},$$

où

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n.\overline{2n-1}\ldots\overline{n+1}}{n!} = 2\frac{(n-1)!+En}{(n-1)!} = 2+\frac{2En}{(n-1)!}$$

et tous les termes entre parenthèses ont n pour facteur, d'où il suit que $2^{2n}-1$ n'est divisible par n que pour $n=3$.

En supposant $2n+1$ premier et se rappelant que ce nombre premier sera le facteur du dénominateur de B_n, on conclut que pour $p<2n+1$, $p^{2n}-1$ sera divisible par $2n+1$, ce qui n'est que le théorème de *Fermat.*

L'égalité (5.) devient pour $x=0$:

$$(-1)^n B_n p\frac{p^{2n}-1}{n} = (p-1)\frac{\varphi_{2n}(p)}{2n}-2\frac{\varphi_{2n+1}(p)}{2n+1}$$
$$+\binom{2n-1}{1}B_1\frac{p^2-1}{1}\frac{\varphi_{2n-1}(p)}{2n-1}-\cdots+(-1)^n\binom{2n-1}{2}B_{n-1}\frac{p^{2n-2}-1}{n-1}\frac{\varphi_3(p)}{3}.$$

Étant démontrée pour p entier, cette égalité singulière aura lieu évidemment pour chaque valeur de p.

En y remplaçant p par $\frac{1}{p}$ et remarquant que

$$p^i\varphi_i\left(\frac{1}{p}\right)-\varphi_i(1) = -\frac{i}{2}(p-1)+\binom{i}{2}B_1(p^2-1)-\cdots$$

on trouve une formule intéressante. Mais je m'arrête et ne dirai plus qu'un mot à l'égard des polynômes de *Bernoulli.*

L'équation de la forme

$$f(x+1)-f(x) = \psi(x)$$

peut toujours être remplacée par celle-ci

$$\int_x^{x+1} f(z)\,dz = \int_a^x \psi(z)\,dz+\int_a^{a+1} f(z)\,dz,$$

ou encore

$$\int_0^1 f(x+\theta)\,d\theta = \int_a^x \psi(z)\,dz+\int_a^{a+1} f(z)\,dz,$$

qui donne

$$f(x+\theta_x) = \int_a^x \psi(z)\,dz+\int_a^{a+1} f(z)\,dz,$$

θ_x étant une fonction dont la valeur reste toujours entre 0 et 1. Posant $f(x) = \varphi_n(x)$, $\psi(z) = nz^{n-1}$, $a = 0$, on aura

$$\varphi_n(x+\theta_x) = x^n + \int_0^1 \varphi_n(x)dx,$$

d'où, en admettant $x+\theta_x = y$, on obtient

$$\varphi_n(y) = (y-\theta'_y)^n + \int_0^1 \varphi_n(x)dx,$$

θ'_y étant compris entre 0 et 1.

On aura donc

$$\varphi_{2n}(x) = (x-\theta_x)^{2n} + (-1)^n B_n,$$
$$\varphi_{2n+1}(x) = (x-\theta_x)^{2n+1}.$$

Ces formules sont très utiles pour juger de la convergence des séries ordonnées suivant les polynômes de *Bernoulli,* ainsi que pour d'autres recherches.

Mais je quitte décidément les polynômes de *Bernoulli* pour vous entretenir, Monsieur, au sujet de la formule

$$\log\frac{\Gamma(y+\frac{1}{2})}{\Gamma(y)} = \frac{1}{2}\log y + 2\sum_{m=1}^{k-1}(-1)^m(1-2^{-2m})\frac{B_m}{(2m-1)(2m)}y^{-2m+1} + 2\vartheta(-1)^k(1-2^{-2k})\frac{B_k}{(2k-1)2k}y^{-2k+1}$$

dont vous avez eu l'obligeance de me reconnaître la priorité. Sous cette forme elle ne permet de trouver que le signe et la limite supérieure de la valeur absolue de l'erreur. Mais il est aisé non seulement d'abaisser la limite supérieure mais de trouver en même temps la limite inférieure de l'erreur. Pour atteindre ce but je n'ai qu'à revenir à mon Mémoire „*Sur l'intégrale* $\int_a^b F(x)\frac{dx}{z-x}$“ publié en 1892 dans les „Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg“*) et que je vous envoie ci-joint. Les éditions de l'Académie de St. Pétersbourg étant très peu répandues, même en Russie, je me permets d'exposer ici succinctement ma méthode.

Considérons l'intégrale

$$\Omega(z) = \int_0^\infty F(x)\frac{z\,dx}{x^2+z^2}$$

et supposons que la fonction $F(x)$ ne devienne négative entre les limites

*) VIIe Série, T. XXVIII, No. 14.

de l'intégrale. On a

$$\Omega(z) = z^{-1}\int_0^\infty F(x)dx - z^{-3}\int_0^\infty F(x)x^2dx + \cdots$$
$$-(-1)^n z^{-2n+1}\int_0^\infty F(x)x^{2n-2}dx + (-1)^n z^{-2n+1}\int_0^\infty F(x)\frac{x^{2n}dx}{x^2+z^2}.$$

x^2+z^2 étant une fonction croissante, $\frac{1}{x^2+z^2}$ une fonction décroissante de x, on trouve en appliquant le théorème connu de feu *Tchebichef*

$$\int_0^\infty F(x)x^{2n}dx \int_0^\infty F(x)x^{2n}(x^2+z^2)\frac{1}{x^2+z^2}dx$$
$$< \int_0^\infty F(x)x^{2n}(x^2+z^2)dx \int_0^\infty F(x)x^{2n}\frac{dx}{x^2+z^2},$$

d'où

$$\int_0^\infty F(x)\frac{x^{2n}dx}{x^2+z^2} > \frac{\int_0^\infty F(x)x^{2n}dx}{z^2+\frac{\int_0^\infty F(x)x^{2n+2}dx}{\int_0^\infty F(x)x^{2n}dx}}.$$

On a encore par le même théorème:

$$z^2\int_0^\infty F(x)x^{2n-2}dx \int_0^\infty F(x)x^{2n-2}x^2\frac{1}{x^2+z^2}dx$$
$$< z^2\int_0^\infty F(x)x^{2n}dx \int_0^\infty F(x)x^{2n-2}\frac{dx}{x^2+z^2},$$

d'où, en remplaçant au second membre

$$z^2\int_0^\infty F(x)x^{2n-2}\frac{dx}{x^2+z^2} \quad \text{par} \quad \int_0^\infty F(x)x^{2n-2}dx - \int_0^\infty F(x)\frac{x^{2n}dx}{x^2+z^2},$$

on trouvera aisément

$$\int_0^\infty F(x)\frac{x^{2n}dx}{x^2+z^2} < \frac{\int_0^\infty F(x)x^{2n}dx}{z^2+\frac{\int_0^\infty F(x)x^{2n}dx}{\int_0^\infty F(x)x^{2n-2}dx}}.$$

On aura donc définitivement:

$$\Omega(z) = z^{-1}\int_0^\infty F(x)\,dx - z^{-3}\int_0^\infty F(x)x^2\,dx + \cdots$$
$$-(-1)^n z^{-2n+1}\int_0^\infty F(x)x^{2n-2}\,dx + (-1)^n\frac{z^{-2n+1}}{z^2+R}\int_0^\infty F(x)x^{2n}\,dx,$$
$$\frac{\int_0^\infty F(x)x^{2n+2}\,dx}{\int_0^\infty F(x)x^{2n}\,dx} > R > \frac{\int_0^\infty F(x)x^{2n}\,dx}{\int_0^\infty F(x)x^{2n-2}\,dx}.$$

J'ai déduit ce résultat aussi simple que commode par l'application du théorème de *Tchebichef*, que j'ai l'habitude de nommer troisième théorème de la moyenne (dans mes leçons sur les intégrales définies). Mais il est remarquable que ce résultat peut être obtenu aussi par l'application de la nouvelle forme du reste de la série de *Taylor* que j'ai publiée en 1891 (voyez page 14 du Mém. cité sur l'intégrale . . .).

A la fin de mon Mémoire *sur l'intégrale* $\int_a^b F(x)\frac{dx}{z-x}$ j'ai appliqué la formule générale que je viens d'écrire à la détermination du reste de la formule de *Stirling;* maintenant je vais le faire par rapport au développement de $\log\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)}$.

Je prend votre formule

$$\log\frac{\Gamma(a+\xi)}{\Gamma(a)} - \xi\log a = \int_{-\infty}^0 F_1(x)e^{ax}\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{x\varphi(x)dx}{a^2+x^2} - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{a\psi(x)dx}{a^2+x^2},$$

où

$$\varphi(x) = \operatorname{artg}\frac{e^{2\pi x}\sin 2\pi\xi}{1-e^{2\pi x}\cos 2\pi\xi},$$
$$\psi(x) = \tfrac{1}{4}\log[1-2e^{2\pi x}\cos 2\pi\xi + e^{4\pi x}] - \tfrac{1}{2}\log(1-e^{2\pi x})$$

et j'y pose $\xi = \frac{1}{2}$ pour obtenir: $\varphi(x) = 0$,

$$\log\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)} - \tfrac{1}{2}\log a = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 \log\Big(\frac{1+e^{2\pi x}}{1-e^{2\pi x}}\Big)\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \log\Big(\frac{1+e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}}\Big)\frac{a\,dx}{a^2+x^2}.$$

Comme on a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \log\Big(\frac{1+e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}}\Big)x^{2n-2}dx = \frac{1-2^{-2n}}{n(2n-1)}B_n,$$

on trouvera

$$\log\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)} = \tfrac{1}{2}\log a + \sum_{m=1}^{n}(-1)^m\frac{1-2^{-2m}}{m(2m-1)}B_m a^{-2m+1} - (-1)^n\frac{1-2^{-2n-2}}{(n+1)(2n+1)}B_{n+1}\frac{a^{-2n+1}}{a^2+R},$$

où

$$\frac{1}{4}\frac{(n+1)(2n+1)}{(n+2)(2n+3)}\frac{2^{2n+4}-1}{2^{2n+2}-1}\frac{B_{n+2}}{B_{n+1}} > R > \frac{1}{4}\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)}\frac{2^{2n+2}-1}{2^{2n}-1}\frac{B_{n+1}}{B_n}.$$

En désignant

$$(k+\tfrac{1}{2})(k+1)\frac{B_k}{B_{k+1}}$$

par Ω_k, j'ai calculé

$$\Omega_1 = 15, \quad \Omega_2 = 10{,}5, \quad \ldots, \quad \Omega_9 = 9{,}86963\ldots, \quad \Omega_\infty = \pi^2 = 9{,}86960\ldots,$$

donc

$$\frac{(n+1)(n+\frac{1}{2})}{4\Omega_{n+1}}\frac{2^{2n+4}-1}{2^{2n+2}-1} > R > \frac{n(n-\frac{1}{2})}{4\Omega_n}\frac{2^{2n+2}-1}{2^{2n}-1}.$$

On a, p. ex., pour $n=5$:

$$3{,}4 > R > 2{,}2.$$

St.-Pétersbourg, le 12 décembre 1895.

Ueber gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse.

(Von Herrn *Lothar Heffter* in Giessen.)

In den neueren Untersuchungen des Herrn *Fuchs**) spielt der zuerst von *Riemann***) berührte Begriff von linearen Differentialgleichungen, welche derselben Klasse angehören, eine wichtige Rolle. Es dürfte deshalb nicht ohne Interesse sein zu zeigen, wie dieser Begriff mit dem des gemeinsamen Vielfachen zweier linearen Differentialausdrücke auf's Innigste zusammenhängt und wie sich bei dieser Auffassung die ganze Theorie von Differentialgleichungen derselben Klasse in denkbar einfachster Weise ergiebt. Nebenbei werden einige Ergebnisse über gemeinsame Theiler zweier linearer Differentialausdrücke auftreten, die sich zum Theil mit Resultaten von Herrn *von Escherich****) berühren.

I.

Kleinstes gemeinsames Vielfaches zweier linearen Differentialausdrücke.

Sind

$$P(y) \equiv P(p,\ y) \equiv p_0 y + p_1 y' + \cdots + p_\nu y^{(\nu)},$$
$$R(y) \equiv R(r,\ y) \equiv r_0 y + r_1 y' + \cdots + r_n y^{(n)}$$

zwei lineare homogene Differentialausdrücke, deren Coefficienten sich bei $x = 0$ rational verhalten, so fragen wir zuerst nach dem *kleinsten gemeinsamen Vielfachen beider*, d. h. nach dem Differentialausdruck niedrigster Ordnung, der ebenfalls bei $x = 0$ sich rational verhaltende Coefficienten hat

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Dez. 1888 u. ff.

**) Ges. Werke; Nachlass, S. 361 (1. Ausgabe).

***) Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. 46 (1883) S. 61 ff.

und sowohl durch P wie durch R theilbar ist,

$$(1.) \qquad Z \equiv SP \equiv QR.$$

Um Z, d. h. um die Differentialausdrücke S und Q zu finden, bilden wir die Identitäten

$$(2.) \quad \begin{cases} P \equiv P(p, y), \\ P' \equiv P(p', y)+P(p, y'), \\ P'' \equiv P(p'', y)+2P(p', y')+P(p, y''), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P^{(n)} \equiv P(p^{(n)}, y)+\binom{n}{1}P(p^{(n-1)}, y')+\cdots+P(p, y^{(n)}), \\ R \equiv R(r, y), \\ R' \equiv R(r', y)+R(r, y'), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R^{(\nu)} \equiv R(r^{(\nu)}, y)+\binom{\nu}{1}R(r^{(\nu-1)}, y')+\cdots+R(r, y^{(\nu)}), \end{cases}$$

componiren die $n+1$ ersten mit den zu bestimmenden Coefficienten $s_0, s_1, \ldots, s_n$ von S, die $\nu+1$ letzten mit den Coefficienten $q_0, q_1, \ldots, q_\nu$ von Q und erhalten durch Vergleichung der Coefficienten von $y, y', \ldots, y^{(n+\nu)}$ auf beiden Seiten das Gleichungssystem

$$(3.) \quad \begin{cases} s_0p_0+s_1p_0'+\cdots+s_np_0^{(n)} = q_0r_0+q_1r_0'+\cdots+q_\nu r_0^{(\nu)} \\ s_0p_1+s_1(p_1'+p_0)+\cdots+s_n(p_1^{(n)}+np_0^{(n-1)}) = q_0r_1+\cdots+q_\nu(r_1^{(\nu)}+\nu r_0^{(\nu-1)}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{n-1}p_\nu+s_n(np_\nu'+p_{\nu-1}) = q_{\nu-1}r_n+q_\nu(\nu r_n'+r_{n-1}), \\ s_np_\nu = q_\nu r_n. \end{cases}$$

Dies sind $n+\nu+1$ lineare homogene Gleichungen für die $n+\nu+2$ Unbekannten s und q, die also stets demgemäss zu bestimmen sind, natürlich bis auf einen allen gemeinsamen Factor. Letzteres hat zur Folge, dass wenn P und R z. B. in der Normalform bei $x=0$*) angenommen werden, etwa auch S sogleich in dieser aufgestellt werden kann, wonach dann Q von selbst ebenfalls die Normalform hat.

Das kleinste gemeinsame Vielfache von P und R ist also höchstens von der Ordnung $n+\nu$.

Man kann sogleich die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür aufstellen, dass die Ordnung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen

*) Vgl. *Frobenius,* dieses Journal Bd. 80 (1875) S. 319.

von P und R kleiner als $n+\nu$ wird. s_n nämlich wird dann und nur dann nach (3.) Null oder willkürlich, wenn die aus den Coefficienten von (3.) nach Streichung der zu s_n gehörigen Colonne zu bildende Determinante identisch verschwindet, oder wenn, — da $r_n \not\equiv 0$ — die Determinante

$$(4.)\quad \Delta \equiv \begin{vmatrix} p_0, & p_0', & \ldots, & p_0^{(n-1)}, & r_0, & r_0', & \ldots, & r_0^{(\nu-1)} \\ p_1, & p_1'+p_0, & \ldots, & & r_1, & r_1'+r_0, & \ldots, & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0, & 0, & \ldots, & p_\nu, & 0, & 0, & \ldots, & r_n \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet. Dieselbe Bedingung erhält man — wie es der Fall sein muss — dafür, dass Q von niedrigerer als νter Ordnung ist.

Es ist leicht, aus dem System (3.) auch die Bedingungen dafür abzuleiten, dass das kleinste gemeinsame Vielfache von P und R nur $(n+\nu-\sigma)$-ter Ordnung ist. Wir beschränken uns hier auf den Ausspruch des Satzes:

Dann und nur dann, wenn $\Delta \not\equiv 0$, ist das kleinste gemeinsame Vielfache von P und R genau von der Ordnung $n+\nu$.

II.

Gemeinsames Vielfaches und gemeinsamer Theiler zweier linearen Differentialausdrücke.

Wenn das kleinste gemeinsame Vielfache von P und R niedrigerer Ordnung als $n+\nu$ ist, so ist also in

$$SP \equiv QR$$

die Ordnung σ von $S < n$, die Ordnung $\nu-n+\sigma$ von $Q < \nu$. Seien dann

$y_{P_1}, y_{P_2}, \ldots, y_{P_\nu}$ ein Fundamentalsystem von $P = 0$,

$y_{S_1}, y_{S_2}, \ldots, y_{S_\sigma}$ - - - $S = 0$,

$y_{R_1}, y_{R_2}, \ldots, y_{R_n}$ - - - $R = 0$,

$y_{Q_1}, y_{Q_2}, \ldots, y_{Q_{\nu-n+\sigma}}$ - - - $Q = 0$,

η_λ ein Integral von $P(y) = y_{S_\lambda}$, $(\lambda = 1, 2, \ldots, \sigma)$

ζ_λ - - - $R(y) = y_{Q_\lambda}$, $(\lambda = 1, 2, \ldots, \nu-n+\sigma)$

so bilden sowohl

$$y_{R_1}, \ldots, y_{R_n}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{\nu-n+\sigma}$$

als auch

$$y_{P_1} \cdots y_{P_\nu}, \quad \eta_1 \cdots \eta_\sigma$$

ein Fundamentalsystem der Gleichung

$$SP \equiv QR = 0^*).$$

Also ist

$$\begin{aligned} y_{P_1} &\equiv A_{11}y_{R_1}+\cdots+A_{1n}y_{R_n}+B_{11}\zeta_1+\cdots+B_{1,\nu-n+\sigma}\zeta_{\nu-n+\sigma}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{P_\nu} &\equiv A_{\nu 1}y_{R_1}+\cdots+A_{\nu n}y_{R_n}+B_{\nu 1}\zeta_1+\cdots+B_{\nu,\nu-n+\sigma}\zeta_{\nu-n+\sigma}, \end{aligned}$$

wo die A und B Constanten sind. Da $\nu-n+\sigma<\nu$, kann man aus je $\nu-n+\sigma+1$ dieser ν Gleichungen die ζ eliminiren und hat dann jedes Mal rechts ein Integral von $R=0$, links ein solches von $P=0$, d. h.

Wenn das kleinste gemeinsame Vielfache von P und R von niedrigerer Ordnung ist als $n+\nu$, so haben P und R einen gemeinsamen Theiler.

Die Umkehrung ist evident. Haben P und R den gemeinsamen Theiler T,

$$P \equiv P_1 T, \quad R \equiv R_1 T,$$

wo die Ordnung ν_1 von $P_1<\nu$, die von R_1 $n_1<n$, so ist das kleinste gemeinsame Vielfache von P_1 und R_1 höchstens $(n_1+\nu_1)$-ter Ordnung, also das von P und R höchstens von der Ordnung

$$n_1+\nu_1+\nu-\nu_1 = n_1+\nu < n+\nu.$$

Zusammenfassend finden wir also den Satz:

Haben P und R keinen gemeinsamen Theiler, so ist das kleinste gemeinsame Vielfache von P und R genau von der Ordnung $n+\nu$ und umgekehrt. Haben P und R einen grössten gemeinsamen Theiler von der Ordnung σ, so ist das kleinste gemeinsame Vielfache beider genau von der Ordnung $n+\nu-\sigma$ und umgekehrt.

Hiernach und nach dem Satz am Schluss der vorigen Nummer entscheidet also die Determinante Δ zugleich über das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein eines gemeinsamen Theilers von P und R. In dieser Bedeutung tritt dieselbe Determinante bei Herrn *von Escherich* (a. a. O.) auf und hat deshalb mit Recht den Namen *Resultante der beiden Gleichungen* $P=0$ *und* $R=0$ erhalten. Auch ihre Bildung erinnert ja augenscheinlich an die Resultante zweier algebraischen Gleichungen.

---

*) Vgl. *Frobenius*, dieses Journal, Bd. 76 (1873) S. 259.

III.

Inverse Differentialausdrücke.

Wir setzen jetzt P und R ohne gemeinsamen Theiler voraus, sodass ihre Resultante Δ nicht identisch Null ist. Dann lässt sich ein Differentialausdruck $(n-1)$-ter Ordnung $P_{-1}(y)$ eindeutig so bestimmen, dass

$$P_{-1}P(y) \equiv y + TR(y), \tag{5.}$$

wo T $(\nu-1)$-ter Ordnung; denn für die Coefficienten von P_{-1} und T erhält man durch genau analoge Rechnung wie in I. ein nicht homogenes Gleichungssystem, dessen Determinante gerade Δ ist. Da nach (5.)

$$P_{-1}P(y_R) \equiv y_R \tag{6.}$$

ist, wollen wir P_{-1} *den zu P in Bezug auf den Modul R inversen Differentialausdruck* nennen. (Gleichzeitig ist also $-T$ invers zu R mod.P).

Mit Hülfe von (5.) lässt sich nun aus Gleichung (1.)

$$SP \equiv QR$$

eine andere Gleichung ableiten, in der R und S ihre Stellung vertauscht haben, d. h. bei der R als äusserer, S als innerer Differentialausdruck erscheint.

Aus (1.) folgt nämlich zunächst, wenn y_S ein Integral von $S=0$ bedeutet, y_R ein solches von $R=0$,

$$P(y_R) \equiv y_S. \tag{7.}$$

Da P und R ohne gemeinsamen Theiler, erhält man aus (7.) durch jedes nicht identisch verschwindende Integral y_R ein nicht identisch verschwindendes Integral y_S, durch ein Fundamentalsystem, für y_R substituirt, ein Fundamentalsystem von $S=0$, durch das allgemeine Integral y_R das allgemeine Integral y_S. Substituirt man daher in (6.) für $P(y_R)$ y_S, so hat die Gleichung

$$P_{-1}(y_S) \equiv y_R \tag{8.}$$

genau analoge Geltung wie soeben Gleichung (7.) und liefert für jedes beliebige nicht verschwindende Integral y_S ein nicht verschwindendes Integral y_R. Daraus folgt, dass die Gleichung $P_{-1}=0$ mit $S=0$ kein Integral gemein hat, dass aber $RP_{-1}=0$ durch alle Integrale von $S=0$ befriedigt wird, oder

$$RP_{-1} \equiv Q_{-1}S, \tag{9.}$$

die Identität, bei der nun R als äusserer, S als innerer Differentialausdruck erscheint und S und P_{-1} ohne gemeinsamen Theiler sind.

Für Q_{-1} ergiebt sich noch eine interessante Beziehung. Es ist nach (9.) und (1.)

$$RP_{-1}P \equiv Q_{-1}SP \equiv Q_{-1}QR,$$

also nach (5.)

$$Q_{-1}QR(y) \equiv R(y+TR(y)) \equiv R(y)+RTR(y).$$

oder, wenn man den inneren Differentialausdruck $R(y)$ beiderseits durch y ersetzt,

$$(10.) \qquad Q_{-1}Q(y) \equiv y+RT(y),$$

d. h. Q_{-1} *ist invers zu* Q *mod.*T, wo T der in (5.) auftretende Differentialausdruck ist.

Wegen der völligen Gleichberechtigung aber, die jetzt zwischen

$R,\ P,\ Q,\ S$ einerseits

und $S,\ P_{-1},\ Q_{-1},\ R$ bezw. andererseits

erwiesen ist, bestehen noch die Identitäten

$$(11.) \qquad PP_{-1}(y) \equiv y+US(y),$$

$$(12.) \qquad QQ_{-1}(y) \equiv y+SU(y),$$

d. h. P *ist invers zu* P_{-1} *mod.*S *und* Q *invers zu* Q_{-1} *mod.*U, wo U ein Differentialausdruck $(\nu-1)$-ter Ordnung ist.

Diese Ergebnisse fassen wir dahin zusammen:

Sind P und R ohne gemeinsamen Theiler, so bestehen die Identitäten

$$(1.)\ SP \equiv QR \qquad \text{und} \qquad (9.)\ Q_{-1}S \equiv RP_{-1},$$

wobei S von $n$ter Ordnung,

$$(5.)\ P_{-1}P(y) \equiv y+TR(y), \qquad (10.)\ Q_{-1}Q(y) \equiv y+RT(y),$$

$$(11.)\ PP_{-1}(y) \equiv y+US(y), \qquad (12.)\ QQ_{-1}(y) \equiv y+SU(y)$$

und die Integrale von $S=0$ und $R=0$ durch die Gleichungen verknüpft sind

$$(7.)\ P(y_R) \equiv y_S \qquad \text{und} \qquad (8.)\ P_{-1}(y_S) \equiv y_R.$$

IV.

Differentialgleichungen derselben Klasse.

Wir nehmen jetzt $\nu \leqq n-1$ und nennen im Anschluss an die Definition von Herrn *Fuchs* (a. a. O.) *jede Differentialgleichung, welcher der Ausdruck*

$$y_S \equiv P(y_R)$$

*für jedes Integral y_R von $R=0$ genügt, mit $R=0$ bei $x=0$ zu derselben Klasse gehörig**).

Hiernach gehört die Gleichung $S=0$, deren Ausdruck S man bei Aufsuchung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von R und P findet, mit $R=0$ zu derselben Klasse. Wenn umgekehrt $S=0$ mit $R=0$ zu derselben Klasse gehört, also durch den Ausdruck $y_S \equiv P(y_R)$ für jedes Integral y_R befriedigt wird, so ist $SP(y)$ durch $R(y)$ theilbar,

$$SP(y) \equiv QR(y),$$

SP also wieder gemeinsames Vielfaches von P und R. Man kann daher auch sagen: *Eine Differentialgleichung $S=0$ gehört dann und nur dann mit der Gleichung nter Ordnung $R=0$ zu derselben Klasse, wenn ein Differentialausdruck höchstens $(n-1)$-ter Ordnung P existirt, sodass SP durch R theilbar ist.*

Um alle mit $R=0$ zu derselben Klasse gehörigen Gleichungen zu finden, hat man also nur $P \leqq (n-1)$-ter Ordnung in jeder möglichen Art zu variiren und jedesmal das kleinste gemeinsame Vielfache von P und R aufzusuchen, wie es in I. geschehen ist. Es ergeben sich nun unmittelbar alle von Herrn *Fuchs* (a. a. O.) bewiesenen Sätze.

Wählt man P ohne gemeinsamen Theiler mit R, so wird S nter Ordnung, und man kehrt mittelst des zu P mod. R inversen Differentialausdruckes P_{-1} ebenso von S zu R zurück.

Ist $R=0$ bei $x=0$ irreductibel, so haben daher alle Differentialgleichungen derselben Klasse die Ordnung n.

Ist $R=0$ bei $x=0$ reductibel, so kann man P mit gemeinsamem Theiler mit R bestimmen, d. h. *so giebt es Differentialgleichungen der Klasse, die niedrigerer als nter Ordnung sind.*

Geht man von R mittelst P zu S über und dann von S mittelst P_1 zu T, so hat man

$$y_T \equiv P_1(y_S), \quad y_S \equiv P(y_R),$$

also

$$y_T \equiv P_1 P(y_R). \tag{13.}$$

Reducirt man aber $P_1P(y)$ mod. $R(y)$

$$P_1P(y) \equiv KR(y)+P_2(y), \tag{14.}$$

---

*) Diese Definition umfasst offenbar die *Fuchs*sche, bei der die r und p als rationale Functionen vorausgesetzt werden, als Specialfall.

wo P_2 höchstens $(n-1)$-ter Ordnung, so ist nach (13.) und (14.)

$$P_2(y_R) \equiv y_T, \tag{15.}$$

d. h. man geht mittelst P_2 direct von R zu T über:

Geht man von R zu S mittelst P, von S zu S_1 mittelst P_1 über, so geht man direct von R zu S_1 mittelst des aus P und P_1 zusammengesetzten Differentialausdruckes P_1P über, nachdem dieser mod. *R auf die $(n-1)$-te Ordnung reducirt ist.*

Hieraus und nach den beiden vorangehenden Sätzen folgt nun:

Ist eine Gleichung der Klasse irreductibel, so sind alle Gleichungen derselben Klasse irreductibel. Denn käme man von ihr zu einer reductiblen, so käme man von dieser zu einer Gleichung niedrigerer als $n$ter Ordnung, was nach dem ersten jener beiden Sätze ausgeschlossen ist. — Folglich gilt auch der Satz:

Ist eine Gleichung reductibel, so sind alle Gleichungen derselben Klasse reductibel oder niedrigerer als $n$ter Ordnung.

V.

Die determinirenden Gleichungen von Differentialgleichungen derselben Klasse.

Von Wichtigkeit für die Anwendungen ist endlich die Frage, wie man die Wurzeln der determinirenden Gleichung durch Uebergang zu einer anderen Differentialgleichung derselben Klasse abändern kann.

Die Recursionsformeln von P, R, Q, S bei $x=0$ mögen bezw. lauten:

$$\begin{aligned} p_{kk}c_k + p_{kk-1}c_{k-1} + \cdots &= 0, \\ r_{kk}c_k + r_{kk-1}c_{k-1} + \cdots &= 0, \\ q_{kk}c_k + q_{kk-1}c_{k-1} + \cdots &= 0, \\ s_{kk}c_k + s_{kk-1}c_{k-1} + \cdots &= 0, \end{aligned}$$

sodass p_{kk}, r_{kk}, q_{kk}, s_{kk} die determinirenden Functionen der betreffenden Gleichungen sind und p_{kk-1}, p_{kk-2}, u. s. w. die bekannte (z. B. aus des Verf. „Einl. in die Theorie der lin. Diffgl.“, Leipzig, Teubner, 1894, S. 12 zu entnehmende) Bedeutung haben. Hat dann R die Normalform bei $x=0$, und ist $\overline{P}$ diejenige von P, so dass etwa

$$P \equiv x^{\lambda}\overline{P},$$

wo λ eine positive oder negative ganze Zahl, giebt man endlich auch Q

von vornherein die Normalform, so besteht nach Gleichung (1.) die Relation

$$(16.) \qquad s_{k+\lambda,k+\lambda} \cdot p_{kk} = q_{kk} \cdot r_{kk}.$$

p_{kk} kann ganz beliebig gewählt werden, also auch so, dass $p_{kk} = 0$ keine Wurzel mit $r_{kk} = 0$ gemein hat, dass also nach (16.) die Wurzeln von $p_{kk} = 0$ mit denen von $q_{kk} = 0$ übereinstimmen und folglich die von $s_{k+\lambda,k+\lambda} = 0$ mit denen von $r_{kk} = 0$, wobei λ auch noch disponibel ist. Wir haben daher zunächst den Satz:

Man kann von $R = 0$ stets zu einer Differentialgleichung derselben Klasse $S = 0$ übergehen, deren zu $x = 0$ gehörige determinirende Gleichung Wurzeln hat, die sich von denen der determinirenden Gleichung von $R = 0$ um dieselbe beliebige ganze Zahl ($\gtreqless 0$) unterscheiden.

Aus Formel (7.) folgt überhaupt, *dass jeder Wurzel von $r_{kk} = 0$ eine höchstens um eine ganze Zahl verschiedene Wurzel von $s_{kk} = 0$ entspricht.* Um zu zeigen, dass man auch einzelne Wurzeln von $r_{kk} = 0$ durch andere bei $s_{kk} = 0$ ersetzen kann, nehmen wir R und P in der Normalform an und geben auch S und Q sogleich diese Gestalt. Dann bestehen nach (1.) die von Herrn *Frobenius* zuerst aufgestellten Gleichungen*)

$$(17.) \qquad s_{kk} p_{kk} = q_{kk} r_{kk},$$

$$(18.) \qquad s_{kk} p_{kk-1} + s_{kk-1} p_{k-1k-1} = q_{kk} r_{kk-1} + q_{kk-1} r_{k-1k-1},$$

u. s. w.,

von denen wir aber nur die beiden ersten zu benutzen brauchen. Soll also $s_{kk} = 0$ eine Wurzel besitzen, die $r_{kk} = 0$ nicht hat, so muss $q_{kk} = 0$ diese Wurzel liefern, $p_{kk} = 0$ dafür eine Wurzel von $r_{kk} = 0$ abnehmen.

Sei nun ϱ eine λ-fache Wurzel von $r_{kk} = 0$, so darf $\lambda < n$ angenommen werden, da der Fall $\lambda = n$ schon durch den vorangehenden Satz erledigt ist. Wählen wir P von der λ-ten Ordnung und $p_{kk} = (k-\varrho)^\lambda$, so folgt aus (17.) und (18.)

$$(19.) \qquad q_{kk} \frac{r_{kk} p_{kk-1} - r_{kk-1}(k-\varrho)^\lambda}{(k-\varrho)^\lambda} = q_{kk-1} r_{k-1k-1} - s_{kk-1} p_{k-1k-1}.$$

Für $k = \varrho+1$ ist nun durch geeignete Bestimmung des noch völlig disponiblen $p_{\varrho+1,\varrho}$ stets zu erreichen, dass der Bruch links von Null verschieden ist, ***ausser wenn gleichzeitig***

$$(20.) \qquad r_{\varrho+1,\varrho+1} = 0, \quad r_{\varrho+1,\varrho} = 0.$$

---

*) Vgl. z. B. des Verf. „Einleitung“ S. 187. — *Frobenius*, dieses Journal Bd. 80, (1875) S. 321.

Die rechte Seite von (19.) ist aber durch $(k-\varrho-1)^\lambda$ theilbar, also abgesehen von dem Ausnahmsfall (20.) auch q_{kk}, und da dieses überhaupt nur λten Grades ist, so ist

$$q_{kk} = \text{Const.}(k-\varrho-1)^\lambda,$$

also

$$(21.) \qquad s_{kk} = \text{C.}\frac{r_{kk}}{(k-\varrho)^\lambda}(k-\varrho-1)^\lambda,$$

d. h. ***Man kann von $R=0$ stets zu einer Differentialgleichung $S=0$ derselben Klasse übergehen, deren zu $x=0$ gehörige determinirende Gleichung $s_{kk}=0$ statt der λ-fachen Wurzel ϱ der determinirenden Gleichung $r_{kk}=0$ von $R=0$ die Wurzel $\varrho+1$ λ-fach besitzt, ausser in dem einzigen Fall, wenn $\varrho+1$ zugleich Wurzel von $r_{kk}=0$ und $r_{kk-1}=0$ ist.***

Dieser Satz enthält denjenigen des Herrn ***Fuchs****) und sagt noch etwas mehr aus.

Giessen, September 1895.

---

*) Sitzungsber. d. Berl. Akad. Nov. 1893.

Zur Theorie der algebraischen Functionen.

(Von Herrn *L. Baur* in Darmstadt.)

1. Die Grundgleichung eines jeden Körpers Ω algebraischer Functionen der Veränderlichen x kann in die Form

$$y^n+f_1(x)y^{n-1}+\cdots f_n(x) = 0$$

gesetzt werden, wo f_1, f_2, ..., f_n ganze rationale Functionen von x sind. Die Gesammtheit aller in Ω enthaltenen Functionen, die zugleich algebraisch *ganz* sind, möge als das System $\mathfrak{o}$ bezeichnet werden. Hat man nun n Functionen ω_1, ω_2, ..., ω_n des Systems $\mathfrak{o}$ und bedeuten u_1, u_2, ..., u_n irgend welche ganze rationale Functionen von x, so gehört jedenfalls auch die Function $u_1\omega_1+u_2\omega_2+\cdots+u_n\omega_n$ dem System $\mathfrak{o}$ an. Soll diese Function durch eine Linearfunction algebraisch theilbar sein — diese Untersuchung bildet die Hauptaufgabe bei der Aufstellung einer „Basis für $\mathfrak{o}$“ —, so muss diese Eigenschaft erhalten bleiben, wenn man die ganzen rationalen Functionen u_1, u_2, ..., u_n mod.$(x-c)$ auf ihre constanten Reste c_1, c_2, ..., c_n reducirt, und es muss daher auch die Function

$$\omega = \frac{c_1\omega_1+c_2\omega_2+\cdots+c_n\omega_n}{x-c}$$

algebraisch ganz sein. Da nun nach dem *Dedekind-Weber*schen Hauptsatze über die Discriminante die Gleichungen

$$(1.)\quad \Delta(\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, \omega, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_n) = \frac{c_i^2}{(x-c)^2}\Delta(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^{*)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen, andererseits aber die Discriminante eines jeden Systems von ganzen algebraischen Functionen eine ganze rationale Function von x ist, so ergiebt sich unmittelbar die bis jetzt noch nicht allgemein hervorgehobene wichtige Folgerung**):

*) Siehe die Arbeit der Herren *Dedekind* und *Weber*, d. J. Bd. 92, S. 190 u. 193.

**) Vgl. übrigens meine Arbeiten in den Math. Ann. Bd. 32, S. 156, Bd. 41, S. 492, Bd. 43, S. 508.

Eine Function von der Form $u_1\omega_1+u_2\omega_2+\cdots+u_n\omega_n$ ***kann bloss dann durch eine Linearfunction*** $x-c$ ***algebraisch theilbar sein, ohne dass alle Coefficienten*** $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ***durch*** $x-c$ ***theilbar sind, wenn diese Linearfunction ein mehrfacher Factor der Discriminante des Functionensystems*** $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ***ist.***

2. Gewöhnlich geht man bei der Bestimmung einer Basis für $\mathfrak{o}$ von dem System $1, y, \ldots, y^{n-1}$ aus, dessen Discriminante abgesehen von einem constanten Factor zugleich die Gleichungsdiscriminante ist. Bezeichnet man aber durch X_i diejenige ganze rationale Function höchsten Grades von x, die eben noch in y^i aufgeht, so ist diese Function zunächst vollkommen bestimmt durch die Bedingung, diejenige ganze Function höchsten Grades von x zu sein, welche den Congruenzen

$$\begin{aligned} S(y^i) &\equiv 0 \mod X_i, \\ S(y^{2i}) &\equiv 0 \mod X_i^2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ S(y^{ni}) &\equiv 0 \mod X_i^n \end{aligned}$$

genügt und diese Congruenzen nehmen in jedem concreten Falle unter Benutzung der *Newton*schen Formeln eine sehr einfache Gestalt an. Setzt man dann

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{y}{X_1}, \quad \ldots, \quad y_n = \frac{y^{n-1}}{X_{n-1}},$$

so ist

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{X_1^2 X_2^2 \ldots X_{n-1}^2} \Delta(1, y, \ldots, y^{n-1}),$$

und da hiernach die Discriminante des Systems $y_1, y_2, \ldots, y_n$ im allgemeinen weniger mehrfache Factoren besitzt, wie die Gleichungsdiscriminante, so ist es zweckmässiger bei der Lösung der oben genannten Aufgabe von diesem Systeme auszugehen. Insbesondere:

Enthält die Discriminante des Systems $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ***bloss einfache Linearfactoren, so bildet dieses System selbst eine Basis für*** $\mathfrak{o}$.

In der That, wendet man die Gleichungen (1.) auf die Functionen $\omega_1 = y_1, \ldots, \omega_n = y_n$ an, so können dieselben unter der jetzigen Voraussetzung bloss dann bestehen, wenn die Constanten $c_1, \ldots, c_n$ alle verschwinden, d. h. es kann die ganze Function $u_1y_1+u_2y_2+\cdots+u_ny_n$ jetzt nur dann durch die beliebige Linearfunction $x-c$ theilbar sein, wenn die sämmtlichen Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ den Factor $x-c$ besitzen. Diese Eigenschaft aber charakterisirt das System $y_1, y_2, \ldots, y_n$ als eine Basis von $\mathfrak{o}$.

3. Nachdem Herr *Hensel* gezeigt hat (Acta math. Bd. 18, S. 315), dass der *Dedekind-Weber*sche Discriminantensatz auch für die von ihm ein-

geführten homogenen ganzen algebraischen Formen gilt, ergiebt eine der vorigen ähnliche Ueberlegung, dass die oben gezogene Folgerung sinngemäss auch hier bestehen bleibt, und dass demnach *bei der Aufsuchung eines „absoluten Fundamentalsystems" von vorn herein ebenfalls bloss die mehrfachen Factoren der Gleichungsdiscriminante, oder,* wenn man unter η und η_i bezüglich die den Functionen y und y_i entsprechenden homogenen algebraischen, durch Ξ_i die den Functionen X_i entsprechenden binären Formen von x_1 und x_2 versteht, *bloss die mehrfachen Factoren von* $\Delta(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ *berücksichtigt zu werden brauchen.*

In gleicher Weise folgt,

dass die Functionen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ *immer selbst ein absolutes Fundamentalsystem darstellen, sobald* $\Delta(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ *nur einfache Linearfactoren enthält**).

Ein Beispiel hierfür bietet die Gleichung

$$y^3+x^3y+x = k,$$

wo k eine beliebige nicht verschwindende Constante bedeuten soll. Setzt man hier

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad x_2^2 y = \eta,$$

so geht dieselbe über in

$$\eta^3+x_1^3x_2\eta+x_2^5(x_1-kx_2) = 0,$$

und es ist jetzt, wie man sofort sieht, $\Xi_1 = 1$, also $\eta_2 = \eta$. Ferner ist Ξ_2 zu berechnen aus den Congruenzen

$$\begin{aligned} S(\eta^2) &= -2x_1^3x_2 && \equiv 0 \pmod{\Xi_2}, \\ S(\eta^4) &= 2x_1^6x_2^2 && \equiv 0 \pmod{\Xi_2^2}, \\ S(\eta^6) &= -2x_1^9x_2^3+3x_2^{10}(x_1-kx_2)^2 && \equiv 0 \pmod{\Xi_2^3}, \end{aligned}$$

mithin:

$$\Xi_2 = x_2, \quad \eta_3 = \frac{\eta^2}{x_2}$$

und

$$\Delta(1, \eta, \eta_3) = \frac{1}{x_2^2}\Delta(1, \eta, \eta^2) = -x_2\{4x_1^9+27x_2^7(x_1-kx_2)^2\},$$

so dass thatsächlich, ganz specielle Werthe von k ausgeschlossen, die Discriminante $\Delta(1, \eta, \eta_3)$ bloss einfache Linearfactoren besitzt und die Functionen $1, \eta, \eta_3$ ein absolutes Fundamentalsystem bilden. Die Dimension von η ist

*) In diesem Falle lassen sich auch die Integranden erster Gattung ohne weiteres ganz allgemein angeben, worauf ich demnächst zurückkommen werde.

hier gleich 2, die von η_3 also gleich 3, die Gesammtdimension N des absoluten Fundamentalsystems gleich 5 und das Geschlecht des vorliegenden Körpers um $3-1=2$ Einheiten niedriger als die Gesammtdimension, also $p=3$. Zu dem nämlichen Resultate führen auch die Betrachtungen von *Riemann* und *Clebsch*, wenn man berücksichtigt, dass die betrachtete Gleichung eine Curve vierter Ordnung ohne Doppel- und Rückkehrpunkte darstellt.

Aber auch in jedem anderen Falle wird die Bestimmung eines absoluten Fundamentalsystems durch die obige Bemerkung ausserordentlich vereinfacht.

Bringt man z. B. die Gleichung

$$y^3+3(x+1)^2\{x(x-1)(33x-1)-4\}y-16(9x-1) = 0$$

durch die Substitution

$$x=\frac{x_1}{x_2}, \quad y=\frac{\eta}{x_2^3}$$

in die *Hensel*sche Form

$$\eta^3+3(x_1+x_2)^2\{x_1(x_1-x_2)(33x_1-x_2)-4x_2^3\}x_2\eta-16x_2^8(9x_1-x_2) = 0,$$

so kann die Gleichungsdiscriminante Δ in die Form

$$\Delta=-\Delta(1,\ \eta,\ \eta^2)=-x_1^2(x_1-x_2)^2x_2^3P(x_1,\ x_2)$$

gesetzt werden derart, dass die 11 Linearfactoren der binären Form $P(x_1, x_2)$ sowohl von einander, als auch von x_1, x_1-x_2 und x_2 verschieden sind. Obgleich also die Gleichungsdiscriminante 18 Linearfactoren besitzt, kann doch die Function

$$w = u_1+u_2\eta+u_3\eta^2$$

höchstens durch die drei Linearformen x_2, x_1-x_2, x_2 und — es ist hier, wie leicht zu zeigen, $\Xi_2=x_2$, also $\eta_3=\frac{\eta^2}{x_2}$, $\Delta(1,\eta,\eta_3)=x_1^2(x_1-x_2)^2x_2P(x_1,x_2)$ — die Function

$$w_1 = u_1+u_2\eta+u_3\eta_3$$

höchstens noch durch x_1 und x_1-x_2 theilbar sein und thatsächlich ist dies auch der Fall: die Function

$$\tilde{\eta} = \frac{-8x_2^4(3x_1+x_2)-2x_2(3x_1-x_2)\eta+\eta_3}{x_1(x_1-x_2)}$$

gehört dem durch die obige Gleichung definirten Gattungsbereiche $G(x_1, x_2, \eta)$ an. Es enthält dann $\Delta(1,\eta,\tilde{\eta})=x_2P(x_1,x_2)$ keine mehrfachen Factoren mehr, also stellen die Functionen 1, η, $\tilde{\eta}$ ein absolutes Fundamentalsystem dar, dessen Gesammtdimension $N=0+3+3=6$ ist, so dass das Geschlecht p den Werth $N-2=4$ hat, während die Verzweigungspunkte — hier, wie vorhin, lauter einfache — durch die Gleichung $x_2P(x_1,x_2)=0$ geliefert werden.

Ueber die endlichen Gruppen von Correlationen.

(Von Herrn *S. Kantor* in Dover.)

Das analytische Resultat von *Camille Jordan*s Abhandlung über die endlichen Gruppen linearer Substitutionen*) drückt sich geometrisch wie folgt aus:

Theorem. Sämmtliche endlichen Gruppen von Collineationen der Ebene transformiren entweder 1) einen Punkt und eine Gerade oder 2) ein Geradentripel oder 3) einen Kegelschnitt oder 4) das syzygetische Büschel von Curven dritter Ordnung oder 5) eine Curve vierter Ordnung in sich selbst**).

Corollar. Jede endliche Gruppe von Collineationen transformirt entweder ein Büschel oder ein (etwa auch zerfallendes) Netz von Curven dritter Ordnung in sich.

Auf Grund obigen Theoremes, dessen directe geometrische Herleitung noch ihrer Durchführung wartet, lässt sich die sich anknüpfende Theorie der endlichen Gruppen von Correlationen relativ einfach erledigen, wie die folgenden Theoreme darthun sollen.

§ 1.

Die 2μ Wiederholungen oder die Zusammensetzungen von je 2, 4, ... der Correlationen K_1, K_2, ... der Gruppe geben Collineationen, welche eine ausgezeichnete Untergruppe der ganzen Transformationsgruppe bilden. Ueber diese Collineationen folgt aus dem Satze von *Schröter****): Die Collineation, welche eine Wiederholung einer Correlation bildet, ist eine projective Rota-

*) Dieses Journal Bd. 84. Vorhergegangen waren Arbeiten der Herren *Pepin, Fuchs* und *Klein* über die endlichen Gruppen linearer Substitutionen im binären Gebiete.

**) No. 1 liefert den 1., No. 2 den 2. und 3., No. 3 den 4., No. 4 den 5., 6., 7. Typus von Herrn *Jordan,* No. 5 den von Herrn *Klein* hinzugefügten Typus (M. A. XIV).

***) Dieses Journal Bd. 77. Hierzu auch *Pasch,* M. A. XXIII.

tion, d. h. sie verwandelt ∞^1 Kegelschnitte, welche sich in zwei Punkten T_1, T_2 berühren, jeden in sich.

Nothwendige und hinreichende Bedingung für die Periodicität der Correlation ist die Periodicität einer Wiederholungscollineation. Hieraus folgt:

Lemma I. Eine Gruppe von Correlationen ist stets und nur endlich, wenn die Gruppe der Collineationen, welche sich aus ihnen zusammensetzen, endlich ist.

Die Kegelschnitte des erwähnten Büschels werden durch K selbst involutorisch unter einander transformirt und zwar der Kegelschnitt, welcher aus der doppelt gezählten Geraden T_1T_2 besteht, wird in den Kegelschnitt ST_1+ST_2 transformirt, wo der Punkt S der Geraden T_1T_2 doppelt entspricht und dieser in $T_1T_2+T_1T_2$. Die beiden Kegelschnittbüschel, welche ST_1 und T_2T_1 in S, T_2 oder ST_2 und T_1T_2 in S, T_1 berühren, werden involutorisch unter einander transformirt. Diese Involution heisse J_c. Unter den Kegelschnitten des invarianten Büschels befinden sich zwei invariante Kegelschnitte C_1, C_2, von denen jeder eine Projectivität H_1, H_2 unter seinen Punkten und Tangenten trägt, deren Quadrat H^2 eine Projectivität ist, welche einen Bestandtheil von K^2 bildet. Auch die Incidenzkegelschnitte J, $\mathfrak{J}$, auf welchen sich die sich mit Incidenz entsprechenden Punkte und Geraden befinden, sind im Büschel enthalten. Die beiden Projectivitäten H_1 oder H_2 auf C_1 oder C_2 unter den Punkten und den Berührungspunkten der entsprechenden Tangenten sind in einer und derselben ebenen Collineation enthalten. Es folgt aus dem Gesagten:

Lemma II. Jede Correlation lässt sich auf zwei Arten aus einer Polarität und einer Collineation, welche mit einander vertauschbar sind, zusammensetzen*).

Theorem I. ***Die Correlation K ist sowohl bestimmt durch die Angabe eines der Kegelschnitte C_1, C_2 und die Projectivität H unter seinen Punkten und Tangenten als auch und zwar gleichzeitig mit K^{-1} durch die Angabe von J und $\mathfrak{J}$.***

Denn man kennt hierdurch sei es die beiden Factoren des Lemma II, sei es vier Punkte und die entsprechenden Geraden, wobei aber J, $\mathfrak{J}$ noch zweifache Wahl lässt.

Corollar. Wenn nur K^2 gegeben ist, giebt es ∞^1 Correlationen K entsprechend den ∞^1 Paaren von Kegelschnitten, welche als C_1, C_2 angesehen werden können.

---

*) Ein ähnliches Theorem gilt auch im R_r.

Theorem II. *Die Correlationen K, welche dieselbe Involution unter den Kegelschnitten eines gegebenen Büschels hervorbringen, deren Projectivitäten auf den C aber eine endliche (cyklische) Gruppe bilden, bilden eine endliche Gruppe.*

Denn die Gruppe der Collineationen in der Gruppe ist endlich, worauf Lemma I in Kraft tritt. Die Collineationen haben drei feste Doppelpunkte S, T_1, T_2.

Theorem III. *Wenn von zwei Involutionen J_c unter den Kegelschnitten des Büschels ST_1T_2 die Doppelpaare sich harmonisch trennen, so bilden alle Correlationen, welche mit jenen Involutionen und über einer Collineation K^2 construirt werden, welche periodisch ist, eine endliche Gruppe.*

Die beiden J_c setzen sich zu einer dritten Involution zusammen, aber über dieser werden nur Collineationen in der Gruppe erscheinen. Dass die Gruppe endlich ist, folgt aus Lemma I, wenn jede Correlation nach Lemma II zerlegt wird, weil vier Polaritäten C_1, C_2, C_1', C_2', welche mit $T_1T_2+T_1T_2$ und ST_1+ST_2 eine Oktaederform im Büschel bilden, eine endliche Gruppe zusammensetzen. Die Gruppe ist aber auch die allgemeinste, welche über denselben beiden Involutionen J_c construirt werden kann, da jede Gruppe vertauschbarer Collineationen mit drei festen Doppelpunkten als eine cyklische Gruppe definirt werden kann.

Es sei nun unter den Kegelschnitten des Büschels eine Doppelpyramidengruppe festgesetzt, welche $T_1T_2+T_1T_2$ und ST_1+ST_2 als die beiden Spitzenelemente besitzt. Jede Involution dieser Gruppe, welche um eine Nebenaxe (das ist um C_1C_2) umklappt, verwende man als J_c und construire hierzu die Gruppe des Theoremes II. Als Gruppen der H können verschiedene Gruppen verwendet werden; hiermit ändert sich nur die Ordnung der resultirenden Gruppe. Wie für III hat man:

Theorem IV. *Die allgemeinste Gruppe von Correlationen, welche ein gegebenes invariantes Büschel von Kegelschnitten besitzt, ist die oben erwähnte.*

2. Eine andere Klasse Gruppen hat statt gemeinsamen Tripels ST_1T_2 einen gemeinsamen Kegelschnitt C_1 und eine endliche Gruppe von Projectivitäten H der Punkte zu den Tangenten. Man könnte daran denken, die Gruppe dadurch zu vervollständigen, dass man die Correlationen construirt, welche die Projectivitäten erst als H^2 besitzen. Jedoch entsteht so nur dann eine endliche Gruppe, wenn die neuen (Theilungs-) Projectivitäten mit der gegebenen Collineationsgruppe verbunden eine endliche Gruppe

bilden. Ist also die Collineationsgruppe als vollständig angenommen, so ist eine Erweiterung nicht möglich. Daher:

Theorem V. *Die allgemeinste endliche Gruppe von Collineationen, welche einen Kegelschnitt C fest lässt, wird erhalten, indem man unter den Punkten eines Kegelschnittes C eine der fünf endlichen binären Gruppen festsetzt und die durch sie bestimmten Collineationen mit der Polarität nach C zusammensetzt*).

Es ist auch nicht möglich, diese Gruppe bei festbleibender, als vollständig vorausgesetzter Gruppe der K^2 derart zu vervollständigen, dass man eine Correlation durch eine Gruppe des Theormes IV ersetzt. Denn es entstände eine Collineation, welche C in einen anderen Kegelschnitt überführte und dennoch mit der gegebenen Gruppe eine endliche Gruppe bilden würde, wogegen dieselbe vollständig sein soll.

§ 2.

Es sollen nun alle existirenden Correlationsgruppen aus den existirenden Collineationsgruppen abgeleitet werden.

Theorem VI. *Die allgemeinste Gruppe von Correlationen, welche als ausgezeichnete Untergruppe eine Gruppe des ersten Typus von Herrn Jordan hat, wird construirt, indem zu einer projectiven Rotation der Gruppe die Gruppe des Theoremes* II *construirt wird.*

Wird jede Correlation nach Lemma II zerlegt, so werden die Polaritäten eine Gruppe von Collineationen zusammensetzen, welche endlich ist, wenn die Configurationen der Kegelschnitte C durch die Collineationsgruppe in sich selbst übertragen wird. Die collinearen Bestandtheile aber bilden eine endliche Gruppe, weil sie in der gegebenen Collineationsgruppe enthalten sind.

Theorem VII. *Die allgemeinste Gruppe von Correlationen, welche als ausgezeichnete Untergruppe eine Gruppe des zweiten Jordan'schen Typus besitzt, wird construirt, indem man mit der Collineationsgruppe eine Gruppe des Theoremes* IV *verbindet.*

Diejenigen Collineationen, welche T_1 mit T_2 vertauschen, erscheinen dann nicht als K^2, sie dienen nur dazu, die Correlationen über ST_1T_2 unter einander zu übertragen und setzen sich mit diesen Correlationen zu Polaritäten zu-

*) Dieses Theorem gilt analog im R_r mit festbleibender M_i^{r-i+1}.

sammen, welche ST_1T_2 als gemeinsames Polardreieck besitzen. Diese Polaritäten setzen sich ihrerseits zu einer endlichen Gruppe zusammen, was nur dann möglich ist, wenn die Kegelschnitte einen Bestandtheil einer cyklischen Configuration bilden*). Da die Polaritäten durch die Collineationen unter einander übertragen werden, so kann man statt VII setzen:

Theorem VIII. ***Die allgemeinste Gruppe von Correlationen, deren Collineationen den zweiten Jordanschen Typus zusammensetzen, wird construirt, indem man die Gruppe des Theoremes*** IV ***mit irgend einer Polarität zusammensetzt, welche*** ST_1T_2 ***zum Polardreiecke besitzt.***

Wenn der dritte *Jordan*sche Typus vollständig ist, dann bilden die Doppelpunktstripel der Collineationen des Index 3, welche vorkommen, eine cyklische Configuration von $9n^2$ Punkten mit Bezug auf xyz. Dieselbe setzt sich zusammen aus n^2 cyklischen Configurationen zu je 9 Punkten und zu jeder derselben gehören 9 Kegelschnitte, in Bezug auf welche die drei Doppelpunktsdreiecke sich polar reproduciren. Ich behaupte nun zunächst:

Theorem IX. ***Man erhält eine zum dritten Typus gehörige endliche Gruppe von Correlationen, indem man*** XYZ ***auf alle drei Arten als*** ST_1T_2 ***nimmt, jedesmal eine Gruppe*** IV ***hinzuconstruirt und diese drei Gruppen zusammensetzt.***

Zwei Correlationen aus zwei solchen Gruppen liefern eine Collineation, welche XYZ cyklisch vertauscht. Denn wenn für die erste Correlation ST_1T_2 in XYZ, für die zweite in YZX sind, so entsteht durch Zusammensetzung Y in YX in X; X in YZ in Z; Z in XZ in Y. Es entstehen also in IX nur weitere Collineationen des Index 3. Wie die beiden Formeln $x_1' : x_2' : x_3' = \lambda_1 u_1 : \lambda_2 u_3 : \lambda_3 u_2$ und $x_1' : x_2' : x_3' = \lambda_1' u_3 : \lambda_2' u_2 : \lambda_3' u_1$ zeigen, genügt die Endlichkeit der drei componirenden Gruppen, damit die Gesammtgruppe endlich sei.

Die in IX entstehenden Gruppen enthalten indessen nur Polaritäten, deren Kernkegelschnitte XYZ in uneigentlicher Weise polar reproduciren. Es kommen auch keine Collineationen vor, welche die drei Punkte mit dem Index 2 vertauschen würden.

---

*) Cyklische Configurationen von Kegelschnitten habe ich (Denkschriften der Wiener Ak. Bd. XL) so definirt. Es seien in Bezug auf xyz eine cyklische Configuration von n^2 Punkten und eine solche von n^2 Geraden gegeben. Dann giebt es n^2 Kegelschnitte, welche solche Lage haben, dass jeder der n^2 Punkte in Bezug auf jeden der n^2 Kegelschnitte eine der n^2 Geraden als Polare besitzt.

Theorem X. *Eine Gruppe von Correlationen, welche den dritten Jordanschen Typus als ausgezeichnete Untergruppe hat, wird construirt, indem man* IX *mit irgend einer Polarität zusammensetzt, welche XYZ zum Polardreiecke besitzt.*

Denn wenn keine Polarität dieser Art vorkommt, so muss die Gruppe nothwendig mit IX übereinstimmen. Die Polaritäten müssen aber durch die vorkommenden Collineationen unter einander übertragen werden und da jeder zu *XYZ* conjugirte Kegelschnitt in jeden anderen solchen durch eine Collineation übergeführt werden kann, welche *X, Y, Z* als Doppelpunkte besitzt, so erhält man die allgemeinste Gruppe, falls die Collineationengruppe als vollständig vorausgesetzt wird. Also:

Theorem XI. *Die allgemeinste Gruppe von Correlationen, welche den dritten Jordanschen Typus enthält, wird construirt, indem man die Polaritäten bezüglich einer durch* X *invarianten cyklischen Configuration von Kegelschnitten mit* X *verbindet.*

Bevor ich zum vierten Typus übergehe, bemerke ich, dass in Herrn *Jordan*s Abhandlung die Substitution *C* lauten muss:

$$C = \begin{vmatrix} x & ax & (1-a)y & -2a(1-a)z \\ y & (1-a)x & ay & 2a(1-a)z \\ z & x & y & (1-2a)z \end{vmatrix}, \qquad a = \frac{-1}{\tau+\tau^{-1}-2};\quad \tau^5 = 1$$

nur dann transformirt die Gruppe einen Kegelschnitt in sich und zwar:

$$z^2((1+2a)^2+4\alpha a^4)+x^2(1+\alpha a(1+a))+y^2(1+\alpha a(1+a))+xy(-2+\alpha(a^2+(1+a)^2)) \\ -2xz(1+2a+\alpha a^2(1+2a)) = 0$$

$$\text{mit} \quad \alpha = \frac{1+a}{a^2}.$$

Theorem XII. *Die allgemeinste Gruppe von Correlationen, welche den vierten Jordan'schen Typus enthält, ist die Gruppe* V, *wenn die Gruppe der Projectivitäten die Ikosaedergruppe ist.*

Alle anderen Gruppen, die aus V entstehen, gehören unter die vorhergehenden.

Theorem XIII. *Die allgemeinste Gruppe von Correlationen, welche den fünften, sechsten oder siebenten Jordan'schen Typus enthält, ist die Gruppe, welche entsteht, wenn die Polaritäten bezüglich jener 36 Kegelschnitte, nach welchen die Wendepunktsconfiguration (das Quadrupel der vier Hesse'schen*

Dreiecke) sich selbst polar ist, mit der Collineation des fünften, sechsten oder siebenten Typus verbunden werden*).

Diese 36 Kegelschnitte sind wie folgt vertheilt. Jedes Wendedreieck wird in je zwei Eckpunkten von drei Kegelschnitten, also insgesammt von 9 berührt, von welchen jeder einem zweiten Wendedreiecke conjugirt ist und die beiden jedesmal übrigen zu einander polaren Dreiecke besitzt. Je drei Kegelschnitte also, welche ein Wendedreieck in drei verschiedenen Eckpunktepaaren berühren, haben ein gemeinsames Polardreieck und ein und dasselbe Paar polar conjugirter Dreiecke. Jedoch sind die perspectivischen Zuweisungen der beiden letzteren Dreiecke verschieden für die drei Kegelschnitte. Die Correlationsgruppe muss die vier Wendedreiecke unter einander permutiren und kann daher keine anderen Polaritäten als jene 36 enthalten. Aus dem weiter folgenden, für alle Gruppen geltenden Theoreme XV ergiebt sich dann aber die Vollständigkeit. Das Lemma II liefert hier keinen directen Beweis.

Theorem XIV. ***Die allgemeinste Gruppe von Correlationen, welche den achten Typus (von Klein) enthält, wird construirt, indem man diese Collineationsgruppe componirt mit den Polaritäten in Bezug auf die zweimal sieben Kegelschnitte, welche durch die Gruppe je unter einander transformirt werden****).

Diese 14 Kegelschnitte sind jeder in Bezug auf die Curve vierter Ordnung C_4: $x_1^3x_2+x_2^3x_3+x_3^2x_1=0$ sich selbst polar. Sie sind es auch bezüglich einer Curve vierter Klasse Γ_4: $u_2^3u_1+u_3^3u_2+u_1^3u_3=0$, welche ebenfalls durch die Collineationsgruppe in sich transformirt wird.

Theorem XV. ***In jeder Correlationengruppe ist die Anzahl der Correlationen gleich der Anzahl der Collineationen.***

Denn durch Zusammensetzung (HC) irgend einer der Correlationen C mit den Collineationen H ensteht die gleiche Anzahl Correlationen, und es muss auch jede der Correlationen dieser Art und zwar nur einmal entstehen.

---

*) Die Unterscheidung des fünften, sechsten, siebenten Typus besteht darin, dass resp. eine harmonische C_3 in sich, ein Paar harmonischer C_3 unter einander oder überhaupt die sechs harmonischen C_3 unter einander transformirt werden.

) Cf. ***Klein*, Math. Ann. XIV, XV, XXVIII. Dass die 2.7 Kegelschnitte durch Zusammensetzung ihrer Polaritäten die 168 Collineationen liefern, ist dort nicht erwähnt.

Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments.

(Erster Aufsatz.)

(Von Herrn *Adolf Kneser* in Dorpat.)

§ 1.

Allgemeines über Differentialgleichungen der Form $y'' = f(x, y)$, deren rechte Seite stets dasselbe Zeichen wie y besitzt.

Durchläuft die unabhängige Variable x alle reellen Werthe, so wechselt ein reelles Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = y$$

entweder sein Zeichen ein einziges Mal, während die erste Ableitung stets ein und dasselbe Zeichen aufweist, oder es behält ein constantes Zeichen überall bei, während die Ableitung höchstens einmal den Werth Null passirt. Man erkennt ferner leicht, wenn man x und y als rechtwinklige Coordinaten in der Ebene ansieht, dass durch zwei Punkte im allgemeinen eine und nur eine Integralcurve gelegt werden kann. Alle diese aus den einfachsten Eigenschaften der Exponentialfunction folgenden Sätze gelten auch für weit allgemeinere Differentialgleichungen, wenn man die Variable x nicht alle reellen Werthe, sondern ein beliebig begrenztes Continuum durchlaufen lässt.

In der Differentialgleichung

$$y'' = f(x, y) \tag{1.}$$

stehe rechts eine Function, welche stets dasselbe Zeichen wie y besitzt; sie sei ausserdem endlich und stetig für beliebige Werthe von y, sobald die Variable x innerhalb des durch die Ungleichung

$$a < x < b \tag{2.}$$

definirten Intervalls J liegt. Für alle Punkte desselben sei ein stetiges

Integral der Differentialgleichung (1.) eindeutig bestimmt, sobald für eine Stelle des Intervalls die Werthe von y und y' willkürlich gegeben sind; dazu genügt es z. B. anzunehmen, dass die Function f stetige erste Ableitungen besitzt, wenn die Variable x im Innern des Gebietes J liegt. Alsdann hat ein stetiges Integral, der Differentialgleichung selbst zufolge, eine stetige zweite und demnach eine stetige erste Ableitung. Da ferner unter den eingeführten Voraussetzungen in dem Bereiche J die Gleichung

$$f(x, 0) = 0$$

besteht, so wird die Forderung, dass für irgend einen Werth von x

$$y = y' = 0$$

sei, erfüllt durch ein Integral, welches identisch verschwindet; ein von diesem verschiedenes kann also niemals zugleich mit seiner ersten Ableitung verschwinden.

Wenn nun für irgend einen der Ungleichung (2.) genügenden Werth ξ die Ungleichungen

$$(3.) \qquad y > 0, \quad y' > 0, \quad y'' > 0$$

bestehen, von denen die dritte aus der ersten folgt, so gelten dieselben für alle Werthe von x, für welche

$$(4.) \qquad \xi \leqq x < b.$$

Zunächst kann nämlich innerhalb des Intervalls J ein Werth ξ_1, der grösser als ξ ist, derartig bestimmt werden, dass die Grösse y' positiv bleibt, sobald

$$\xi \leqq x < \xi_1.$$

Für dieses Gebiet wächst die Function y mit wachsenden Werthen von x, und bleibt demnach positiv auch noch für den Werth $x = \xi_1$; die Differentialgleichung (1.) lehrt dann, dass dasselbe von y'' gilt, sodass auch für $x = \xi_1$ noch die Ungleichungen (3.) bestehen. Man kann daher von ξ_1 in derselben Weise wie von ξ ausgehend einen derartigen Werth ξ_2, der grösser als ξ_1 ist, definiren, dass die Ungleichungen (3.) noch bestehen, solange

$$\xi_1 \leqq x < \xi_2,$$

u. s. f. Die Reihe dieser Grössen ξ_1, ξ_2, ... kann sich keiner im Innern des Intervalls J gelegenen Grenze η annähern; denn bei dieser Annahme beständen die Relationen (3.) für jeden der Ungleichung

$$\xi \leqq x < \eta$$

genügenden Werth von x. In diesem Gebiete würde daher die Grösse y'

mit x zugleich beständig wachsen, also auch für $x = \eta$, da sie stetig ist, noch positiv sein, und dasselbe würde für y und y'' gelten. Man könnte daher die Reihe der Grössen ξ noch über η hinaus fortsetzen, entgegen der Annahme, von der wir ausgingen. Die Ungleichungen (3.) bestehen daher für das ganze Intervall (4.).

Ganz analoge Betrachtungen lassen sich offenbar durchführen, wenn für $x = \xi$

$$(5.) \qquad y < 0, \quad y' < 0, \quad y'' < 0;$$

diese Relationen bleiben dann auch für das ganze Intervall (4.) in Kraft.

Ein anderes Verhalten zeigt die Function y, wenn man annimmt, für $x = \xi$ sei

$$(6.) \qquad y > 0, \quad y' < 0, \quad y'' > 0;$$

alsdann können die Grössen y und y' für die Werthe der unabhängigen Variablen von ξ bis b hin von Null verschieden bleiben, oder nicht. In letzterem Falle kann, wenn man x vom Werthe ξ aus wachsen lässt, erstens die Grösse y eher verschwinden als y'; geschieht dies für $x = \xi_0$, so behält für diesen Werth die Ableitung y' ihr negatives Zeichen bei; also muss die Grösse y von positiven zu negativen Werthen übergehen, und man hat für alle von ξ_0 hinreichend wenig verschiedenen Werthe von x, welche grösser als ξ_0 sind, die Ungleichungen (5.). Diese bleiben dann dem oben erhaltenen Resultat zufolge für das ganze Intervall von ξ_0 bis b gültig. Zweitens aber kann die Grösse y' zuerst verschwinden, etwa für $x = \xi^0$; da für diesen Werth die Grösse y und demnach auch y'' von Null verschieden bleibt, so muss die Grösse y' ihr Zeichen wechseln, und zwar von negativen zu positiven Werthen übergehen. Für diejenigen Werthe von x, welche grösser als ξ^0 und von dieser Grösse hinreichend wenig verschieden sind, gelten daher die Ungleichungen (3.), welche dann wiederum für das ganze Intervall von ξ^0 bis b in Kraft bleiben.

Ganz analoge Entwickelungen lassen sich durchführen, wenn statt der Ungleichungen (6.) die Annahme

$$(7.) \qquad y < 0, \quad y' > 0, \quad y'' < 0$$

zu Grunde gelegt wird. Einer der vier Fälle (3.), (5.), (6.), (7.) muss sich aber, wenn das Integral y nicht identisch verschwindet, in beliebiger Nähe der unteren Grenze des Intervalls J verwirklichen; da nun oberhalb eines

Werthes, für welchen einer der Fälle (3.) und (5.) eintritt, keine Nullstelle der Functionen y und y' im Gebiete J vorhanden ist, auf diese Fälle aber die Ungleichungen (6.) und (7.) zurückführen, nachdem eine der Functionen y und y' einmal verschwunden ist, so ist folgendes Theorem bewiesen.

Beschränkt man die reelle Variable x auf ein beliebig gegebenes Intervall J, so sei die Function $f(x, y)$ endlich und stetig für beliebige reelle, endliche Werthe von y und habe mit dieser Grösse stets dasselbe Vorzeichen; sie sei ferner so beschaffen, dass ein reelles stetiges Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y)$$

durch die Werthe, welche ihm und seiner ersten Ableitung an irgend einer Stelle des Intervalls J vorgeschrieben werden, für den ganzen Umfang dieses Gebietes eindeutig bestimmt ist. Alsdann kann von den Functionen y und y' innerhalb des Intervalls J höchstens eine verschwinden, und diese nicht mehr als einmal.

§ 2.

Der Fall eines nach einer oder beiden Seiten unendlichen Intervalls J.

In der Argumentation, die soeben zu Ende geführt ist, brauchte an keiner Stelle vorausgesetzt zu werden, dass a und b endliche Grössen seien; man kann die erste $= -\infty$, die zweite $= +\infty$ setzen oder beide Annahmen zugleich einführen, ohne dass der Beweis des erhaltenen Theorems zu gelten aufhört.

Reicht das Intervall J von a bis $+\infty$, und verschwindet für $x = a$ keine der Grössen y und y', so sind für diesen Werth des Arguments vier Fälle möglich:

$\alpha)$ $y > 0,\ y' > 0$; $\beta)$ $y < 0,\ y' < 0$; $\gamma)$ $y > 0,\ y' < 0$; $\delta)$ $y < 0,\ y' > 0$.

Bei den ersten beiden ergiebt sich aus § 1 sofort, dass die Ungleichungen für das ganze Intervall bis $+\infty$ gültig bleiben. Im Falle $\alpha)$ z. B. ist y'' ebenfalls positiv, also wächst die Grösse y' beständig mit x und nähert sich demnach für $x = +\infty$ einer endlichen oder unendlichen positiven Grenze; daraus folgt

$$\lim y = +\infty,$$

wobei, wie fortan immer, das Zeichen lim ohne nähere Bezeichnung sich auf den Grenzübergang $x = +\infty$ beziehe. Ebenso erhält man ausgehend

von der Annahme β)

$$\lim y = -\infty.$$

Auf diese beiden Fälle reduciren sich auch die Ungleichungen γ) und δ), wenn eine der Grössen y und y' im Intervall J verschwindet; denn oberhalb einer solchen Nullstelle hätte man einen der Fälle α) und β), da die verschwindende Grösse ihr Zeichen wechselt.

Andere Verhältnisse liegen vor, wenn z. B. die Ungleichungen γ) für das ganze Intervall J gelten. Dann muss, wenn man die Variable x unbegrenzt wachsen lässt, die Grösse y sich beständig abnehmend einer endlichen, nicht negativen Grenze annähern. Wäre dieselbe von Null verschieden, so würde sich auch die zweite Ableitung y'' einer positiven Grenze annähern, also die erste y' positiv unendlich gross werden, was der Voraussetzung widerspricht. Somit ergiebt sich jetzt

$$\lim y = 0.$$

Da ferner y'' ein positiver Werth ist, so muss die Grösse y' beständig zunehmen; sie kann sich keiner negativen Grenze annähern, da sonst die Function y negativ unendlich gross werden müsste. Daraus folgt

$$\lim y' = 0,$$

und die beiden letzten Gleichungen ergeben sich offenbar auch aus der Annahme δ), wenn keine der Grössen y und y' ihr Zeichen ändert. Damit ist folgendes Resultat bewiesen.

Erstreckt sich das in § 1 *definirte Intervall J nach der positiven Seite ins Unendliche, so können für* $x = +\infty$ *zwei Fälle eintreten: A) das Integral y strebt, beständig wachsend oder beständig abnehmend einem der Grenzwerthe* $\pm\infty$ *zu; B) das Integral y und seine Ableitung nähern sich der Grenze Null, indem die eine dieser Grössen beständig wächst, die andere beständig abnimmt.*

Erstreckte sich das Intervall J von einem endlichen Werth b bis $-\infty$, so würden die Fälle α) und β) einerseits und γ) und δ) andererseits, wie man leicht sieht, ihre Eigenschaften vertauschen; bei letzteren würde für $x = -\infty$ die Grösse y beständig wachsend positiv oder beständig abnehmend negativ unendlich gross werden. Bei den Fällen α) und β) hätte man dieselben Möglichkeiten; ausserdem aber könnten die Grössen y und y' auch, in gleichem Sinne sich ändernd, für $x = -\infty$ unendlich klein werden.

Setzt man endlich voraus, dass das Intervall J alle reellen Werthe von x umfasst, so kann man aus den bisherigen Resultaten folgendes schliessen. Wenn keine der Functionen y und y' je verschwindet, so müssen dieselben entweder für $x = +\infty$ unendlich klein und für $x = -\infty$ unendlich gross werden, oder umgekehrt. Verschwindet eine der beiden Grössen, so wird sie für $x = -\infty$ negativ und für $x = +\infty$ positiv unendlich gross oder umgekehrt; die andere wird dann für $x = \pm\infty$ im ersten Falle positiv, im zweiten negativ unendlich gross. Hieraus ersieht man, dass bei der gewöhnlichen geometrischen Deutung der Grössen x und y die Integralcurven der Gleichung

$$y'' = f(x, y), \tag{1.}$$

wenn das Intervall J sich von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt, betreffs der Wendepunkte, Schnitte mit der Abscissenaxe und unendlichen Aeste, nur solche Erscheinungen darbieten, welche bei den Integralen der Gleichung

$$y'' = y$$

und ihrer geometrischen Darstellung auftreten. Allerdings ist bis jetzt nicht gezeigt, dass unter den Integralcurven der Gleichung (1.) solche wirklich vorkommen, die sich der Abscissenaxe asymptotisch annähern; es ergiebt sich dies aber, nachdem eine neue Voraussetzung eingeführt ist, aus § 3.

Die einfachen Erwägungen, auf denen die in diesem und dem vorigen Paragraphen ausgesprochenen Sätze beruhen, habe ich für lineare Differentialgleichungen schon bei einer früheren Gelegenheit angestellt*).

§ 3.

Die Integrale bestimmt durch ihre Werthe an irgend zwei Stellen.

Genauere Vorstellungen über die Gestalt der die Integrale darstellenden Curven gewinnt man, wenn man voraussetzt, was von jetzt an geschehen soll, dass die Function $f(x, y)$ bei festgehaltenem Werthe von x mit y zugleich wachse und abnehme, sobald erstere Grösse innerhalb des beliebig definirten Intervalls J liegt, auf welches sie fortan beschränkt bleibt.

Es seien y und z zwei Integrale der Differentialgleichung (1.); ihre Werthe sowie diejenigen ihrer Ableitungen für ein bestimmtes Argument

*) *Kneser,* Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen. Math. Annalen Bd. XLII, S. 413.

$x = x_0$ mögen durch Anheftung des Index Null bezeichnet werden. Hat man nun

$$y_0 = z_0, \quad y_0' > z_0'$$

so ist für alle von x_0 hinreichend wenig verschiedenen Werthe von x

$$(8.) \qquad y' - z' > 0,$$

mithin auch, wenn $x > x_0$,

$$(9.) \qquad y - z > 0.$$

Hieraus ergiebt sich zufolge der neu eingeführten Voraussetzung

$$(10.) \qquad f(x, y) - f(x, z) > 0, \quad y'' - z'' > 0.$$

Ist dann ξ ein solcher Werth, dass die Ungleichungen (8.), (9.), (10.) bestehen, sobald

$$x_0 < x \leqq \xi,$$

so sei ξ_1 die obere Grenze der Grössen ξ; wir nehmen an, dieselbe liege im Innern des Intervalls J. Die bezeichneten drei Ungleichungen bestehen dann sicher, wenn

$$(11.) \qquad x_0 < x < \xi_1.$$

Da nun im Innern dieses Intervalls der Relation (8.) zufolge die Grösse $y - z$ mit x wächst, so hat sie, als stetige Function, auch für $x = \xi_1$ einen positiven Werth; dasselbe gilt dann von der Differenz

$$f(x, y) - f(x, z) = y'' - z''$$

und demnach auch von $y' - z'$. Daher würden die drei Ungleichungen (8.), (9.), (10.) noch über das Gebiet (11.) hinaus gültig bleiben, entgegen der Voraussetzung, dass ξ_1 die obere Grenze der Werthe ξ sei. Jene Ungleichungen gelten somit von x_0 bis zur oberen Grenze des Intervalls J heran, und man schliesst daraus, dass, wenn x und y rechtwinklige Coordinaten sind, innerhalb eines Streifens, der zur Ordinatenaxe parallel ist und auf der Abscissenaxe das Intervall J ausschneidet, zwei Integralcurven nicht mehr als einen Punkt gemein haben können. Nimmt man speciell für J das Gebiet aller reellen Grössen, so erhält man ein auf andere Weise von *Picard**) bewiesenes Resultat.

Etwas schwerer zu beantworten ist die Frage, ob durch zwei Punkte des definirten Streifens immer eine Integralcurve gelegt werden kann. Es sei

$$(12.) \qquad x_0 < x_1$$

---

*) *Picard*, Traité d'analyse Bd. III S. 103 (1894).

und beide Grössen dem Intervall J angehörig; da nach § 1 vorausgesetzt wird, dass y durch die Werthe y_0 und y_0' für das ganze Gebiet J als stetige Function eindeutig definirt ist, so nimmt sie für $x = x_1$ einen durch y_0 und y_0' bestimmten endlichen Werth y_1 an. Ist dann y_0 zunächst eine feste, nicht negative Grösse

$$y_0 \geqq 0, \tag{13.}$$

während y_0' variirt, so können die Werthe y_1 keine endliche obere Grenze haben; denn wäre η eine solche, so nehmen wir an

$$y_0' > 0, \quad y_0' > \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Da nun y der Ungleichung (13.) zufolge in der Nähe des Werthes x_0 positiv ist, sobald $x > x_0$, so hat man die Ungleichungen

$$y > 0, \quad y' > 0, \quad y'' > 0$$

nach § 1 für das ganze Gebiet von x_0 bis zur oberen Grenze des Intervalls J; mithin wächst die Grösse y' beständig mit wachsenden Werthen von x, und es ist für das bezeichnete Gebiet, also speciell auch bis zum Werthe x_1 hin

$$y' > y_0' > \frac{\eta - y_0}{x_1 - x_0}. \tag{14.}$$

Andererseits kann man setzen

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = (y')_{x = x_m},$$

wenn x_m einen Werth des Intervalls von x_0 bis x_1 bedeutet. Hieraus folgt mit Rücksicht auf (14.)

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \geqq y_0' > \frac{\eta - y_0}{x_1 - x_0},$$

also nach (12.)

$$y_1 > \eta,$$

was der Definition der Grösse η widerspricht. In der That also giebt es unter der Annahme (13.) beliebig grosse Werthe y_1.

Aehnlich kann man zeigen, dass für $y_0 = 0$ keine endliche untere Grenze der Werthe y_1 vorhanden sein kann. Denn wäre ζ eine solche, so setze man

$$y_0' < 0, \quad y_0' < \frac{\zeta}{x_1 - x_0};$$

alsdann hat man, wenn die Differenz $x - x_0$ hinreichend klein und positiv ist,

$$y < 0, \quad y' < 0, \quad y'' < 0,$$

und diese Ungleichungen bestehen dann nach § 1 bis zur oberen Grenze

des Gebietes J hin. Jedenfalls folgt für das Intervall von x_0 bis x_1 hin, einschliesslich des letzteren Werthes

$$y' < y'_0,$$

also, wenn man integrirt,

$$y_1 - y_0 < y'_0(x_1 - x_0)$$

oder, da $y_0 = 0$,

$$y_1 < y'_0(x_1 - x_0) < \zeta,$$

was wiederum der Definition der Grösse ζ widerspricht.

Beachten wir jetzt die Thatsache, dass y_1 als stetige Function von y'_0 angesehen werden kann. Man schliesst nämlich z. B. aus dem von *Picard**) gegebenen Beweise für die Existenz der Integrale einer Differentialgleichung, welcher auf einer Reihe successive eingeführter Approximationen beruht, dass jedenfalls für eine gewisse Umgebung des Werthes x_0 das Integral y dargestellt werden kann als eine gleichmässig convergente Reihe stetiger Functionen von y_0 und y'_0; eine von der Wahl dieser Grössen unabhängige geometrische Progression convergirt stärker als jene Reihe. Hieraus folgt zunächst, dass der Werth von y für irgend einen der Umgebung von x_0 angehörigen Werth von x eine stetige Function von y'_0 ist. Da nun in der Nähe jedes dem Intervall J angehörenden Werthes von x_0 ein ähnliches Gebiet abgegrenzt werden kann, innerhalb dessen die Grösse y sich mit y'_0 stetig ändert, so schliesst man leicht, dass auch für ein beliebiges Gebiet, innerhalb dessen die für das Intervall J vorausgesetzten Eigenschaften der Differentialgleichung nicht verloren gehen, der in jedem einzelnen Punkte vorhandene Werth von y als stetige Function von y_0 angesehen werden kann. Für den Fall, dass die Function $f(x, y)$ analytisch ist und sich regulär verhält, habe ich diese Verhältnisse bei einer anderen Untersuchung erörtert**).

Für den Anfangswerth $y_0 = 0$ ergiebt nun die Annahme $y'_0 = 0$ das Integral $y = 0$; die Grösse y_1 kann also, wenn y'_0 sich stetig ändert, von Null ausgehend, beliebig gross und beliebig klein werden, also jeden reellen Werth erreichen. Dabei kann auch die in der Ungleichung (12.) liegende Beschränkung aufgehoben werden. Setzt man nämlich

$$u = x_0 + x_1 - x,$$

---

*) *Picard*, Traité d'analyse Bd. II. S. 301.

**) *Kneser*, Studien über die Bewegungsvorgänge in der Nähe einer Lage labilen Gleichgewichts, dieses Journal Bd. 115 S. 314.

sodass man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{du^2} = f(x_0+x_1-u,\ y) \tag{15.}$$

erhält, so hat man für

$$x = x_0, \quad x = x_1$$

die entsprechenden Werthe

$$u = x_1, \quad u = x_0, \tag{16.}$$

und die vorher erwähnten, dem Anfangswerth $y_0 = 0$ entsprechenden Integrale y verschwinden für $u = x_1$, während sie für $u = x_0$ beliebige Werthe annehmen können. Da nun die Differentialgleichung (15.) in dem Intervall zwischen den Werthen (16.) diejenigen Eigenschaften besitzt, welche wir bei der Differentialgleichung (1.) benutzt haben, und ebenso allgemein ist wie diese, so folgt, dass man in unseren Betrachtungen auch

$$x_0 > x_1$$

annehmen darf. Berücksichtigt man noch, dass, wie gezeigt, zwei Integralcurven nicht zwei Punkte gemein haben können, so erhält man folgenden Satz.

Jeder Punkt des zur y-Axe parallelen Streifens, welcher auf der x-Axe das Intervall J ausschneidet, kann mit jedem dem letzteren angehörigen Punkte der x-Axe durch eine und nur eine Integralcurve verbunden werden, wenn die Grössen y und $f(x, y)$ sich stets in demselben Sinne ändern, sobald man x im Intervalle J fixirt hat, im übrigen aber die Voraussetzungen des § 1 *gelten.*

Auf Grund dieses Resultates kann nun gezeigt werden, dass auch für positive Werthe von y_0, wenn man die Grösse y_0' variiren lässt, eine endliche untere Grenze der Werthe y_1 nicht existirt. Man lege eine Integralcurve durch die Punkte (x_0, y_0) und $(x_2, 0)$, wobei die Ungleichung

$$x_0 < x_2 < x_1$$

bestehe; die für das Argument x_2 gebildeten Grössen mögen den Index 2 erhalten. Wird dann die Differenz $x_2 - x_0$ unendlich klein, so wächst, wie wir zeigen wollen, die Grösse $|y_2'|$ über alle Grenzen. Durchläuft nämlich die Variable y das Intervall von Null bis y_0, während man für x beliebige Werthe zwischen x_0 und x_1 nimmt, so hat der absolute Betrag der Function $f(x, y)$ eine endliche obere Grenze g, sodass für die angegebenen Argumente

$$|f(x, y)| \leqq g.$$

Nimmt man daher an

$$x_0 \leqq x_3 \leqq x_2, \quad x_0 \leqq x_4 \leqq x_2, \quad x_3 < x_4,$$

so hat man, wenn immer y'_ν der für $x = x_\nu$ erhaltene Werth von y' ist,

$$\int_{x_3}^{x_4} y'' dx = \int_{x_3}^{x_4} f(x, y) dx = y'_4 - y'_3.$$

Nun nimmt y niemals zu, wenn man x von x_0 bis x_2 wachsen lässt, da diese Strecke ausser x_2 nach § 1 keine Nullstelle der Grössen y und y' enthält; also folgt

$$|y'_4 - y'_3| \leqq g(x_4 - x_3) < g(x_1 - x_0). \tag{17.}$$

Andererseits besteht die Gleichung

$$\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{-y_0}{x_2 - x_0} = (y')_{x=x_m},$$

mit der Relation

$$x_0 \leqq x_m \leqq x_2;$$

also giebt es, wenn man die Differenz $x_2 - x_0$ hinreichend klein annimmt, in dem Intervall von x_0 bis x_2 Werthe von y', welche negativ und dem absoluten Betrage nach beliebig gross sind. Alle Werthe von y' in diesem Intervall unterscheiden sich aber von einander nach (17.) nur um Grössen, welche dem absoluten Betrage nach kleiner sind als das von x_2 unabhängige Product $g(x_1 - x_0)$; somit sind die Grössen y'_0 und y'_2 unterhalb einer beliebigen negativen Grenze gelegen, wenn man den Werth x_2 von x_0 hinreichend wenig abweichen lässt.

Ueberschreitet nun die Variable x den Werth x_2, so sind die Grössen y und y' zunächst beide negativ, bleiben es also nach § 1 bis zu dem Werthe x_1 hin, und die Grösse y' nimmt beständig ab. Daraus folgt

$$\int_{x_2}^{x_1} y' dx < \int_{x_2}^{x_1} y'_2 dx,$$

oder

$$y_1 - y_2 < y'_2 (x_1 - x_2)$$

oder, da $y_2 = 0$,

$$\frac{y_1}{x_1 - x_2} < y'_2.$$

Da nun der Nenner der linken Seite sich der von Null verschiedenen Grenze $x_1 - x_0$ nähert, wenn man x_2 und x_0 zusammenrücken lässt, so folgt, dass bei hinreichend geringer Differenz dieser Grössen der Werth y_1 unter jede negative Grenze herabsinkt. Da ferner gezeigt worden ist, dass keine endliche obere Grenze von y_1 vorhanden ist, so durchläuft diese Grösse alle reellen

Werthe, wenn man einen positiven Werth von y_0 festhält und die Grösse y_0' variiren lässt; und dieses Resultat bleibt offenbar, ebenso wie das auf den Fall $y_0 = 0$ bezügliche, gültig auch unter der Annahme $x_1 < x_0$.

Setzt man endlich noch

$$y = -w, \quad -f(x, -w) = g(x, w),$$

so erhält die Differentialgleichung (1.) die Form

$$w'' = g(x, w),$$

und die Function g hat die für f vorausgesetzten Eigenschaften; es kann also auch die Beschränkung auf positive Werthe y_0 fallen, und man erhält schliesslich folgenden allgemeinen Satz.

Unter den eingeführten Voraussetzungen können irgend zwei Punkte, deren Abscissen verschieden sind und dem Intervall J angehören, stets durch eine und nur eine Integralcurve unserer Differentialgleichung verbunden werden.

Für den Fall, dass die Differenz der Abscissen beider Punkte eine gewisse Grenze nicht übersteigt, ist dieses Resultat von *Picard* bewiesen worden, indem das gesuchte Integral durch stufenweise fortschreitende Approximationen dargestellt wird, und zwar für Differentialgleichungen der allgemeineren Form

$$y'' = f(x, y, y').$$

Die bezeichnete einschränkende Voraussetzung lässt es aber zweifelhaft erscheinen, ob der soeben aufgestellte Satz in seinem vollen Umfange aus den interessanten Entwickelungen von *Picard* abgeleitet werden kann*).

Nach diesen Vorbereitungen gelangen wir nunmehr zu einem Angelpunkt unserer Untersuchung, dem Nachweis, dass der Fall (B.) des § 2 bei gewissen Integralen wirklich eintritt, wenn $+\infty$ die obere Grenze des Intervalls J ist. Wir können nach dem obigen Satze ein Integral y bilden, welches für $x = x_0$ den positiven Werth y_0 annimmt, und ausserdem für einen beliebigen Werth $\bar{x}$, der grösser als x_0 ist, verschwindet. Setzt man speciell $\bar{x} = x_1$, so sei das construirte Integral z. Wenn dann die Differenz

*) *Picard*, Traité d'analyse (1894) Bd. III S. 94 ff. In der dort gebrauchten Bezeichnung ist unter unseren Voraussetzungen anzunehmen

$$L = L' = +\infty, \quad \beta = 0;$$

die Unlgeichungen (4.) und (5.) (S. 96) sind daher von selbst erfüllt, während die Ungleichung (6.) (S. 97), in welcher b die Differenz der Abscissen der zu verbindenden Punkte bedeutet, eine Einschränkung involvirt.

$\bar{x}-x_0$ hinreichend klein ist, so ist, wie gezeigt, y_0' eine dem absoluten Betrage nach beliebig grosse negative Grösse, sodass man jedenfalls die Annahme

$$y_0' < z_0' \tag{18.}$$

machen kann. Da nun der Werth von y für jeden einzelnen Argumentwerth eine stetige Function von y_0' ist, also bei hinreichend kleiner Aenderung dieser Grösse sein Zeichen behält, wenn er nicht verschwindet, so folgt, dass auch die einzige Nullstelle der Function y, d. h. der Werth $\bar{x}$ sich mit y_0' zugleich stetig ändert. Bei stetigem Wachsthum der Grösse $\bar{x}$ kann daher die Ungleichung (18.) nur aufhören zu bestehen, wenn einmal $y_0'=z_0'$ wird. Das ist, da die Function z nicht mehr als einmal verschwindet, unmöglich, so lange $\bar{x}<x_1$; unter dieser Voraussetzung bleibt also die Relation (18.) gültig. Da nun x_1 als ein beliebiger specieller Werth von $\bar{x}$ anzusehen ist, kann man auch sagen, dass die Grössen y_0' und $\bar{x}$ sich in gleichem Sinne ändern, wenn man letztere von x_0 aus wachsen lässt. Nähert sie sich der oberen Grenze des Gebiets J, so strebt daher die Grösse y_0' wachsend einer bestimmten Grenze w_0' zu. Diese hat einen endlichen Werth, da sie nicht positiv sein kann; denn wäre sie positiv, so gäbe es positive Werthe von y_0', für welche das zugehörige Integral y eine Nullstelle $\bar{x}$ besässe, was, da auch y_0 eine positive Grösse ist, dem Theorem des § 1 widerspricht.

Das Integral w nun, dessen Anfangswerth für $x=x_0$ wiederum y_0, dessen Ableitung für diese Stelle w_0' ist, muss den Fall § 2 (B.) darbieten, wenn das Intervall J sich ins positiv Unendliche erstreckt. Denn zunächst verschwindet die Grösse w nicht für $x>x_0$, da sie sonst das zu einem bestimmten Werth von $\bar{x}$ gehörende Integral wäre; im Falle § 2 (A.) hätte man also

$$\lim w = +\infty.$$

Fasst man nun einen Werth x ins Auge, für welchen $w>y_0$, so hat für diesen jedes Integral y, welches für $x=x_0$ den Anfangswerth y_0 hat, einen ebenfalls die Grösse y_0 übersteigenden Werth, sobald die Differenz $y_0'-w_0'$ hinreichend klein ist; denn der Werth des Integrals an einer bestimmten Stelle ändert sich mit y_0' stetig. Dann wäre die Grösse y' oberhalb des Arguments x_0 streckenweise positiv; wenn aber die Differenz $y_0'-w_0'$ negativ ist, also die Function y eine Nullstelle $\bar{x}$ besitzt, so ist an dieser die Ableitung y'

negativ. Man hätte also in dem Gebiete J mindestens zwei Nullstellen der Functionen y und y' zusammengenommen, was nach § 1 unmöglich ist. Damit ist gezeigt, dass das Integral w nicht den Fall (A.) sondern den Fall (B.) des § 2 darbietet; d. h.

Unter den eingeführten Voraussetzungen, und wenn das Intervall J nach oben hin unbegrenzt ist, giebt es Integrale der Differentialgleichung

$$y'' = f(x, y),$$

welche für $x = +\infty$ ebenso wie ihre ersten Ableitungen dem Grenzwerth Null zustreben.

Sind w und v zwei solcher Integrale und ist etwa

$$w_0 = v_0, \quad w_0' > v_0', \quad w_0'' = v_0'',$$

so folgt zunächst, wenn man x vom Werthe x_0 aus wachsen lässt

$$w - v > 0, \quad w'' - v'' > 0.$$

Die Differenz $w' - v'$ wächst also auch zunächst und kann im Innern des Intervalls J nie zu wachsen aufhören, wie die zu Anfang dieses Paragraphen gegebene Deduction lehrt; also wächst auch die Differenz $w - v$ beständig und kann keinesfalls für $x = +\infty$ unendlich klein werden. Das widerspricht der Annahme, dass beide Functionen w und v unendlich klein werden, sodass man sieht: ***Zwei Integrale, welche den Fall*** § 2 (B.) ***darbieten, sind identisch, wenn sie an einer Stelle im Innern des Gebietes J gleich sind.***

§ 4.

Die linearen Gleichungen, welche unter den betrachteten enthalten sind.

Unter die betrachteten Differentialgleichungen fällt die lineare

$$y'' = yf(x), \tag{19.}$$

wenn man annimmt, dass für ein bei $x = +\infty$ endigendes Intervall J, also für grosse positive Werthe von x, die Function $f(x)$ stetig und positiv sei, und eine stetige erste Ableitung besitze. Dann hat erstens die rechte Seite, wenn man x festhält, Vorzeichen und Sinn der Aenderung mit y gemein. Zweitens ist ein Integral für das ganze Intervall J, wenn x_0 irgend eine Stelle desselben bedeutet, durch die Werthe y_0 und y_0' als stetige Function eindeutig bestimmt. Denn zunächst gilt dies für ein gewisses, x_0 enthaltendes Gebiet J_0, auf welches demnach der Satz des § 1 angewendet werden kann. Wäre ξ die obere Grenze von J_0, so würden y und y', wenn man x gegen

ξ convergiren lässt, nicht mehr als einmal verschwinden, sich also bestimmten endlichen oder unendlichen Grenzen annähern, und schliesslich einen festen Sinn der Aenderung beibehalten. Würde dann y unendlich gross, so lehrte die aus (19.) folgende Gleichung

$$(19^a.) \quad y'^2 - y_0'^2 = 2\int_{x_0}^{x} y\,y' f(x)\,dx = [y^2 f(x)]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} y^2 f'(x)\,dx,$$

dass der Quotient $y' : y$, mithin auch sein Integral $\log y$ endlich bliebe, was unmöglich ist. Somit nähert sich y, wenn $\lim x = \xi$, einer endlichen Grenze η; der Gleichung (19.) zufolge hat dann auch y' einen endlichen Grenzwerth η'. Das Integral, welches für $x = \xi$ nebst seiner Ableitung die Werthe η bezw. η' annimmt, liefert dann eine stetige Fortsetzung des Integrals y über das Gebiet J_0 hinaus. Dass endlich y für das ganze Intervall J durch die Werthe y und y' eindeutig bestimmt ist, folgt leicht aus der linearen Form der Gleichung (19.). Für diese gelten also die Sätze des § 3; z. B. folgt:

Unter den eingeführten Voraussetzungen unterscheiden sich alle Integrale der Gleichung (19.), *die für* $x = +\infty$ *den Grenzwerth Null haben, von einander um constante Factoren, und es giebt solche Integrale.*

Da weiter jedes Integral der Gleichung (19.) nebst seiner Ableitung für alle hinreichend grossen Werthe von x nach § 1 constanten Zeichens ist, so folgt aus (19^a.):

$$(20.) \qquad y'^2 - y_0'^2 = f(x_m)(y^2 - y_0^2),$$

wobei man hat

$$x_0 \leqq x_m \leqq x,$$

sobald die Grössen x_0 und x eine gewisse Grenze überschritten haben. Jetzt werde speciell angenommen

$$f(x) = a^2 + \varphi(x),$$

wobei a eine positive Grösse sei und für $x = +\infty$

$$\lim \varphi(x) = 0.$$

Bezeichnet man dann allgemein durch $\psi(u)$ den grössten absoluten Betrag, den die Function $\varphi(x)$ für die Werthe $x \geqq u$ annimmt, so ist

$$\lim \psi(x) = 0,$$

und aus der Gleichung (20.) folgt

$$\frac{y'^2 - y_0'^2}{y^2 - y_0^2} = a^2 + \varphi(x_m),$$

$$(21.) \qquad \left| \frac{1}{a^2} \frac{y'^2 - y_0'^2}{y^2 - y_0^2} - 1 \right| \leqq \frac{\psi(x_0)}{a^2},$$

oder auch

$$\left|\frac{1}{a^2}\,\frac{\left(\frac{y'}{y}\right)^2-\left(\frac{y_0'}{y}\right)^2}{1-\left(\frac{y_0}{y}\right)^2}-1\right| \leqq \frac{\psi(x_0)}{a^2}. \tag{22.}$$

Jetzt sei zunächst y ein Integral der Klasse § 2 (A.), welches also für $x=+\infty$ unendlich gross wird, und für grosse Werthe von x mit seiner ersten Ableitung gleichen Zeichens ist. Hält man dann die Grösse x_0 fest, während x unbegrenzt wächst, so werden die Quotienten $y_0 : y$ und $y_0' : y$ so klein wie man will, und die Relation (22.) giebt

$$\left|\left(\frac{y'}{ay}\right)^2+\delta-1\right| \leqq \frac{\psi(x_0)}{a^2}\left|1-\left(\frac{y_0}{y}\right)^2\right|,$$

wobei

$$\lim \delta = 0,$$

mithin, sobald $|y| > |y_0|$,

$$\left|\left(\frac{y'}{ay}\right)^2+\delta-1\right| \leqq \frac{\psi(x_0)}{a^2}. \tag{23.}$$

Wenn nun die positive Grösse η beliebig klein gegeben ist, so kann man zunächst x_0 so fixiren, dass

$$\eta > \frac{\psi(x_0)}{a^2};$$

sobald die Grösse x eine gewisse Grenze überschritten hat, ist dann

$$\eta > |\delta|. \tag{24.}$$

Die Ungleichung (23.) ergiebt aber

$$\left|\left(\frac{y'}{ay}\right)^2-1+\delta\right| < \eta;$$

daraus folgt, falls

$$\left|\left(\frac{y'}{ay}\right)^2-1\right| > |\delta|, \tag{25.}$$

die Ungleichung

$$\left|\left(\frac{y'}{ay}\right)^2-1\right|-|\delta| \leqq \left|\left(\frac{y'}{ay}\right)^2-1+\delta\right| < \eta,$$

also mit Rücksicht auf (24.)

$$\left|\left(\frac{y'}{ay}\right)^2-1\right| < 2\eta,$$

und das gilt offenbar auch dann, wenn die Annahme (25.) nicht erfüllt ist. Da nun für grosse Werthe von x beide Grössen y und y' positiv oder beide

negativ sind, so folgt

$$\lim\left|\left(\frac{y'}{ay}\right)^2-1\right|=0,\quad \lim\frac{y'}{y}=a,$$

oder

$$\frac{y'}{y}=a+\sigma,\quad \lim\sigma=0. \tag{26.}$$

Setzt man ferner

$$y = se^{ax},$$

so ist offenbar s für hinreichend grosse Werthe von x eine von Null verschiedene Grösse und man hat die Gleichung

$$\sigma = \frac{s'}{s}.$$

Combinirt man nun die Differentialgleichung (19.) mit der Identität

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{ax}) = a^2e^{ax},$$

indem man erstere mit e^{ax}, letztere mit y multiplicirt und subtrahirt, so ergiebt sich

$$\frac{d}{dx}\{e^{ax}y'-ae^{ax}y\} = ye^{ax}\varphi(x),$$

oder

$$\frac{d}{dx}(s'e^{2ax}) = se^{2ax}\varphi(x),$$

und hieraus folgt

$$[s'e^{2ax}]_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} se^{2ax}\varphi(x)dx.$$

Führen wir also die neue Annahme ein, dass die Function $\varphi(x)$ oberhalb einer gewissen positiven Grenze ein constantes Zeichen habe, so wird für hinreichend grosse Werthe von x die Function $s'e^{2ax}$ entweder beständig wachsen oder beständig abnehmen bei wachsenden Werthen von x, sie wird also jedenfalls oberhalb einer gewissen Grenze ihr Zeichen nicht mehr wechseln, und dasselbe gilt von s' und σ, da die Grösse s für hinreichend grosse Werthe von x ihr Zeichen stets beibehält.

Nun ist offenbar

$$\sigma' = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = \frac{y''}{y}-\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = a^2+\varphi(x)-(a+\sigma)^2,$$

also folgt

$$\sigma' = \varphi(x)-\sigma(2a+\sigma),$$

$$\sigma-\sigma_0 = \int_{x_0}^{x}\varphi(x)dx-\int_{x_0}^{x}\sigma(2a+\sigma)dx.$$

Nimmt man die Integrationsgrenzen so gross, dass zwischen ihnen die Grösse σ ihr Zeichen nicht mehr ändert, so kann man, indem man durch σ_m einen Werth bezeichnet, den σ innerhalb oder an der Grenze des Integrationsgebietes annimmt, die letzte Gleichung folgendermassen schreiben:

$$\sigma - \sigma_0 = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx - (2a + \sigma_m)\int_{x_0}^{x} \sigma\, dx. \tag{27.}$$

Führt man daher die Voraussetzung ein, dass das Integral

$$\int_{x_0}^{+\infty} \varphi(x)dx \tag{28.}$$

einen bestimmten endlichen Werth habe, und berücksichtigt, dass die Grösse σ_m unterhalb einer beliebigen endlichen Grenze bleibt, wenn man x_0 oberhalb einer gewissen Grenze und $x > x_0$ annimmt, so lehrt die Gleichung (27.), dass das Integral

$$\int_{x_0}^{x} \sigma dx = \int_{x_0}^{x} \frac{s'}{s} dx = s - s_0$$

bei unbegrenzt wachsender oberer Grenze dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Grösse verbleibt. Da es nun, sobald x gross genug geworden ist, bei wachsenden Werthen dieser Grösse entweder stets wächst, oder stets abnimmt, so convergirt es gegen eine bestimmte endliche Grenze für $x = +\infty$; dasselbe gilt daher von der Grösse s. Hat man etwa

$$\lim s = B,$$

so kann man setzen

$$y = Be^{ax}(1 + \varepsilon(x)),$$

wobei

$$\lim \varepsilon(x) = 0;$$

die Gleichung (26.) ergiebt offenbar

$$\lim \varepsilon'(x) = 0.$$

Ein entsprechendes Resultat lässt sich ableiten, wenn das Integral y den Fall § 2 (B.) darbietet, so dass

$$\lim y = \lim y' = 0.$$

Bei dieser Annahme ergiebt sich aus der Ungleichung (21.), indem man x über alle Grenzen wachsen lässt,

$$\left|\left(\frac{y_0'}{ay_0}\right)^2 - 1\right| \leqq \frac{\psi(x_0)}{a^2}, \tag{29.}$$

also, da die Grössen y und y' für grosse Werthe von x nach § 2 entgegen-

gesetzte Vorzeichen haben

$$\lim \frac{y'}{y} = -a,$$

sodass man setzen kann

$$\frac{y'}{y} = -a+\theta(x), \quad \lim\theta(x) = 0. \tag{30.}$$

Ersetzt man nun x_0 in der Ungleichung (29.) durch x, so folgt

$$|2a\theta(x)-(\theta(x))^2| \leqq \psi(x);$$

nimmt man daher, was möglich ist, x so gross an, dass

$$|\theta(x)| < a,$$

so folgt

$$2a-\theta(x) > a, \quad |2a\theta(x)-(\theta(x))^2| > a|\theta(x)|,$$

also

$$|\theta(x)| < \frac{\psi(x)}{a}. \tag{31.}$$

Jetzt machen wir die Voraussetzung, dass das Integral

$$\int_{x_0}^{+\infty} \psi(x)\,dx$$

einen endlichen, bestimmten Werth habe, woraus offenbar dasselbe für das Integral (28.) folgt. Alsdann hat nach (31.) auch das Integral

$$\int_{x_0}^{+\infty} \theta(x)dx = A_0$$

einen bestimmten, endlichen Werth und die Gleichung (30.) ergiebt durch Integration

$$\lg y-\lg y_0 = a(x_0-x)+A_0-\int_x^{+\infty} \theta(x)dx,$$

$$y = y_0 e^{A_0+ax_0}.e^{-ax}.e^{-\int_x^{+\infty}\theta(x)\,dx}.$$

Da nun das rechts auftretende bestimmte Integral für $x = +\infty$ verschwindet, so hat man jetzt

$$y = Be^{-ax}(1+\varepsilon(x)),$$

wenn B eine Constante bedeutet und die Gleichung

$$\lim\varepsilon(x) = 0$$

besteht; die Gleichung (30.) lehrt, dass, wie im vorigen Falle auch hier

$$\lim\varepsilon'(x) = 0.$$

Zusammenfassend kann man daher folgenden für unsere weitere Entwickelungen grundlegenden Satz aussprechen.

In der Differentialgleichung

$$y'' = yf(x) = y(a^2+\varphi(x))$$

sei a eine positive Constante; für alle Werthe von x, die eine gewisse positive Grenze übersteigen sei die Function $\varphi(x)$ endlich, stetig und constanten Zeichens, ihre Ableitung $\varphi'(x)$ endlich und stetig. Nennt man ferner $\psi(u)$ den grössten absoluten Betrag der Function $\varphi(x)$ für $x \geqq u$, so habe das Integral

$$\int_x^{+\infty} \psi(x)dx$$

einen endlichen, bestimmten Werth und es sei dementsprechend

$$\lim_{x=+\infty} \varphi(x) = 0.$$

Alsdann hat die Differentialgleichung Integrale von folgender Form

$$y_1 = B_1 e^{ax}(1+\varepsilon_1), \quad y_2 = B_2 e^{-ax}(1+\varepsilon_2),$$

worin durch B Constante bezeichnet sind, und für $x = +\infty$ die Gleichungen

$$\lim \varepsilon_1 = \lim \varepsilon_2 = \lim \varepsilon_1' = \lim \varepsilon_2' = 0$$

bestehen. In der Form y_1 sind die den Fall (A.), *in der Form y_2 die den Fall* (B.) *des § 2 darbietenden Integrale darstellbar.*

Die beim Beweis dieses Satzes benutzte Thatsache, dass für jedes Integral der Differentialgleichung (19.) eine der Gleichungen

$$\lim \frac{y'}{y} = \pm a$$

besteht, ist nicht neu, folgt vielmehr unmittelbar aus einem allgemeineren Theorem von *Poincaré**).

§ 5.

Integration durch semiconvergente Reihen; Reduction des Problems auf eine nichthomogene lineare Differentialgleichung.

Die Resultate des vorigen Paragraphen finden eine wichtige Anwendung bei einer Frage, die scheinbar einem ganz anderen Gedankenkreis

---

*) *Poincaré,* Sur les équations linéaires aux différences ordinaires et aux différences finies, American Journal of Math. Bd. VII S. 204.

entspringt, der Frage, wann das Integral einer linearen Differentialgleichung durch eine semiconvergente, also im strengen Sinne divergente Reihe dargestellt werden kann, welche der Differentialgleichung formal genügt. Die Theorie dieser Reihen hat ein sicheres Fundament erhalten, seit *Poincaré**) definirt hat, was unter der asymptotischen Darstellung einer Function durch eine divergente Reihe zu verstehen ist. Haben wir z. B. eine nach fallenden Potenzen fortschreitenden Reihe,

$$(32.) \qquad \alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\cdots,$$

welche nicht im gewöhnlichen Sinne des Worts zu convergiren braucht, so stellt dieselbe eine Function $F(x)$ asymptotisch dar und ist deshalb als semiconvergent anzusehen, wenn für jeden ganzzahligen und positiven Werth n die Gleichung

$$(33.) \qquad \lim_{x=\infty}\left[x^n\left\{F(x)-\left(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\cdots+\frac{\alpha_n}{x^n}\right)\right\}\right] = 0$$

besteht. Wir betrachten im Folgenden nur die asymptotische Darstellung reeller Functionen für grosse reelle Werthe des Arguments, und nehmen demgemäss an, dass auch in jeder Gleichung (33.) die Variable x längs der positiven reellen Axe ins Unendliche gehe. Die Frage, deren Erledigung wir in Angriff nehmen, ist nun folgende. Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$(34.) \quad u''+u'\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots\right)+u\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots\right) = 0,$$

deren Coefficienten Potenzreihen sind, die für alle oberhalb einer gewissen Grenze liegenden Werthe von x convergiren; giebt es dann, so fragen wir, eine im definirten Sinne asymptotische Darstellung ihrer Integrale, vielleicht nachdem man sie mit bekannten Functionen multiplicirt hat, durch eine Reihe der Form (32.), welche nicht zu convergiren braucht?

Schreibt man die Differentialgleichung (34.) kurz

$$u''+Pu'+Qu = 0,$$

so wird sie bekanntlich auf die binomische Form gebracht, indem man setzt

$$u = ye^{-\frac{1}{2}\int P\,dx};$$

---

*) *Poincaré*, Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. Acta math. Bd. VIII S. 295.

man erhält dann die Gleichung

$$y''+y(Q-\tfrac{1}{2}P'-\tfrac{1}{4}P^2) = 0,$$

die man bei der vorausgesetzten Form der Grössen P und Q in folgender Weise schreiben kann

$$y''+y\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right) = 0, \tag{35.}$$

wobei speciell

$$a_0 = c_0-\tfrac{1}{4}b_0^2, \quad a_1 = c_1-\tfrac{1}{2}b_0b_1,$$

und der Coefficient von y eine für hinreichend grosse Werthe von x convergente Reihe ist. Macht man die Annahme

$$a_0 = -a^2,$$

indem man durch a eine reelle Grösse bezeichnet, so kann nach § 4 unter gewissen Umständen ein Integral dieser Gleichung in der Form

$$y = e^{ax}(1+\varepsilon)$$

dargestellt werden, wobei ε unendlich klein ist für $x = +\infty$; es liegt daher nahe zu vermuthen, dass der Ausdruck $1+\varepsilon$ durch eine Reihe von der Form (32.) asymptotisch darstellbar sei. Führen wir diese Grösse

$$ye^{-ax} = s$$

als neue Unbekannte ein, so genügt sie der Differentialgleichung

$$s''+2as'+s\left(\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\cdots\right) = 0. \tag{36.}$$

Setzt man nun auf der linken Seite rein formal

$$s = \alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\cdots, \tag{37.}$$

so geht dieselbe über in einen Ausdruck der Form

$$\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\cdots,$$

und eine einfache Rechnung ergiebt

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_1\alpha_0,\\
A_2 &= -2a\alpha_1+a_2\alpha_0+a_1\alpha_1,\\
A_3 &= -4a\alpha_2+a_3\alpha_0+a_2\alpha_1+a_1\alpha_2+1.2\alpha_1,\\
A_4 &= -6a\alpha_3+a_4\alpha_0+a_3\alpha_1+a_2\alpha_2+a_1\alpha_3+2.3\alpha_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_n &= -2(n-1)a\alpha_{n-1}+a_n\alpha_0+a_{n-1}\alpha_1+\cdots+a_1\alpha_{n-1}+(n-1)(n-2)\alpha_{n-2}.
\end{aligned}$$

Will man daher der Gleichung (36.) durch die Annahme (37.) formal genügen, so hat man für die Grössen α die Formeln

$$(38.) \qquad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0, \quad \ldots, \quad A_n = 0, \quad \ldots.$$

Die erste von ihnen veranlasst uns, die Annahme

$$(39.) \qquad a_1 = 0$$

einzuführen; sie ist im allgemeinen nothwendig, wenn nicht alle durch die Formeln (38.) bestimmten Grössen α verschwinden sollen, und wenn sie besteht, so fällt die Differentialgleichung (35.) vollständig unter die im vorigen Paragraphen behandelten; die dort von der Function $\varphi(x)$ geforderten Eigenschaften sind offenbar vorhanden, da man zu setzen hat

$$\varphi(x) = \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots.$$

Unter der Voraussetzung (39.) kann man die Grösse α_0 willkürlich fixiren; die übrigen Grössen α haben dann endliche, durch die Gleichungen (38.) eindeutig bestimmte Werthe.

Definirt man mit diesen Werthen α eine Variable v durch die Gleichung

$$(40.) \qquad s = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x_n} + v,$$

so folgt

$$s' = -\frac{\alpha_1}{x^2} - \frac{2\alpha_2}{x^3} - \cdots - \frac{n\alpha_n}{x^{n+1}} + v',$$

$$s'' = \frac{1.2\alpha_1}{x^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\alpha_{n-1}}{x^{n+1}} + \frac{n(n+1)\alpha_n}{x^{n+2}} + v'',$$

$$s\left(\frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots\right) = \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x^n}\right)\left(\frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots\right) + v\left(\frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots\right);$$

auf der linken Seite der Gleichung (36.) wird daher nach der Substitution (40.) der Coefficient von $\frac{1}{x^k}$, solange $k \leqq n+1$, abgesehen von den die Grösse v enthaltenden Gliedern,

$$-2a(k-1)\alpha_{k-1} + (k-2)(k-1)\alpha_{k-2} + \alpha_0 a_k + \alpha_1 a_{k-1} + \cdots + \alpha_{k-2} a_2;$$

dieser Ausdruck ist offenbar unter der Annahme (39.) genau mit A_k identisch, also $= 0$. Dagegen ist der Coefficient von $\frac{1}{x^{n+2}}$

$$n(n+1)\alpha_n + \alpha_0 a_{n+2} + \alpha_1 a_{n+1} + \cdots + \alpha_n a_2 = A_{n+2} + 2a(n+1)\alpha_{n+1} = 2a(n+1)\alpha_{n+1}.$$

Die Gleichung (36.) nimmt daher, nachdem man die neue Unbekannte v eingeführt hat, folgende Gestalt an

$$(41.) \qquad v'' + 2av' + v\left(\frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots\right) = \frac{1}{x^{n+2}}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wobei $\mathfrak{P}$, wie auch später $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ..., eine Potenzreihe des beigefügten Argumentes bedeutet, deren Convergenzbereich nicht verschwindet. Der soeben gefundene Coefficient von $\frac{1}{x^{n+2}}$ ergiebt offenbar die Gleichung

$$-2a(n+1)\alpha_{n+1} = \mathfrak{P}(0).$$

Substituirt man weiter

$$v = \frac{w}{x^{n+1}},$$

so erhält man aus der Gleichung (41.):

$$(42.) \qquad w''+w'\left(2a-\frac{2(n+1)}{x}\right)+w\left(-\frac{2(n+1)a}{x}+\frac{1}{x^2}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Schreibt man diese Gleichung kurz

$$w''+Pw'+Qw = \frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

so enthält der Ausdruck

$$Q-\tfrac{1}{2}P'-\tfrac{1}{4}P^2 = -a^2+\frac{1}{x^2}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

die erste Potenz von $\frac{1}{x}$ nicht, was für die fernere Entwickelung bedeutsam ist; setzt man noch

$$w = e^{-\frac{1}{2}\int P\,dx} = e^{-ax}x^{n+1}z,$$

so ergiebt sich schliesslich die folgende Gleichung:

$$(43.) \qquad z''+z\left(-a^2+\frac{1}{x^2}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{e^{ax}}{x^{n+2}}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

deren Integrale für grosse reelle Werthe von x zu discutiren sind.

§ 6.

Untersuchung der erhaltenen nichthomogenen linearen Gleichung.

Der weitere Verlauf, den unsere Untersuchung zu nehmen hat, ist klar zu übersehen, wenn man die Formel

$$(44.) \qquad s = \alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\cdots+\frac{\alpha_n}{x^n}+\frac{w}{x^{n+1}}$$

ins Auge fasst. Jeder Lösung w der Gleichung (42.) entspricht eine solche der Gleichung (36.); nähert sich erstere für $x = +\infty$ einem endlichen Grenz-

werthe, so besteht für letztere die Gleichung

$$\lim\left[\left(s-\alpha_0-\frac{\alpha_1}{x}-\cdots-\frac{\alpha_n}{x^n}\right)x^n\right] = 0.$$

Wenn daher für jeden Werth von n eine Grösse w der angegebenen Beschaffenheit gefunden werden kann, wenn ferner die mit diesen Grössen w gebildeten Ausdrücke s mit einander identisch sind, so hat man letztere im Sinne der gegebenen Definition asymptotisch durch die Reihe (32.) dargestellt.

Die Untersuchung der Grössen w und z läuft auf dasselbe hinaus; letztere kann man explicite darstellen, wenn man die homogene Gleichung

$$Y''+Y\left(-a^2+\frac{1}{x^2}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

vollständig integrirt hat. Diese fällt wiederum unter den Typus der in § 4 untersuchten, da die dort geforderten Eigenschaften der Function $\varphi(x)$ offenbar vorhanden sind, wenn man setzt

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right).$$

Zwei Lösungen dieser Differentialgleichung sind daher in folgender Form darstellbar:

$$Y_1 = e^{ax}(1+\varepsilon_1), \quad Y_2 = e^{-ax}(1+\varepsilon_2),$$

wobei man hat

$$\lim\varepsilon_1 = \lim\varepsilon_2 = \lim\varepsilon_1' = \lim\varepsilon_2' = 0. \tag{45.}$$

Aus der Differentialgleichung, deren Integrale Y_1 und Y_2 sind, folgt nun unmittelbar

$$Y_1Y_2''-Y_2Y_1'' = 0, \quad Y_1Y_2'-Y_2Y_1' = \text{const.};$$

für die Constante in der zweiten Gleichung findet man, indem man die obigen Werthe von Y_1 und Y_2 einsetzt, und die unabhängige Variable positiv unendlich gross werden lässt, unter Berücksichtigung der Gleichungen (45.) den Werth $-2a$, sodass sich folgendes Resultat ergiebt:

$$Y_1Y_2'-Y_2Y_1' = -2a. \tag{46.}$$

Das allgemeine Integral der nichthomogenen Gleichung (43.) kann nun bekanntlich in der Form

$$z = U_1Y_1+U_2Y_2$$

geschrieben werden, wobei zur Bestimmung der Functionen U zwei in ihren Ableitungen lineare Gleichungen dienen, nämlich

$$Y_1U_1'+Y_2U_2' = 0, \quad Y_1'U_1'+Y_2'U_2' = \frac{e^{ax}}{x^{n+2}}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Aus diesen ergiebt sich mit Benutzung der Relation (46.):

$$U_1' = \frac{Y_2 e^{ax}}{2ax^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right), \quad U_2' = \frac{-Y_1 e^{ax}}{2ax^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

sodass man, wenn durch C_1 und C_2 willkürliche Constanten, durch x_1 und x_2 Grössen des Convergenzbereiches der Reihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ bezeichnet werden, in der Formel

$$z = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + Y_1 \int_{x_1}^{x} \frac{Y_2 e^{ax}}{2ax^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx - Y_2 \int_{x_2}^{x} \frac{Y_1 e^{ax}}{2ax^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

das allgemeine Integral der Gleichung (43.) für alle oberhalb einer gewissen Grenze liegenden Werthe von x dargestellt hat. Setzt man für Y_1 und Y_2 ihre Werthe ein, so folgt

$$z = e^{ax}(1+\varepsilon_1)\left\{C_1 + \int_{x_1}^{x} \frac{1+\varepsilon_2}{2ax^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx\right\} - e^{-ax}(1+\varepsilon_2)\left\{C_2 + \int_{x_2}^{x} \frac{e^{2ax}(1+\varepsilon_1)}{2ax^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx\right\}.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite convergirt offenbar gegen einen endlichen Grenzwerth, wenn man $x = +\infty$ werden lässt; man kann daher speciell annehmen

$$C_1 = -\int_{x_1}^{+\infty} \frac{1+\varepsilon_2}{2ax^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad C_2 = 0;$$

dann erhält man ein particuläres Integral

$$z = -e^{ax}(1+\varepsilon_1) \int_{x}^{+\infty} \frac{1+\varepsilon_2}{2ax^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx - e^{-ax}(1+\varepsilon_2) \int_{x_2}^{x} \frac{e^{2ax}(1+\varepsilon_1)}{2ax^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx,$$

dessen Verhalten im reellen Unendlichen besonders leicht zu übersehen ist.

Der entsprechende Werth von w hat folgende Form:

$$(47.) \quad \begin{cases} w = ze^{-ax}x^{n+1} \\ \quad = -x^{n+1}(1+\varepsilon_1) \int_{x}^{+\infty} \frac{1+\varepsilon_2}{2ax^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx \\ \qquad\qquad -e^{-2ax}(1+\varepsilon_2)x^{n+1} \int_{x_2}^{x} \frac{e^{2ax}(1+\varepsilon_1)}{2ax^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx. \end{cases}$$

Um den Grenzwerth dieses Ausdruckes für $x = +\infty$ zu finden, benutzen wir folgenden Satz von *Stolz**). Für alle oberhalb einer gewissen Grenze

---

*) *Stolz*, Ueber Grenzwerthe von Quotienten. Math. Annalen Bd. XV S. 556.

liegenden Werthe von x seien die reellen Functionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ sammt ihren ersten Ableitungen endlich und stetig, die Grösse $\Psi'(x)$ stets positiv oder stets negativ, und die Function $\Psi(x)$ werde unendlich für $x = +\infty$. Wenn dann bei wachsenden Werthen von x der Quotient $\Phi'(x) : \Psi'(x)$ einem bestimmten, endlichen oder unendlichen Grenzwerthe zustrebt, so gilt dasselbe von der Grösse $\Phi(x) : \Psi(x)$ und man hat die Gleichung

$$\lim \frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)} = \lim \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}.$$

Dieser Satz bleibt, wie man sehr leicht sieht*), gültig, wenn die Function $\Psi(x)$ für $x = +\infty$ unendlich klein wird, alle übrigen Voraussetzungen aber beibehalten werden. Setzt man nun

$$\Phi(x) = \int_{x_2}^{x} \frac{e^{2ax}(1+\varepsilon_2)}{x^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx, \qquad \Psi(x) = \frac{e^{2ax} x^{-n-1}}{1+\varepsilon_2},$$

$$\Psi'(x) = e^{2ax}\left\{\frac{2a}{x^{n+1}(1+\varepsilon_2)} - \frac{\varepsilon_2'}{x^{n+1}(1+\varepsilon_2)^2} - \frac{n+1}{x^{n+2}(1+\varepsilon_2)}\right\},$$

so hat die Function $\Psi'(x)$ für hinreichend grosse Werthe von x stets das Zeichen der Grösse a; die Function $\Psi(x)$ wird für $x = +\infty$ unendlich gross oder unendlich klein, je nachdem a ein positiver oder negativer Werth ist, und in beiden Fällen hat man

$$\lim \frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)} = \lim \frac{\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)(1+\varepsilon_1)}{-\frac{n+1}{1+\varepsilon_2} + x\left(\frac{2a}{1+\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_2'}{(1+\varepsilon_2)^2}\right)} = 0,$$

woraus nach dem *Stolz*schen Satze oder der ihm beigefügten Modification folgt

$$\lim \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = \lim \left\{e^{-2ax}(1+\varepsilon_2)x^{n+1} \int_{x_2}^{x} \frac{e^{2ax}(1+\varepsilon_1)}{x^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx\right\} = 0.$$

Das zweite Glied des unter (47.) gegebenen Ausdruckes w verschwindet also für $x = +\infty$.

Der Grenzwerth des ersten Gliedes ist dagegen leicht zu berechnen. Bezeichnet man nämlich durch $\bar{\varepsilon}_2$ einen Werth von ε_2 für ein unbekanntes Argument, welches nicht unterhalb des Werthes x liegt, so kann man jenes Glied in folgende Form bringen:

$$M = -x^{n+1}(1+\varepsilon_1)(1+\bar{\varepsilon}_2) \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{2ax^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx;$$

*) *Kneser*, Untersuchungen über die Nullstellen etc. Math. Annalen Bd. XLII S. 426 f.

denn die Grösse $\mathfrak{P}$ behält für hinreichend grosse Werthe von x ein constantes Zeichen, und der Mittelwerthsatz bleibt anwendbar. Dabei ist offenbar

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{2ax^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{\mathfrak{P}(0)}{2a(n+1)x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+2}} \mathfrak{P}_3\left(\frac{1}{x}\right).$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\lim M = \lim w = -\frac{\mathfrak{P}(0)}{2a(n+1)},$$

also mit Berücksichtigung des im § 5 gegebenen Werthes von $\mathfrak{P}(0)$

$$\lim w = \alpha_{n+1}.$$

Es giebt also in der That eine particuläre Lösung der Gleichung (42.), welche für $x = +\infty$ einem endlichen Grenzwerthe, und zwar dem Werthe α_{n+1} zustrebt; die entsprechende, der Gleichung (44.) gemäss gebildete Grösse s hat den Grenzwerth α_0.

Da n eine beliebige ganze Zahl ist, kann man sie durch $n+1$ ersetzen; man erhält dann eine der Gleichung (42.) analoge, welche eine Lösung $\bar{w}$ mit der Eigenschaft

$$\lim \bar{w} = \alpha_{n+2}$$

besitzt. Der Ausdruck

$$\bar{s} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots + \frac{\alpha_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{\bar{w}}{x^{n+2}}$$

repräsentirt eine Lösung der Gleichung (36.); in den Grössen

$$y = se^{\alpha x}, \quad \bar{y} = \bar{s}e^{\alpha x} \tag{48.}$$

hat man zwei Integrale der ursprünglich gegebenen binomischen Differentialgleichung (35.), für welche offenbar die Gleichungen

$$\lim \frac{\bar{y}}{y} = \lim \frac{\bar{s}}{s} = 1, \quad \lim s = \lim \bar{s} = \alpha_0 \tag{49.}$$

bestehen.

Nimmt man nun zunächst an, a sei eine negative Grösse, so ist offenbar

$$\lim y = \lim \bar{y} = 0;$$

nach § 4 folgt hieraus mit Rücksicht auf die erste Gleichung (49.), dass die Integrale y und $\bar{y}$ identisch sind. In diesem Falle giebt es also, wenn der Werth α_0 willkürlich fixirt ist, ein bestimmtes, den Fall § 2 (B.) dar-

bietendes Integral der Gleichung (35.), für welches alle Gleichungen

$$(50.) \qquad \lim\left[\left(ye^{-ax}-\alpha_0-\frac{\alpha_1}{x}-\cdots-\frac{\alpha_n}{x^n}\right)x^n\right] = 0$$

für $n = 1, 2, \ldots$ bestehen. Aus der letzten Gleichung (49.) folgt dann, dass bei passender Wahl von α_0 unter y jedes Integral verstanden werden kann, welches für $x = +\infty$ unendlich klein wird, da alle solche Integrale aus einem von ihnen durch Multiplication mit constanten Factoren erhalten werden.

Wenn dagegen vorausgesetzt wird, die Grösse a sei positiv, so bestehen zwar noch die Gleichungen (50.), in ihnen ist aber y nicht nothwendig ein und dasselbe Integral der Gleichung (35.) Die Relationen (48.) und (49.) geben nämlich jetzt

$$\lim y = \lim \bar{y} = \pm\infty,$$

wobei das Zeichen rechts mit demjenigen der Grösse α_0 übereinstimmt. Hieraus kann man nicht allgemein auf die Identität der Functionen y und $\bar{y}$ schliessen; aber nach dem Theorem des § 4 kann man in der dort gebrauchten Bezeichnung setzen

$$(51.) \qquad y = B_1 e^{ax}(1+\varepsilon_1), \quad c\bar{y} = B_1 e^{ax}(1+\varepsilon_1)+B_2 e^{-ax}(1+\varepsilon_2),$$

wobei c eine Constante bedeutet; aus den Gleichungen (48.) und (49.) folgt leicht

$$c = 1, \quad B_1 = \alpha_0.$$

Setzt man ferner in der Gleichung (50.) nach (51.):

$$y e^{-ax} = \bar{y} e^{-ax} - B_2 e^{-2ax}(1+\varepsilon_2),$$

so ergiebt sich

$$\lim\left[\left(\bar{y}e^{-ax}-\alpha_0-\frac{\alpha_1}{x}-\cdots-\frac{\alpha_n}{x^n}\right)x^n\right] = 0.$$

Diese Gleichung bleibt, da offenbar

$$\lim\left(x^n e^{-2ax}(1+\varepsilon_2)\right) = 0,$$

gültig, wenn unter B_2 nicht die durch die obige Definition des Integrals $\bar{y}$, sondern eine ganz beliebige Constante verstanden wird, womit dann $\bar{y}$ das allgemeinste Integral wird, für welches die erste Gleichung (49.) besteht, nachdem man das Integral y festgelegt hat. Im Falle $a > 0$ stellt somit die Reihe

$$\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\cdots$$

nicht eine bestimmte Grösse ye^{-ax} asymptotisch dar, sondern eine ganze Gruppe von solchen, nämlich alle, in welchen der erste, ein Integral der Gleichung (35.) bildende Factor sich von y, d. h. einem bestimmten Integral, um Summanden der Form

$$B_2 e^{-ax}(1+\varepsilon_2),$$

demnach um Factoren, welche für $x=+\infty$ dem Grenzwerth $+1$ zustreben, unterscheidet.

Die asymptotische Darstellung zeigt also in den Fällen $a \gtrless 0$ einen ganz verschiedenen Charakter; beide aber bieten sich an der Differentialgleichung (35.) dar, da sie nur die Grösse a^2 enthält. Je nachdem man daher für a den positiven oder negativen Werth von $\sqrt{-a_0}$ nimmt, erhält man zwei verschiedene, nach fallenden Potenzen von x geordnete und der Differentialgleichung formal genügende Reihen, von denen für jeden Werth von a_0 die erste eine ganze Gruppe von Integralen, die für $x=+\infty$ unendlich werden, die zweite ein bestimmtes für $x=+\infty$ verschwindendes Integral der gegebenen Differentialgleichung asymptotisch darzustellen dient. Alles zusammengenommen haben wir somit folgenden Lehrsatz bewiesen.

In der Differentialgleichung

$$y''+y\left(a_0+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\cdots\right)=0$$

sei der Factor von y eine reelle Potenzreihe von nicht verschwindendem Convergenzbereich, und es sei

$$a_0<0, \quad -a_0=a^2, \quad a>0;$$

dann können die Integrale der Differentialgleichung nach Multiplication mit einem Factor $e^{\pm ax}$ durch eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende, im allgemeinen divergente Reihe asymptotisch dargestellt werden für grosse positive Werthe von x. Setzt man in der Differentialgleichung für die Unbekannte einen der Ausdrücke

$$\text{(A.)} \qquad e^{\pm ax}\left(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\cdots\right),$$

so kann man die Grössen α, indem man α_0 willkürlich lässt, so bestimmen, dass der Differentialgleichung formal genügt wird. Nimmt man das untere Zeichen, so stellt der Ausdruck (A.) *bei passender Wahl von α_0 ein beliebig gegebenes, für $x=+\infty$ verschwindendes Integral y in dem Sinne dar, dass für beliebige*

positive ganze Zahlen n die Gleichungen

$$\lim_{x=+\infty}\left[\left(ye^{\alpha x}-\alpha_0-\frac{\alpha_1}{x}-\cdots-\frac{\alpha_n}{x^n}\right)x^n\right]=0$$

bestehen. Nimmt man das obere Zeichen, so entspricht jedem Werthe von α_0 eine ganze Gruppe von Integralen, die für $x=+\infty$ unendlich werden und deren Verhältnisse zu einander dem Grenzwerthe Eins zustreben; für alle Integrale dieser Gruppe ist, wenn n wiederum eine beliebige positive ganze Zahl ist,

$$\lim_{x=+\infty}\left[\left(ye^{-\alpha x}-\alpha_0-\frac{\alpha_1}{x}-\cdots-\frac{\alpha_n}{x^n}\right)x^n\right]=0;$$

umgekehrt erhält man alle solche Gruppen von Integralen, wenn man α_0 variiren lässt.

Auf eine Differentialgleichung obiger Form reducirt sich die allgemeinere

$$u''+u'\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots\right)+u\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots\right)=0$$

durch die Substitution

$$u=ye^{-\frac{1}{2}\int dx\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots\right)},$$

wenn man voraussetzt, dass die Grössen b, c reell sind und

$$c_0-\tfrac{1}{4}b_0^2<0,\quad c_1-\tfrac{1}{2}b_0b_1=0.$$

Andere Sätze über die asymptotische Darstellung von Integralen linearer Differentialgleichungen sind in der zu Anfang des § 5 citirten Abhandlung von *Poincaré* aufgestellt werden.

§ 7.

Anwendung der erhaltenen Resultate auf die Theorie der elastisch schwingenden Kreisscheibe.

In der *Kirchhoff*schen Theorie der Schwingungen kreisförmiger elastischer Platten kommt folgende transcendente Gleichung vor*)

$$(52.)\quad 0=\begin{vmatrix} n^2X_n-x(n^2-4\gamma x^2)X_n' & n^2Y_n-x(n^2+4\gamma x^2)Y_n' \\ (n^2+4\gamma x^2)X_n-xX_n' & (n^2-4\gamma x^2)Y_n-xY_n' \end{vmatrix};$$

in ihr ist n eine positive ganze Zahl, γ eine reelle Constante, X_n und Y_n

*) *Kirchhoff*, Vorlesungen über math. Physik, Mechanik, S. 465, Vorl. XXX.

particuläre Lösungen der Gleichungen

$$X_n'' + \frac{1}{x} X_n' - \left(\frac{n^2}{x^2} + 4\right) X_n = 0,$$

$$Y_n'' + \frac{1}{x} Y_n' - \left(\frac{n^2}{x^2} - 4\right) Y_n = 0;$$

für diese Functionen werden bestimmte Reihenentwickelungen gegeben, speciell

$$X_n = \frac{x^n}{n!}\left(1 + \frac{x^2}{1.(n+1)} + \frac{x^4}{1.2(n+1)(n+2)} + \cdots\right). \tag{53.}$$

Jede positive Wurzel der Gleichung (52.) ergiebt eine Schwingungsart der Platte, welche einem einfachen Tone entspricht und bewirkt, dass n Durchmesser derselben Knotenlinien sind.

Setzt man nun

$$X_n \sqrt{x} = y,$$

so erhält man die Differentialgleichung

$$y'' + y\left(-4 + (\tfrac{1}{4} - n^2)\frac{1}{x^2}\right) = 0, \tag{54.}$$

auf welche die Theorie des § 4 angewendet werden kann, indem man setzt

$$a = 2, \quad \varphi(x) = (n^2 - \tfrac{1}{4})\frac{1}{x^2} = \psi(x).$$

Da ferner aus der Gleichung (53.) offenbar folgt

$$\lim y = \lim X_n = +\infty,$$

so ergiebt sich nach § 4

$$\lim \frac{y'}{y} = \lim\left(\frac{X_n'}{X_n} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \lim \frac{X_n'}{X_n} = 2.$$

Schreibt man also die *Kirchhoff*sche Gleichung (52.) in der Form

$$\frac{x(n^2 - 4\gamma x^2) Y_n - x^2 Y_n'}{n^2 Y_n - x(n^2 + 4\gamma x^2) Y_n'} = \frac{x(n^2 + 4\gamma x^2) - x^2 \dfrac{X_n'}{X_n}}{n^2 - x(n^2 - 4\gamma x^2)\dfrac{X_n'}{X_n}}, \tag{55.}$$

so kann man für die rechte Seite schreiben

$$\tfrac{1}{2}(1 + \eta),$$

wobei $\lim \eta = 0$.

Eine ähnliche Umformung der linken Seite gilt unter gewissen Beschränkungen des Argumentes. Die Function Y_n verschwindet nämlich für unzählige, jede positive Grenze übersteigende Werthe von x, was entweder

aus der Theorie der *Bessel*schen Functionen als bekannt vorausgesetzt, oder aus allgemeinen, wesentlich auf *Sturm* zurückgehenden Sätzen*) geschlossen werden kann; dasselbe gilt nach dem *Rolle*schen Satze von Y_n'. Zwischen zwei auf einander folgenden Nullstellen dieser letzteren Function geht der Werth des Quotienten $Y_n : Y_n'$ genau einmal von $-\infty$ bis $+\infty$ oder umgekehrt; in der Umgebung der von den beiden Nullstellen der Function Y_n' eingeschlossenen Nullstelle von Y_n kann daher ein Intervall i_0 abgegrenzt werden, innerhalb dessen die Grösse Y_n' nicht verschwindet und der Werth des Quotienten $Y_n : Y_n'$ ein gegebenes reelles Intervall, etwa von α bis β durchläuft. Nun kann für die linke Seite der Gleichung (55.) geschrieben werden

$$N = \frac{\frac{Y_n}{Y_n'}\left(\frac{n^2}{x^2} - 4\gamma\right) - \frac{1}{x}}{\frac{n^2}{x}\frac{Y_n}{Y_n'} - \left(\frac{n^2}{x^2} + 4\gamma\right)};$$

da andererseits Nullstellen von Y_n oberhalb jeder Grenze vorhanden sind, kann dasselbe von allen dem Intervall i_0 angehörigen Werthen angenommen werden; alsdann durchläuft der Werth von N mit beliebiger Annäherung ebenfalls das Intervall von α bis β. Nimmt man daher diese Constanten so an, dass sie den Werth $\frac{1}{2}$ umschliessen, so ist klar, dass die mit der Gleichung (55.) identische

$$N = \tfrac{1}{2}(1+\eta)$$

im Intervall i_0 eine Wurzel besitzt. Da nun oberhalb jeder Grenze solche Intervalle abgegrenzt werden können, so ist hiermit gezeigt, dass die *Kirchhoff*sche Gleichung (52.) unzählig viele positive Wurzeln besitzt, deren Werthe jede Grenze übersteigen können.

Diese Thatsache ist in *Kirchhoff*s erster Abhandlung über unseren Gegenstand**) nur durch rein formale Operationen mit divergenten Reihen bewiesen worden. Letztere sind einerseits bekannte semiconvergente Reihenausdrücke für die *Bessel*schen Functionen, andererseits eine divergente Entwickelung, welche ein Beispiel für die Theorie des § 6 darbietet. Die Differentialgleichung (54.) gestattet die Anwendung dieser Theorie, indem man setzt

$$a = 2, \quad a_2 = \tfrac{1}{4} - n^2, \quad a_3 = a_4 = \cdots = 0.$$

---

*) *Sturm,* Mémoire sur les équations différentielles etc., Journal de math. t. I p. 106.

**) *Kirchhoff,* Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, Ges. Abhandlungen S. 274, dieses Journal Bd. XL.

Man hat daher zwei Ausdrücke

$$y = e^{2x}\Big(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\cdots\Big),$$
$$y^{(0)} = e^{-2x}\Big(\alpha_0^{(0)}+\frac{\alpha_1^{(0)}}{x}+\frac{\alpha_2^{(0)}}{x^2}+\cdots\Big),$$

welche der Differentialgleichung formell genügen und asymptotische Darstellungen ihrer Integrale liefern; die Recursionsformeln (38.) lauten im ersten Falle

$$\begin{aligned}
-4\alpha_1+\alpha_0(\tfrac{1}{4}-n^2) &= 0,\\
-4.2\alpha_2+\alpha_1\{(\tfrac{1}{4}-n^2)+1.2\} &= 0,\\
-4.3\alpha_3+\alpha_2\{(\tfrac{1}{4}-n^2)+2.3\} &= 0, \quad \ldots,
\end{aligned}$$

woraus sich sofort ergiebt:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{16}(1^2-4n^2)\alpha_0,\\
\alpha_2 &= \frac{1}{2}\frac{1}{16^2}(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)\alpha_0,\\
\alpha_3 &= \frac{1}{2.3}\frac{1}{16^3}(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)(5^2-4n^2)\alpha_0, \quad \ldots
\end{aligned}$$

Um die Coefficienten der Entwickelung $y^{(0)}$ zu finden, hat man nur a durch -2 zu ersetzen, wodurch man aus den Gleichungen (38.) folgende Formeln erhält:

$$\begin{aligned}
4\alpha_1^{(0)}+\alpha_0^{(0)}(\tfrac{1}{4}-n^2) &= 0,\\
4.2\alpha_2^{(0)}+\alpha_1^{(0)}((\tfrac{1}{4}-n^2)+1.2) &= 0,\\
4.3\alpha_3^{(0)}+\alpha_2^{(0)}((\tfrac{1}{4}-n^2)+2.3) &= 0,
\end{aligned}$$

u. s. f., woraus weiter folgt:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^{(0)} &= -\frac{1}{16}(1^2-4n^2)\alpha_0^{(0)},\\
\alpha_2^{(0)} &= +\frac{1}{2}\frac{1}{16^2}(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)\alpha_0^{(0)},\\
\alpha_3^{(0)} &= -\frac{1}{2.3}\frac{1}{16^3}(1^2-4n^2)(3^2-4n^2)(5^2-4n^2)\alpha_0^{(0)}
\end{aligned}$$

u. s. f. Setzt man daher $\alpha_0 = \alpha_0^{(0)}$, so hat man allgemein

$$\alpha_{2k} = \alpha_{2k}^{(0)}, \quad \alpha_{2k+1} = -\alpha_{2k+1}^{(0)}.$$

Die Reihe y mit den Coefficienten α_n ist die von *Kirchhoff* angeführte; aus ihr kann aber nicht direct auf die Brauchbarkeit der Reihe $y^{(0)}$ geschlossen

werden, indem man etwa davon ausgeht, dass in der Differentialgleichung (54.) offenbar x durch $-x$ ersetzt werden kann; denn aus der asymptotischen Darstellung einer Function $F(x)$ durch eine divergente Reihe folgt keineswegs, dass die Function $F(-x)$ asymptotisch dargestellt wird, wenn man in jener Reihe $-x$ für x setzt. Das Theorem des § 6 aber lehrt, dass durch die Reihenentwickelung $y^{(0)}$ bei passender Wahl der Grösse $\alpha_0^{(0)}$ stets ein bestimmtes, gegebenes Integral der Gleichung (54.), welches für $x = +\infty$ verschwindet, asymptotisch dargestellt wird; dagegen erhält man eine solche Darstellung durch die Reihe y bei passender Bestimmung von α_0 nicht nur für ein Integral der Form

$$c\sqrt{x}X_n,$$

wobei c eine gegebene Constante bedeutet, sondern zugleich für jedes Integral, dessen Verhältniss zu diesem für $x = +\infty$ dem Grenzwerth Eins zustrebt.

Der Gebrauch, den *Kirchhoff* von der Reihe y macht, scheint übrigens noch einer besonderen Rechtfertigung bedürftig zu sein, da man eine solche Reihe nicht immer gliedweise differentiiren darf; doch mag die nähere Erörterung dieses Punktes einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleiben.

Juli 1895.

Berichtigung.

Seite 179 Zeile 3 u. 4 von oben zu streichen.

Ueber eine Darstellung der Richtungscosinus zweier orthogonalen Coordinatensysteme durch Thetafunctionen zweier Argumente, welche die Lösungen mehrerer Probleme der Mechanik als Specialfälle umfasst.

(Von Herrn *Fritz Kötter*.)

Bekanntlich genügen neun passend ausgewählte Thetaquotienten von zwei Argumenten identisch den Bedingungen für die Richtungscosinus zweier orthogonalen Coordinatensysteme. Indem man für die Argumente der Thetas Functionen der Zeit setzt, kann man also gewisse relative Bewegungen zweier Coordinatensysteme darstellen; dabei steht jede der zweimal drei Componenten der Geschwindigkeit in einer einfachen Beziehung zu je einem der noch nicht zur Anwendung gelangten Quotienten*).

Die Hoffnung, dass sich diese Eigenschaft der Thetafunctionen für die Mechanik fruchtbar erweisen werde, hat sich bisher nur in verhältnissmässig geringem Umfange bestätigt. Denn meines Wissens hat sich bisher nur ein specieller Fall der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit unter einer besonderen Voraussetzung über den Anfangszustand der Bewegung durch Ausdrücke der oben erwähnten Art lösen lassen.

Aber andererseits haben die Thetafunctionen zweier Argumente entschieden eine allgemeinere Bedeutung für die Lösung mechanischer Probleme; das lehrt schon ein Blick auf die neuerdings durch Thetafunctionen dargestellten Bewegungen starrer Körper im leeren Raum und in einer Flüssigkeit.

Betrachtet man nun die Formeln, welche die Lösung der in Frage stehenden Probleme vermitteln, genauer, so wird man bald die weitgehende

*) *Weber*, Mathematische Annalen Bd. 14, 173—206; *Caspary*, C. R. Bd. 111, 225 und Bd. 112, 305.

Uebereinstimmung im allgemeinen Bau und in den wesentlichsten Eigenschaften mit den berühmten Formeln erkennen, durch welche *Jacobi* die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt dargestellt hat.

Dieser Umstand führt zu der Vermuthung, dass es verhältnissmässig einfache, aus Thetafunctionen zweier Argumente gebildete Ausdrücke geben werde, welche durch Specialisirung der darin auftretenden Grössen in die Lösungen der verschiedenen oben erwähnten Aufgaben übergehen werden. Derartige Ausdrücke, die den Bedingungen für die Richtungscosinus zweier orthogonalen Coordinatensysteme genügen, giebt es in der That. Setzt man für die Grössen, aus welchen die in Frage stehenden Formeln gebildet sind, theils bestimmte Constante, theils gewisse lineare Functionen der Zeit, so kann man aus den allgemeinen Formeln die Darstellung einer ganzen Reihe mechanisch wichtiger Rotationsbewegungen ableiten.

Auf diese Weise gelangt man z. B. zu denjenigen beiden Bewegungen, in welche sich beim *Kowalevski*schen Fall der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt die Drehung zerlegen lässt. Ferner kann man so die Lösung eines der von *Clebsch* entdeckten integrablen Fälle der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit darstellen. Nimmt man zwischen den Perioden der Thetas zweier Argumente solche Beziehungen an, dass diese Thetas sich durch gewöhnliche Thetas eines Argumentes darstellen lassen, so kann man unsere Formeln in die oben erwähnten *Jacobi*schen Formeln überführen. Auch die bisher unbekannte Lösung des vor einigen Jahren von Herrn *Steklow* in Charkow entdeckten integrablen Falles der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit stellt sich als ein besonderer Fall des in Frage stehenden Systems von Formeln dar.

Neben dem Interesse, welches ihr umfassender Charakter den Formeln verleiht, glaubt der Verfasser ihnen eine nicht unbeträchtliche Brauchbarkeit für die Lösung mechanischer Aufgaben zuschreiben zu dürfen. Denn erstens hätte die Kenntniss des allgemeinen Formelsystems die Durchführung der früher gelösten Aufgaben ganz wesentlich erleichtert, zweitens hat sie sich dem Verfasser bei der Behandlung des von *Steklow* entdeckten Falles schon als nützlich erwiesen.

Dieser Nutzen, welcher vielleicht noch bei anderen Aufgaben derselben Art hervortreten wird, besteht in Folgendem. Bei allen oben erwähnten Aufgaben zerfällt die Lösung in zwei Theile. Es müssen zunächst die Richtungscosinus einer ausgezeichneten Richtung zu den drei Axen des sich

drehenden Coordinatensystems und die nach den letzteren genommenen Componenten der Rotationsgeschwindigkeit aus vier algebraischen Integralgleichungen als Functionen zweier Hülfsgrössen abgeleitet werden. Ist das vollbracht, so müssen diese Hülfsgrössen als Functionen der Zeit dargestellt und die noch fehlenden Grössen ermittelt werden, was gewöhnlich mit Hülfe von Quadraturen zu bewerkstelligen ist. Unstreitig ist der erste Theil der Aufgabe der bei weitem schwierigere, weil er für jede Aufgabe — bisher wenigstens — nach besonderen Gesichtspunkten behandelt werden muss. Aber frei von Schwierigkeiten ist auch der andere Theil nicht. Denn, wenn auch die zu integrirenden, vollständigen Differentiale sich gewöhnlich mit Hülfe des *Jacobi*schen Theorems vom letzten Multiplicator ermitteln lassen, so fordert die wirkliche Ausführung der Quadratur Umformungen, welche nicht immer auf der Hand liegen. Lassen sich aber die erst zu bestimmenden sechs Grössen auf eine passende Form bringen, so erlaubt unser Formelsystem die noch fehlenden Stücke ohne weiteres hinzuschreiben.

Der Zweck dieser Abhandlung ist es, das in Frage stehende Formelsystem und einige interessante Eigenschaften desselben abzuleiten.

§ 1.

Im Folgenden soll sein

$$\vartheta(u_1,\ u_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n_1 \sum_{-\infty}^{+\infty} n_2\, e^{[n_1(2u_1+n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12})+n_2(2u_2+n_1\tau_{12}+n_2\tau_{22})]\pi i},$$

$$\vartheta(u_1,\ u_2|\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) = \vartheta(u_1+\varepsilon_1\tau_{11}+\varepsilon_2\tau_{12},\ u_2+\varepsilon_1\tau_{12}+\varepsilon_2\tau_{22})\, e^{\sum_{\alpha=1,2} \varepsilon_\alpha(2u_\alpha+\varepsilon_1\tau_{\alpha 1}+\varepsilon_2\tau_{\alpha 2})\pi i}.$$

Ferner setzen wir

für	δ_1^λ	δ_2^λ	ε_1^λ	ε_2^λ
$\lambda = 0$	-1	-1	0	0
$\lambda = 1$	-1	-1	1	0
$\lambda = 2$	0	-1	1	0
$\lambda = 3$	0	-1	0	1
$\lambda = 4$	0	0	0	1.

Unter $\delta_\alpha^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_i}$, $\varepsilon_\alpha^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_i}$ verstehen wir diejenigen Zahlen, welche den Bedingungen

$$\delta_\alpha^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} \equiv \delta_\alpha^{\lambda_1}+\delta_\alpha^{\lambda_2}+\cdots+\delta_\alpha^{\lambda_i} \pmod 2,\quad -1 \leqq \delta_\alpha^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_i} \leqq 0,$$

$$\varepsilon_\alpha^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} \equiv \varepsilon_\alpha^{\lambda_1}+\varepsilon_\alpha^{\lambda_2}+\cdots+\varepsilon_\alpha^{\lambda_i} \pmod 2,\quad 0 \leqq \varepsilon_\alpha^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_i} \leqq 1$$

genügen. Man sieht dann sofort, dass jeder zusammengesetzte Index $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$ sich entweder auf einen einfachen Index oder auf einen aus zwei einfachen zusammengesetzten Index reducirt, oder endlich, wenn er aus allen fünf einfachen gebildet ist, bewirkt, dass sämmtliche δ und ε gleich Null werden. Ist μ ein einfacher oder zusammengesetzter Index, so schreiben wir:

$$\vartheta(u_1,\ u_2)_\mu = \vartheta(u_1+\tfrac{1}{2}\delta_1^\mu,\ u_2+\tfrac{1}{2}\delta_2^\mu|\tfrac{1}{2}\varepsilon_1^\mu,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon_2^\mu).$$

Ferner setzen wir den Ausdruck

$$\delta_1^\mu\varepsilon_1^\mu+\delta_2^\mu\varepsilon_2^\mu,$$

welcher mit $\vartheta(u_1, u_2)_\mu$ gleichzeitig gerade oder ungerade ist, gleich $|\mu|$. Sind ν und μ zwei Indices, so soll

$$\nu|\mu = \varepsilon_1^\nu\delta_1^\mu+\varepsilon_2^\nu\delta_2^\mu$$

und

$$\nu;\ \mu = \sum_{\alpha=1,2}|-\varepsilon_\alpha^\nu\delta_\alpha^\mu+\varepsilon_\alpha^{\nu\mu}(\delta_\alpha^\nu+\delta_\alpha^\mu-\delta_\alpha^{\nu\mu})|$$

sein.

Die beiden Ausdrücke

$$\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\alpha_1}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\alpha_2}+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\alpha_1}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\alpha_2}\}$$
$$\times\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\alpha_1}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\alpha_2}-\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\alpha_1}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\alpha_2}\}$$

und

$$\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\beta\alpha_1}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\beta\alpha_2}+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\beta\alpha_1}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\beta\alpha_2}\}$$
$$\times\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\beta\alpha_1}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\beta\alpha_2}-\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\beta\alpha_1}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\beta\alpha_2}\}$$

sind bezüglich u_1, u_2 Thetafunctionen mit der Charakteristik $\alpha_1\alpha_2$; sie sind gleichzeitig gerade oder ungerade, wenn

$$|\alpha_1|+|\alpha_2| \equiv |\beta\alpha_1|+|\beta\alpha_2| \pmod 2$$

ist. Und zwar sind sie gerade, wenn diese Grössen $\equiv 1$, ungerade, wenn sie $\equiv 0 \pmod 2$ sind.

Bezeichnet nun γ irgend einen Index, so müssen sich die fraglichen Producte, sofern sie Functionen von u_1, u_2 sind, linear aus den vier von einander unabhängigen Ausdrücken

$$\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma\alpha_1}\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma\alpha_2},\quad \vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma\alpha_1}\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma\alpha_2},$$
$$\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma\beta\alpha_1}\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma\beta\alpha_2},\quad \vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma\beta\alpha_1}\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma\beta\alpha_2}$$

zusammensetzen lassen. Ist nun

$$|\gamma\alpha_1|+|\gamma\alpha_2| \equiv |\alpha_1|+|\alpha_2|+1 \pmod 2,$$

so sind die Summen

$$\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma\alpha_1}\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma\alpha_2}+\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma\alpha_1}\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma\alpha_2}$$

und

$$\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma\beta\alpha_1}\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma\beta\alpha_2}+\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma\beta\alpha_1}\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma\beta\alpha_2}$$

gleichartig mit den erstgebildeten Functionen von u_1, u_2; dagegen sind die Differenzen ungleichartig.

Wir dürfen also setzen

$$\begin{aligned}
&\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\alpha_1}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\alpha_2}+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\alpha_1}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\alpha_2}\}\\
\times&\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\alpha_1}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\alpha_2}-\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\alpha_1}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\alpha_2}\}\\
+C&\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\beta\alpha_1}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\beta\alpha_2}+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\beta\alpha_1}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\beta\alpha_2}\}\\
\times&\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\beta\alpha_1}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\beta\alpha_2}+\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\beta\alpha_1}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\beta\alpha_2}\}\\
=A&\{\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma\alpha_1}\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma\alpha_2}+\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma\alpha_1}\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma\alpha_2}\}\\
+B&\{\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma\beta\alpha_1}\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma\beta\alpha_2}+\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma\beta\alpha_1}\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma\beta\alpha_2}\}.
\end{aligned}$$

Um die beiden Grössen A und B zu bestimmen, setzen wir

$$u_\alpha = u_\alpha'+\tfrac{1}{2}\delta_\alpha^\gamma+\tfrac{1}{2}\varepsilon_1^\gamma\tau_{\alpha 1}+\tfrac{1}{2}\varepsilon_2^\gamma\tau_{\alpha 2}. \qquad (\alpha=1,\ 2)$$

Dann erhalten wir mit Rücksicht auf die leicht zu erweisenden Congruenzen

$$\left.\begin{aligned}
\gamma;\ \alpha_1+\gamma;\ \alpha_2-\gamma;\ \gamma\alpha_1-\gamma;\ \gamma\alpha_2 &\equiv 2\gamma\alpha_1\alpha_2|\gamma\\
\gamma;\ \beta\alpha_1+\gamma;\ \beta\alpha_2-\gamma;\ \gamma\beta\alpha_1-\gamma;\ \gamma\beta\alpha_2 &\equiv 2\gamma\alpha_1\alpha_2|\gamma
\end{aligned}\right\} \pmod 4$$

die Gleichung:

$$\begin{aligned}
&i^{\gamma;\gamma\alpha_1+\gamma;\gamma\alpha_2}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\alpha_1}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\alpha_2}\\
&\qquad+\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\alpha_2}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\alpha_1}\}\\
&\times\{(-1)^{\gamma\alpha_1\alpha_2|\gamma}[\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma\alpha_1}\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\gamma\alpha_2}\\
&\qquad-\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\gamma\alpha_1}\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma\alpha_2}]-A\}\\
+&i^{\gamma;\gamma\beta\alpha_1+\gamma;\gamma\beta\alpha_2}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\beta\alpha_1}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\beta\alpha_2}\\
&\qquad+\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\beta\alpha_2}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\beta\alpha_1}\}\\
&\times\{C(-1)^{\gamma\alpha_1\alpha_2|\gamma}[\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma\beta\alpha_1}\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\gamma\beta\alpha_2}\\
&\qquad-\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\gamma\beta\alpha_1}\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma\beta\alpha_2}]-B\} = 0.
\end{aligned}$$

Setzt man aber

$$u_\alpha = u_\alpha'+\tfrac{1}{2}\delta_\alpha^{\gamma\beta}+\tfrac{1}{2}\varepsilon_1^{\gamma\beta}\tau_{\alpha 1}+\tfrac{1}{2}\varepsilon_2^{\gamma\beta}\tau_{\alpha 2},$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
&i^{\gamma\beta;\gamma\beta a_1+\gamma\beta;\gamma\beta a_2}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{a_1}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{a_2}\\
&\qquad+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{a_1}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{a_2}\}\\
&\times\{(-1)^{\gamma\beta a_1 a_2|\gamma\beta}[\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma\beta a_1}\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\gamma\beta a_2}\\
&\qquad-\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\gamma\beta a_1}\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma\beta a_2}]-B\}\\
&+i^{\gamma\beta;\gamma a_1+\gamma\beta;\gamma a_2}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\beta a_1}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\beta a_2}\\
&\qquad+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\beta a_1}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\beta a_2}\}\\
&\times\{C(-1)^{\gamma\beta a_1 a_2|\gamma\beta}[\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma a_1}\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\gamma a_2}\\
&\qquad-\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\gamma a_1}\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma a_2}]-A\} = 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen für A und B liefern besonders einfache Resultate, wenn $C=(-1)^{\gamma a_1 a_2|\gamma+\gamma\beta a_1 a_2|\gamma\beta}$ ist. Es wird nämlich dann

$$\begin{aligned}
A &= (-1)^{\gamma a_1 a_2|\gamma}\{\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma a_1}\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma a_2}\\
&\qquad-\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\gamma a_1}\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma a_2}\},\\
B &= (-1)^{\gamma\beta a_1 a_2|\gamma\beta}\{\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma\beta a_1}\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\gamma\beta a_2}\\
&\qquad-\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\gamma\beta a_1}\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma\beta a_2}\}.
\end{aligned}$$

Mit diesen Werthen A, B, C ergiebt sich dann folgende Gleichung

(I.)
$$\begin{aligned}
&\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{a_1}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{a_2}\\
&\qquad+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{a_1}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{a_2}\}\\
&\times\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{a_1}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{a_2}\\
&\qquad-\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{a_1}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{a_2}\}\\
&+(-1)^{\gamma a_1 a_2|\gamma}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\beta a_1}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\beta a_2}\\
&\qquad+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\beta a_1}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\beta a_2}\}\\
&\times(-1)^{\gamma\beta a_1 a_2|\gamma\beta}\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\beta a_1}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\beta a_2}\\
&\qquad-\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\beta a_1}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\beta a_2}\}\\
&=(-1)^{\gamma a_1 a_2|\gamma}\{\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma a_1}\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\gamma a_2}\\
&\qquad-\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\gamma a_1}\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma a_2}\}\\
&\times\{\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma a_1}\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma a_2}\\
&\qquad+\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma a_1}\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma a_2}\}\\
&+(-1)^{\gamma\beta a_1 a_2|\gamma\beta}\{\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma\beta a_1}\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\gamma\beta a_2}\\
&\qquad-\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\gamma\beta a_1}\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\gamma\beta a_2}\}\\
&\times\{\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma\beta a_1}\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma\beta a_2}\\
&\qquad+\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\gamma\beta a_1}\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\gamma\beta a_2}\};
\end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass

$$|\alpha_1|+|\alpha_2| \equiv |\beta\alpha_1|+|\beta\alpha_2| \equiv |\gamma\alpha_1|+|\gamma\alpha_2|+1 \pmod 2$$

ist. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so gilt zwar diese Formel nicht, wohl aber eine ähnliche, welche wir jedoch nicht anführen wollen, weil wir ihrer im Folgenden nicht bedürfen.

Ist δ ein solcher Index, dass $|\delta\alpha_1|+|\delta\alpha_2| \equiv 1 \pmod 2$ ist, so können die beiden Bestandtheile der linken Seite der vorstehenden Gleichung, soweit sie als Functionen der u_1, u_2 zu betrachten sind, als algebraische Summe der beiden Ausdrücke

$$(-1)^{|\alpha_2|}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\delta\alpha_1}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\delta\alpha_2} + (-1)^{|\alpha_1|}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\delta\alpha_1}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\delta\alpha_2},$$

$$(-1)^{|\beta\alpha_2|}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\delta\beta\alpha_1}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\delta\beta\alpha_2} + (-1)^{|\beta\alpha_1|}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\delta\beta\alpha_1}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\delta\beta\alpha_2}$$

dargestellt werden. Auf ganz ähnliche Weise wie die Gleichung (I.) erhält man dann folgende Beziehung:

(II.)

$$\begin{aligned}
&\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\alpha_1}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\alpha_2} + \vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\alpha_1}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\alpha_2}\}\\
&\times\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\alpha_1}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\alpha_2} - \vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\alpha_1}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\alpha_2}\}\\
&+(-1)^{\delta\alpha_1\alpha_2|\delta+|\alpha_1\beta|}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\beta\alpha_1}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\beta\alpha_2} + \vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\beta\alpha_1}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\beta\alpha_2}\}\\
&\times(-1)^{\delta\beta\alpha_1\alpha_2|\delta\beta+|\alpha_1|}\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\beta\alpha_1}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\beta\alpha_2} - \vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\beta\alpha_1}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\beta\alpha_2}\}\\
&=(-1)^{\delta\alpha_1\alpha_2|\delta}\{\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\delta\alpha_1}\vartheta(v_1'-v_1,\ v_2'-v_2)_{\delta\alpha_2} - \vartheta(v_1'-v_1,\ v_2'-v_2)_{\delta\alpha_1}\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\delta\alpha_2}\}\\
&\times\{(-1)^{|\alpha_2|}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\delta\alpha_1}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\delta\alpha_2} + (-1)^{|\alpha_1|}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\delta\alpha_1}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\delta\alpha_2}\}\\
&+(-1)^{\delta\beta\alpha_1\alpha_2|\delta\beta}\{\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\delta\beta\alpha_1}\vartheta(v_1'-v_1,\ v_2'-v_2)_{\delta\beta\alpha_2} - \vartheta(v_1'-v_1,\ v_2'-v_2)_{\delta\beta\alpha_1}\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\delta\beta\alpha_2}\}\\
&\times\{(-1)^{|\beta\alpha_2|}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\delta\beta\alpha_1}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\delta\beta\alpha_2} + (-1)^{|\beta\alpha_1|}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\delta\beta\alpha_1}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\delta\beta\alpha_2}\}.
\end{aligned}$$

§ 2.

Von den sechzehn Thetafunctionen sind sechs ungerade; ein ungerader Index ist der zusammengesetzte Index 13; die fünf anderen erhält man, indem man diese mit je einem der fünf einfachen combinirt. Wir wollen diese sechs Indices in willkürlicher Weise in zwei Gruppen von je dreien theilen und diejenigen der einen Gruppe $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$, die der anderen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nennen. Den Index, welcher durch Combination der drei $\varkappa$ oder der λ gebildet werden kann, wollen wir je nach Bedürfniss durch μ, $\varkappa_4$ oder λ_4 bezeichnen. Dieser Index ist gerade; denn er kann zunächst auf eine Combination von 13 und zwei einfachen Indices reducirt werden. Eine solche Combination muss aber nothwendig gerade sein. Es sind nämlich drei Fälle möglich:

1) Die beiden mit 13 combinirten Indices sind ungerade d. h. 1 und 3 selbst; dann heben sich die Indices fort.

2) Einer der beiden mit 13 combinirten Indices ist ungerade, d. h. 1 oder 3 selbst, der andere ist gerade. Dann reducirt sich der ganze Index auf die Combination eines geraden mit einem ungeraden Index, welche stets gerade ist.

3) Die beiden mit 13 combinirten Indices sind gerade; dann reducirt sich der ganze Index auf den dritten einfachen geraden Index.

Man kann alsdann den Index jeder beliebigen Thetafunction einmal und nur einmal in der Form

$$\varkappa_\varrho \lambda_\sigma \qquad (\varrho = 1, 2, 3, 4;\ \sigma = 1, 2, 3, 4)$$

darstellen. Der Index $\varkappa_\varrho \lambda_\sigma \lambda_{\sigma'}$ ist, wenn σ und σ' von einander verschieden sind, ungerade, sobald $\varrho = 4$ ist, und gerade für $\varrho = 1, 2, 3$. Das Entsprechende gilt von $\lambda_\sigma \varkappa_\varrho \varkappa_{\varrho'}$.

Es ist

$$\sum_{\sigma=1,2,3,4} |\varkappa_\varrho \lambda_\sigma| \equiv 4|\varkappa_\varrho| + \Sigma\varkappa_\varrho|\lambda_\sigma + \Sigma\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho + \Sigma|\lambda_\sigma|$$
$$\equiv \Sigma|\lambda_\sigma| \equiv 1 \pmod 2,$$

und ebenso ist

$$\sum_{\varrho=1,2,3,4} |\varkappa_\varrho \lambda_\sigma| \equiv 1 \pmod 2.$$

Ferner ist

$$|\varkappa_\varrho \lambda_\sigma| + |\varkappa_\varrho \lambda_{\sigma'}| \equiv |\varkappa_\varrho \lambda_\sigma \lambda_{\sigma'}| + |\varkappa_\varrho| + \lambda_{\sigma'}|\lambda_\sigma + \lambda_\sigma|\lambda_{\sigma'}$$
$$\equiv 1 + \lambda_{\sigma'}|\lambda_\sigma + \lambda_\sigma|\lambda_{\sigma'} \pmod 2$$
$$\equiv |\mu\lambda_\sigma| + |\mu\lambda_{\sigma'}| \pmod 2.$$

Wir setzen $\alpha_1 = \varkappa_\varrho \lambda_\sigma$, $\alpha_2 = \varkappa_\varrho \lambda_{\sigma'''}$, wo ϱ einen der Werthe 1, 2, 3 haben soll, während σ''' und σ zwei verschiedene Werthe aus der Reihe 1, 2, 3, 4 sind. Dann genügt der Index $\beta = \varkappa_\varrho \mu$ der Bedingung $|\alpha_1|+|\alpha_2| \equiv |\beta\alpha_1|+|\beta\alpha_2|$ (mod. 2), und der Index $\gamma = \lambda_\sigma \lambda_{\sigma'}$, wo σ' ein von σ und σ''' verschiedener der Werthe 1, 2, 3, 4 sein soll, der Bedingung: $|\gamma\alpha_1|+|\gamma\alpha_2| \equiv |\alpha_1|+|\alpha_2|+1$ (mod. 2).

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (I.) ein, so erhalten wir die Formel

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\lambda_\sigma \lambda_{\sigma'''}|\varkappa_\varrho}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\\
&\quad+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&\quad\times\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\\
&\quad-\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&+(-1)^{\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}|\mu+|\varkappa_\varrho\mu|}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\mu\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\mu\lambda_{\sigma'''}}\\
&\quad+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\mu\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\mu\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&\quad\times\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\mu\lambda_\sigma}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\mu\lambda_{\sigma'''}}\\
&\quad-\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\mu\lambda_\sigma}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\mu\lambda_{\sigma'''}}\}\\
(\mathrm{I}^{\mathrm{a}}.)\quad&=(-1)^{\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma'''}|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}+\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma''}|\varkappa_\varrho}\{\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma''}}\\
&\quad+\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma''}}\}\\
&\quad\times\{\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma''}}\\
&\quad-\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma''}}\}\\
&+(-1)^{\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma'''}|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}+|\varkappa_\varrho\mu|+\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma''}|\mu}\{\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\mu\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\mu\lambda_{\sigma''}}\\
&\quad+\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\mu\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\mu\lambda_{\sigma''}}\}\\
&\quad\times\{\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\mu\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\mu\lambda_{\sigma''}}\\
&\quad-\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\mu\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\mu\lambda_{\sigma''}}\}.
\end{aligned}
$$

Wir können aber auch

$$\alpha_1 = \varkappa_\varrho \lambda_\sigma, \quad \alpha_2 = \varkappa_{\varrho'} \lambda_{\sigma'''}, \quad \beta = \varkappa_\varrho \varkappa_{\varrho'}, \quad \gamma = \lambda_\sigma \lambda_{\sigma'}$$

setzen, wo ϱ' einen von ϱ verschiedenen der vier Werthe 1, 2, 3, 4 bezeichnen soll. Dann geht die Formel (I.) über in

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho+\lambda_{\sigma'''}|\varkappa_{\varrho'}}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&\qquad\times\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad-\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&+(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_{\varrho'}+\lambda_{\sigma'''}|\varkappa_\varrho}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&\qquad\times\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad-\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'''}}\}\\
(\mathrm{I}^{\mathrm{b}}.)\quad&=(-1)^{\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma'''}|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}+\lambda_{\sigma'}|\varkappa_\varrho+\lambda_{\sigma''}|\varkappa_{\varrho'}}\{\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma''}}\\
&\qquad+\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma''}}\}\\
&\qquad\times\{\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma''}}\\
&\qquad-\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma''}}\}\\
&+(-1)^{\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma''}|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}+\lambda_{\sigma'}|\varkappa_{\varrho'}+\lambda_{\sigma''}|\varkappa_\varrho}\{\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma''}}\\
&\qquad+\vartheta(u_1-v_1',\ u_2-v_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1+v_1',\ u_2+v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma''}}\}\\
&\qquad\times\{\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma''}}\\
&\qquad-\vartheta(u_1'-v_1,\ u_2'-v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'}}\vartheta(u_1'+v_1,\ u_2'+v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma''}}\}.
\end{aligned}
$$

Wir bezeichnen nun mit C_1, C_2, C_3, C_4 vier Grössen, zwischen welchen die Beziehung

$$(1.)\qquad C_4^2=\sum_{\varrho=1,2,3}C_\varrho^2(-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}$$

besteht, und mit $F\binom{u_1,\ u_2}{u_1',\ u_2'}_\sigma$ die Function:

$$(2.)\quad F\binom{u_1,\ u_2}{u_1',\ u_2'}_\sigma=\sum_{\varrho=1,2,3,4}C_\varrho(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}.\qquad(\sigma=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

Indem wir Gleichung (I^{a}.) mit C_ϱ^2, Gleichung (I^{b}.) mit $C_\varrho C_{\varrho'}$ multipliciren, dann in (I^{a}.) dem Index ϱ die Werthe 1, 2, 3 beilegen, in (I^{b}.) für $\varrho\varrho'$ jede der sechs möglichen Combinationen zweier verschiedenen der Grössen 1, 2, 3, 4 schreiben und schliesslich summiren, erhalten wir folgende Gleichung:

$$(\text{III.})\quad \begin{cases} F\binom{u_1+v_1,\ u_2+v_2}{u'_1+v'_1,\ u'_2+v'_2}_{\sigma} F\binom{u_1-v_1,\ u_2-v_2}{u'_1-v'_1,\ u'_2-v'_2}_{\sigma'''} \\ \qquad + F\binom{u_1+v_1,\ u_2+v_2}{u'_1-v'_1,\ u'_2-v'_2}_{\sigma} F\binom{u_1-v_1,\ u_2-v_2}{u'_1+v'_1,\ u'_2+v'_2}_{\sigma'''} \\ -F\binom{u_1-v_1,\ u_2-v_2}{u'_1+v'_1,\ u'_2+v'_2}_{\sigma} F\binom{u_1+v_1,\ u_2+v_2}{u'_1-v'_1,\ u'_2-v'_2}_{\sigma'''} \\ \qquad - F\binom{u_1-v_1,\ u_2-v_2}{u'_1-v'_1,\ u'_2-v'_2}_{\sigma} F\binom{u_1+v_1,\ u_2+v_2}{u'_1+v'_1,\ u'_2+v'_2}_{\sigma'''} \\ = (-1)^{\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma'''}|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}} \Big\{ F\binom{u'_1+v_1,\ u'_2+v_2}{u_1+v'_1,\ u_2+v'_2}_{\sigma'} F\binom{u'_1-v_1,\ u'_2-v_2}{u_1-v'_1,\ u_2-v'_2}_{\sigma''} \\ \qquad + F\binom{u'_1+v_1,\ u'_2+v_2}{u_1-v'_1,\ u_2-v'_2}_{\sigma'} F\binom{u'_1-v_1,\ u'_2-v_2}{u_1+v'_1,\ u_2+v'_2}_{\sigma''} \\ -F\binom{u'_1-v_1,\ u'_2-v_2}{u_1+v'_1,\ u_2+v'_2}_{\sigma'} F\binom{u'_1+v_1,\ u'_2+v_2}{u_1-v'_1,\ u_2-v'_2}_{\sigma''} \\ \qquad - F\binom{u'_1-v_1,\ u'_2-v_2}{u_1-v'_1,\ u_2-v'_2}_{\sigma'} F\binom{u'_1+v_1,\ u'_2+v_2}{u_1+v'_1,\ u_2+v'_2}_{\sigma''} \Big\}. \end{cases}$$

Setzen wir hierin $v'_1 = v'_2 = 0$, $v_1 = w_1\tau$, $v_2 = w_2\tau$ und lassen dann τ unendlich klein werden, so erhalten wir die Gleichung

$$F\binom{u_1,\ u_2}{u'_1,\ u'_2}_{\sigma'''} \Big\{\frac{\partial}{\partial u_1} w_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} w_2\Big\} F\binom{u_1,\ u_2}{u'_1,\ u'_2}_{\sigma}$$
$$- F\binom{u_1,\ u_2}{u'_1,\ u'_2}_{\sigma} \Big\{\frac{\partial}{\partial u_1} w_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} w_2\Big\} F\binom{u_1,\ u_2}{u'_1,\ u'_2}_{\sigma'''}$$
$$= (-1)^{\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma'''}|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}} \Big[F\binom{u_1,\ u_2}{u'_1,\ u'_2}_{\sigma''} \Big\{\frac{\partial}{\partial u'_1} w_1 + \frac{\partial}{\partial u'_2} w_2\Big\} F\binom{u_1,\ u_2}{u'_1,\ u'_2}_{\sigma'}$$
$$- F\binom{u_1,\ u_2}{u'_1,\ u'_2}_{\sigma'} \Big\{\frac{\partial}{\partial u'_1} w_1 + \frac{\partial}{\partial u'_2} w_2\Big\} F\binom{u_1,\ u_2}{u'_1,\ u'_2}_{\sigma''} \Big].$$

Lassen wir, da alle F jetzt dieselben Argumente haben, die letzteren fort, so können wir die Gleichung kürzer schreiben

$$(\text{III}^{\text{a}}.)\quad \begin{cases} F_{\sigma'''}\Big(\frac{\partial F_\sigma}{\partial u_1} w_1 + \frac{\partial F_\sigma}{\partial u_2} w_2\Big) - F_\sigma\Big(\frac{\partial F_{\sigma'''}}{\partial u_1} w_1 + \frac{\partial F_{\sigma'''}}{\partial u_2} w_2\Big) \\ = (-1)^{\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma'''}|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}} \Big[F_{\sigma''}\Big(\frac{\partial F_{\sigma'}}{\partial u'_1} w_1 + \frac{\partial F_{\sigma'}}{\partial u'_2} w_2\Big) - F_{\sigma'}\Big(\frac{\partial F_{\sigma''}}{\partial u'_1} w_1 + \frac{\partial F_{\sigma''}}{\partial u'_2} w_2\Big)\Big]. \end{cases}$$

Aus (III^{a}.) folgt wegen der vollständigen Symmetrie der Functionen F_σ bezüglich der Werthepaare u_1, u_2 und u'_1, u'_2 unmittelbar die Gleichung:

$$(\text{III}^{\text{b}}.)\quad \begin{cases} F_{\sigma'''}\Big(\frac{\partial F_\sigma}{\partial u'_1} w'_1 + \frac{\partial F_\sigma}{\partial u'_2} w'_2\Big) - F_\sigma\Big(\frac{\partial F_{\sigma'''}}{\partial u'_1} w'_1 + \frac{\partial F_{\sigma'''}}{\partial u'_2} w'_2\Big) \\ = (-1)^{\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma'''}|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}} \Big[F_{\sigma''}\Big(\frac{\partial F_{\sigma'}}{\partial u_1} w'_1 + \frac{\partial F_{\sigma'}}{\partial u_2} w'_2\Big) - F_{\sigma'}\Big(\frac{\partial F_{\sigma''}}{\partial u_1} w'_1 + \frac{\partial F_{\sigma''}}{\partial u_2} w'_2\Big)\Big]. \end{cases}$$

Bedenkt man nun, dass

$$|\lambda_\sigma \lambda_{\sigma'''}|+\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma'''}|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'} = \lambda_\sigma|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}+\lambda_{\sigma'}|\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma''}+\lambda_{\sigma''}|\lambda_{\sigma''}\lambda_\sigma$$

ist, so folgt aus (III^a.) und (III^b.) für die Function

$$S = (-1)^{|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}|}F_\sigma^2+(-1)^{|\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma'''}|}F_{\sigma'}^2+(-1)^{|\lambda_{\sigma''}\lambda_{\sigma'''}|}F_{\sigma''}^2-F_{\sigma'''}^2$$

von u_1, u_2, u_1', u_2' die Differentialgleichung:

$$F_{\sigma'''}dS-2SdF_{\sigma'''} = 0.$$

Da

$$|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}|+|\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma'''}|+|\lambda_{\sigma''}\lambda_{\sigma'''}| \equiv 1 \pmod 2$$

ist, so kann man für S auch schreiben

$$S = -(-1)^{|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}|}\{F_{\sigma'}^2(-1)^{|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}|}+F_{\sigma''}^2(-1)^{|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma''}|}+F_{\sigma'''}^2(-1)^{|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}|}-F_\sigma^2\},$$

und erkennt dann, dass die Gleichung

$$F_\sigma dS-2SdF_\sigma = 0$$

für jeden der vier Werthe $\sigma = 1, 2, 3, 4$ gilt. Diese vier Gleichungen lassen sich nun aber, weil die Grössen F_σ nicht in einem constanten Verhältnisse stehen, nur durch die Annahme $S = 0$ befriedigen.

Es ist also:

$$\text{(IV.)}\quad (-1)^{|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}|}F_\sigma^2+(-1)^{|\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma'''}|}F_{\sigma'}^2+(-1)^{|\lambda_{\sigma''}\lambda_{\sigma'''}|}F_{\sigma''}^2-F_{\sigma'''}^2 = 0. \qquad (3.)$$

§ 3.

Die am Schlusse des vorhergehenden Paragraphen aufgestellte Formel liefert uns unmittelbar drei Grössen, welche der Bedingung für die Richtungscosinus einer Geraden zu drei orthogonalen Axen genügen. Sind nämlich ε_σ, $\varepsilon_{\sigma'}$, $\varepsilon_{\sigma''}$ gleich ± 1, und ist ferner

$$\gamma_\sigma = \varepsilon_\sigma i^{|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}|}\frac{F_\sigma}{F_{\sigma'''}},$$

$$\gamma_{\sigma'} = \varepsilon_{\sigma'} i^{|\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma'''}|}\frac{F_{\sigma'}}{F_{\sigma'''}},$$

$$\gamma_{\sigma''} = \varepsilon_{\sigma''} i^{|\lambda_{\sigma''}\lambda_{\sigma'''}|}\frac{F_{\sigma''}}{F_{\sigma'''}},$$

so folgt aus der Gleichung (IV.) unmittelbar, dass

$$\gamma_\sigma^2+\gamma_{\sigma'}^2+\gamma_{\sigma''}^2 = 1$$

ist*). Für σ''' kann zwar eine beliebige der Grössen 1, 2, 3, 4 genommen

*) Unter Voraussetzung des schönen Theorems von *Caspary* im 94. Bande dieses Journals S. 77 hätte man die Richtigkeit dieses Satzes sehr kurz beweisen können. Es handelt sich darin um 16 Coefficienten $a_{\varrho\sigma}$ einer orthogonalen Substitution von der Art,

werden; aber da man die Formeln für einen Werth aus denen für einen anderen dadurch ableiten kann, dass man die Werthepaare u_1, u_2 und u_1', u_2' um dieselben simultanen Halbperioden vermehrt, so empfiehlt es sich, wegen einer besseren Uebersicht für σ''' den Werth 4 zu nehmen. Dann bleiben für σ, σ', σ'' die drei Werthe 1, 2, 3.

Ausser von den Argumenten u_1, u_2 und u_1', u_2' hängen die Grössen γ_1, γ_2, γ_3 noch von den Grössen C_1, C_2, C_3, C_4 oder vielmehr von deren Verhältnissen ab. Setzt man

$$\varepsilon_\varrho' = \pm 1, \quad \varepsilon_\varrho' \frac{C_\varrho}{C_4} i^{|\varkappa_{\varrho\mu}|} = c_\varrho \quad \text{und demnach} \quad C_\varrho = \varepsilon_\varrho' i^{-|\varkappa_{\varrho\mu}|} c_\varrho C_4,$$

so erhält man nach Gleichung (1.) des vorhergehenden Paragraphen die Beziehung

$$(1^a.) \qquad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1.$$

Ferner ergiebt sich für γ_σ, wenn man ϱ_4 und λ_4 gleich μ setzt, der Ausdruck

$$(3.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_\sigma = \varepsilon_\sigma i^{|\lambda_\sigma \mu|} \\ \times \dfrac{(-1)^{\lambda_\sigma|\mu}\vartheta(u_1', u_2')_{\mu\lambda_\sigma}\vartheta(u_1, u_2)_{\mu\lambda_\sigma} + \sum\limits_{\varrho=1,2,3} \varepsilon_\varrho'(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho} i^{-|\varkappa_{\varrho\mu}|} c_\varrho \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}}{\vartheta(u_1', u_2')\vartheta(u_1, u_2) + \sum\limits_{\varrho=1,2,3} \varepsilon_\varrho'(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho} i^{-|\varkappa_{\varrho\mu}|} c_\varrho \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}} \cdot \\ (\sigma = 1, 2, 3) \end{array} \right.$$

Aus den Gleichungen (III^a.) und (III^b.) folgen sofort zwei partielle Differentialgleichungen zwischen γ_σ, $\gamma_{\sigma'}$, $\gamma_{\sigma''}$. Es ist

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 i^{|\lambda_\sigma\mu|}}{i^{|\lambda_{\sigma'}\mu|+|\lambda_{\sigma''}\mu|}}(-1)^{\lambda_{\sigma'}\mu|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{i^{|\lambda_1\mu|+|\lambda_2\mu|+|\lambda_3\mu|}}(-1)^{\lambda_{\sigma'}\mu|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}+|\lambda_\sigma\mu|}$$

$$= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{i^{|\lambda_1\mu|+|\lambda_2\mu|+|\lambda_3\mu|}}(-1)^{\lambda_\sigma|\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}+\lambda_{\sigma'}|\lambda_{\sigma'}\lambda_{\sigma''}+\lambda_{\sigma''}|\lambda_{\sigma''}\lambda_\sigma}$$

d. h. eine ungerade Potenz von i, welche ihren Werth nicht ändert, wenn die Zahlen σ, σ', σ'' cyklisch vertauscht werden. Wir wollen setzen

$$(4.) \qquad \varepsilon i = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{i^{|\lambda_1\mu|+|\lambda_2\mu|+|\lambda_3\mu|}}(-1)^{\lambda_1|\lambda_1\lambda_2+\lambda_2|\lambda_2\lambda_3+\lambda_3|\lambda_3\lambda_1}.$$

---

dass für die vier Grössen $\xi_\sigma = \sum\limits_\varrho a_{\varrho\sigma}x_\varrho$ die Gleichung $\sum\limits_\sigma \xi_\sigma^2 = A\sum\limits_\varrho x_\varrho^2$ gilt. Nimmt man nun für die Grössen x_ϱ solche Grössen C_ϱ, dass $\Sigma C_\varrho^2 = 0$ wird, so wird auch $\Sigma\xi_\sigma^2 = 0$, und folglich gilt für die drei Grössen $\gamma_\sigma = i\dfrac{\sum\limits_\varrho a_{\varrho\sigma}C_\varrho}{\sum\limits_\varrho a_{\varrho 4}C_\varrho}$ $(\sigma = 1, 2, 3)$ die Beziehung $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2 = 1$.

Dann werden die in Frage stehenden Gleichungen

$$(5^{a}.)\quad \frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial u_1}w_1+\frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial u_2}w_2 = \varepsilon i\Big\{\gamma_{\sigma''}\Big(\frac{\partial\gamma_{\sigma'}}{\partial u_1'}w_1+\frac{\partial\gamma_{\sigma'}}{\partial u_2'}w_2\Big)-\gamma_{\sigma'}\Big(\frac{\partial\gamma_{\sigma''}}{\partial u_1'}w_1+\frac{\partial\gamma_{\sigma''}}{\partial u_2'}w_2\Big)\Big\},$$

$$(5^{b}.)\quad \frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial u_1'}w_1'+\frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial u_2'}w_2' = \varepsilon i\Big\{\gamma_{\sigma''}\Big(\frac{\partial\gamma_{\sigma'}}{\partial u_1}w_1'+\frac{\partial\gamma_{\sigma'}}{\partial u_2}w_2'\Big)-\gamma_{\sigma'}\Big(\frac{\partial\gamma_{\sigma''}}{\partial u_1}w_1'+\frac{\partial\gamma_{\sigma''}}{\partial u_2}w_2'\Big)\Big\}.$$

§ 4.

Wie die Gleichungen (5ª.) und (5ᵇ.) erkennen lassen, stehen die Ableitungen der Grössen γ_σ in sehr nahem Zusammenhange mit dem Richtungscosinus derjenigen Geraden, welche auf der durch γ_1, γ_2, γ_3 bestimmten Richtung senkrecht stehen. Es sollen deshalb zunächst diese Ableitungen näher untersucht werden.

In Gleichung (II.) setzen wir zunächst

$$\alpha_1=\varkappa_\varrho\lambda_\sigma,\quad \alpha_2=\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''},\quad \beta=\varkappa_{\varrho'}\mu,\quad \delta=\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma$$

und erhalten dann mit Rücksicht auf

$$|\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}|+|\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'''}| \equiv |\varkappa_\varrho\lambda_\sigma|+|\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma|,$$
$$|\varkappa_{\varrho''}\lambda_{\sigma'''}|+|\mu\lambda_{\sigma'''}| \equiv |\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma|+|\mu\lambda_\sigma|$$

die folgende Gleichung

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\lambda_\sigma|\lambda_{\sigma'''}|\varkappa_\varrho}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&\qquad\times\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad-\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&+(-1)^{\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}|\mu+|\varkappa_\varrho\mu|}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\mu\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\mu\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\mu\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\mu\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&\qquad\times\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\mu\lambda_\sigma}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\mu\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad-\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\mu\lambda_\sigma}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\mu\lambda_{\sigma'''}}\}\\
(\mathrm{II}^{a}.)\quad&=(-1)^{\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}|\varkappa_{\varrho'}+|\varkappa_{\varrho''}\mu|+\lambda_{\sigma'''}|\lambda_\sigma}\{\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\varkappa_{\varrho'}}\vartheta(v_1'-v_1,\ v_2'-v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad-\vartheta(v_1'-v_1,\ v_2'-v_2)_{\varkappa_{\varrho'}}\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&\qquad\times\{(-1)^{|\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'''}|}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho'}}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad+(-1)^{|\varkappa_{\sigma'}\lambda_\sigma|}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho'}}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&+(-1)^{\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}|\varkappa_{\varrho''}+|\varkappa_{\varrho'}\mu|+\lambda_{\sigma'''}|\lambda_\sigma}\{\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\varkappa_{\varrho''}}\vartheta(v_1'-v_1,\ v_2'-v_2)_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad-\vartheta(v_1'-v_1,\ v_2'-v_2)_{\varkappa_{\varrho''}}\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&\qquad\times\{(-1)^{|\varkappa_{\varrho''}\lambda_{\sigma'''}|}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho''}}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad+(-1)^{|\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma|}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho''}}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\}.
\end{aligned}$$

Ferner setzen wir in Formel (II.)

$$\alpha_1 = \varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma, \quad \alpha_2 = \varkappa_{\varrho''}\lambda_{\sigma'''}, \quad \beta = \varkappa_{\varrho'}\varkappa_{\varrho''}, \quad \delta = \lambda_\sigma;$$

dann ergiebt sich

(II^b.)
$$\begin{aligned}
&(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_{\varrho'}+\lambda_{\sigma'''}|\varkappa_{\varrho''}}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&\qquad\times\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1-v_1,\ v_2-v_2)_{\varkappa_{\sigma''}\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad-\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&+(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_{\varrho''}+\lambda_{\sigma'''}|\varkappa_{\varrho'}}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad-\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&\qquad\times\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad-\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&=(-1)^{\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}|\varkappa_{\varrho''}+\lambda_{\sigma'''}|\lambda_\sigma}\{\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\varkappa_{\varrho'}}\vartheta(v_1'-v_1,\ v_2'-v_2)_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad-\vartheta(v_1'-v_1,\ v_2'-v_2)_{\varkappa_{\varrho'}}\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&\qquad\times\{(-1)^{|\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'''}|}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho'}}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad+(-1)^{|\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma|}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho'}}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&+(-1)^{\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}|\varkappa_{\varrho'}+\lambda_{\sigma'''}|\lambda_\sigma}\{\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\varkappa_{\varrho''}}\vartheta(v_1'-v_1,\ v_2'-v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad-\vartheta(v_1'-v_1,\ v_2'-v_2)_{\varkappa_{\varrho''}}\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\}\\
&\qquad\times\{(-1)^{|\varkappa_{\varrho''}\lambda_{\sigma'''}|}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho''}}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\\
&\qquad+(-1)^{|\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma|}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho''}}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\}.
\end{aligned}$$

Endlich setzen wir in Formel (II.)

$$\alpha_1 = \varkappa_\varrho\lambda_\sigma, \quad \alpha_2 = \mu\lambda_{\sigma'''}, \quad \beta = \varkappa_\varrho\mu, \quad \delta = \varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma$$

und gelangen unter der Voraussetzung, dass σ einen der Werthe 1, 2, 3 hat, damit zu der Formel (II^c.):

$$
(\mathrm{II}^{c}.)\quad
\begin{cases}
(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho+\lambda_{\sigma'''}|\mu}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\mu\lambda_{\sigma'''}}\\
\qquad+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\mu\lambda_{\sigma'''}}\}\\
\qquad\times\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\mu\lambda_{\sigma'''}}\\
\qquad-\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\mu\lambda_{\sigma'''}}\}\\
+(-1)^{\lambda_\sigma|\mu+\lambda_{\sigma'''}|\varkappa_\varrho}\{\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\mu\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\\
\qquad+\vartheta(u_1'-v_1',\ u_2'-v_2')_{\mu\lambda_\sigma}\vartheta(u_1'+v_1',\ u_2'+v_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\}\\
\qquad\times\{\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\mu\lambda_\sigma}\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\\
\qquad-\vartheta(u_1-v_1,\ u_2-v_2)_{\mu\lambda_\sigma}\vartheta(u_1+v_1,\ u_2+v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}}\}\\
=(-1)^{\lambda_{\sigma'''}|\lambda_\sigma+\lambda_\sigma\lambda_{\varrho'''}|\varkappa_{\varrho''}+\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho''}|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}}\{\vartheta(v_1'+v_1,v_2'+v_2)_{\varkappa_{\varrho'}}\vartheta(v_1'-v_1,v_2'-v_2)_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\\
\qquad-\vartheta(v_1'-v_1,v_2'-v_2)_{\varkappa_{\varrho'}}\vartheta(v_1'+v_1,v_2'+v_2)_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\}\\
\qquad\times\{(-1)^{|\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma|}\vartheta(u_1-u_1',u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho'}}\vartheta(u_1+u_1',u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\\
\qquad-(-1)^{|\varkappa_{\varrho'}\lambda_{\sigma'''}|}\vartheta(u_1+u_1',u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho'}}\vartheta(u_1-u_1',u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho''}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\}\\
+(-1)^{\lambda_{\sigma'''}|\lambda_\sigma+\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}|\varkappa_{\varrho'}+\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho''}}\{\vartheta(v_1'+v_1,v_2'+v_2)_{\varkappa_{\varrho''}}\vartheta(v_1'-v_1,v_2'-v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\\
\qquad-\vartheta(v_1'-v_1,v_2'-v_2)_{\varkappa_{\varrho''}}\vartheta(v_1'+v_1,v_2'+v_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\}\\
\qquad\times\{(-1)^{|\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma|}\vartheta(u_1-u_1',u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho''}}\vartheta(u_1+u_1',u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\\
\qquad-(-1)^{|\varkappa_{\varrho''}\lambda_{\sigma'''}|}\vartheta(u_1+u_1',u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho''}}\vartheta(u_1+u_1',u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\}.
\end{cases}
$$

Man sieht leicht, mit welchen Factoren man die drei Gleichungen (II^{a}.), (II^{b}.) und (II^{c}.) zu versehen hat, damit die linke Seite in die linke Seite von (IV.) übergehe. Die rechte Seite wird sehr viel übersichtlicher, wenn wir ausser c_1, c_2, c_3 sechs andere Grössen a_ϱ, b_ϱ einführen, welche im Verein mit c_1, c_2, c_3 die Bedingungen für die Richtungscosinus zweier congruenten Coordinatensysteme befriedigen. Dann wird

$$C_{\varrho'}^2(-1)^{|\varkappa_{\varrho'''}\mu|}+C_{\varrho''}^2(-1)^{|\varkappa_{\varrho'}\mu|} = -(-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}(c_{\varrho''}^2+c_{\varrho'}^2)C_4^2$$
$$= -(-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}C_4(a_\varrho^2+b_\varrho^2) = -(-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}(a_\varrho+ib_\varrho)(a_\varrho-ib_\varrho)C_4^2.$$

Ist ferner

$$i\varepsilon' = \frac{\varepsilon_1'\varepsilon_2'\varepsilon_3'(-1)^{\varkappa_1|\varkappa_1\varkappa_2+\varkappa_2|\varkappa_2\varkappa_3+\varkappa_3|\varkappa_3\varkappa_1}}{i^{|\varkappa_1\mu|+|\varkappa_2\mu|+|\varkappa_3\mu|}},$$

so wird

$$C_{\varrho'}C_{\varrho''}\mp(-1)^{\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'''}|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}}C_\varrho C_4 = -\varepsilon_{\varrho'}'\varepsilon_{\varrho''}'i^{-|\varkappa_{\varrho'}\mu|-|\varkappa_{\varrho'''}\mu|}(a_{\varrho'}\pm i\varepsilon' b_{\varrho'})(a_{\varrho''}\mp i\varepsilon' b_{\varrho''})C_4^2. \qquad (\mathrm{V}^{a}.)$$

Mit Hülfe dieser Beziehungen erhält man aus (II^{a}.), (II^{b}.), (II^{c}.) die Gleichung

(V.)
$$\left\{\begin{aligned}
&F\begin{pmatrix}u_1+v_1, & u_2+v_2\\ u_1'+v_1', & u_2'+v_2'\end{pmatrix}_\sigma F\begin{pmatrix}u_1-v_1, & u_2-v_2\\ u_1'-v_1', & u_2'-v_2'\end{pmatrix}_{\sigma'''}\\
&\qquad\qquad +F\begin{pmatrix}u_1+v_1, & u_2+v_2\\ u_1'-v_1', & u_2'-v_2'\end{pmatrix}_\sigma F\begin{pmatrix}u_1-v_1, & u_2-v_2\\ u_1'+v_1', & u_2'+v_2'\end{pmatrix}_{\sigma'''}\\
&-F\begin{pmatrix}u_1-v_1, & u_2-v_2\\ u_1'+v_1', & u_2'+v_2'\end{pmatrix}_\sigma F\begin{pmatrix}u_1+v_1, & u_2+v_2\\ u_1'-v_1', & u_2'-v_2'\end{pmatrix}_{\sigma'''}\\
&\qquad\qquad -F\begin{pmatrix}u_1-v_1, & u_2-v_2\\ u_1'-v_1', & u_2'-v_2'\end{pmatrix}_\sigma F\begin{pmatrix}u_1+v_1, & u_2+v_2\\ u_1'+v_1', & u_2'+v_2'\end{pmatrix}_{\sigma'''}\\
&= -(-1)^{\lambda_\sigma'''|\lambda_\sigma}C_4^2\Big\{\sum_{\varrho=1,2,3}(-1)^{|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma'''|}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\varepsilon_\varrho'(a_\varrho+i\varepsilon' b_\varrho)\\
&\qquad\qquad\times\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\varkappa_\varrho}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho}\Big\}\\
&\times\Big\{\sum_{\varrho=1,2,3}(-1)^{\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''|\varkappa_\varrho}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\varepsilon_\varrho'(a_\varrho-i\varepsilon' b_\varrho)\\
&\qquad\qquad\times\vartheta(v_1'-v_1,\ v_2'-v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''}\Big\}\\
&+(-1)^{\lambda_\sigma'''|\lambda_\sigma}C_4^2\Big\{\sum_{\varrho=1,2,3}(-1)^{|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma'''|}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\varepsilon_\varrho'(a_\varrho+i\varepsilon' b_\varrho)\\
&\qquad\qquad\times\vartheta(v_1'-v_1,\ v_2'-v_2)_{\varkappa_\varrho}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho}\Big\}\\
&\times\Big\{\sum_{\varrho=1,2,3}(-1)^{\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''|\varkappa_\varrho}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\varepsilon_\varrho'(a_\varrho-i\varepsilon' b_\varrho)\\
&\qquad\qquad\times\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''}\Big\}\\
&-(-1)^{\lambda_\sigma'''|\lambda_\sigma}C_4^2\Big\{\sum_{\varrho=1,2,3}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\varepsilon_\varrho'(a_\varrho-i\varepsilon' b_\varrho)\\
&\qquad\qquad\times\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\varkappa_\varrho}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_\varrho}\Big\}\\
&\times\Big\{\sum_{\varrho=1,2,3}(-1)^{\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''|\varkappa_\varrho+|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma|}\varepsilon_\varrho'i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}(a_\varrho+i\varepsilon' b_\varrho)\\
&\qquad\qquad\times\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''}\Big\}\\
&+(-1)^{\lambda_\sigma'''|\lambda_\sigma}C_4^2\Big\{\sum_{\varrho=1,2,3}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\varepsilon_\varrho'(a_\varrho-i\varepsilon' b_\varrho)\\
&\qquad\qquad\times\vartheta(v_1'-v_1,\ v_2'-v_2)_{\varkappa_\varrho}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_\varrho}\Big\}\\
&\times\Big\{\sum_{\varrho=1,2,3}(-1)^{\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''|\varkappa_\varrho+|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma|}\varepsilon_\varrho'i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}(a_\varrho+i\varepsilon' b_\varrho)\\
&\qquad\qquad\times\vartheta(v_1'+v_1,\ v_2'+v_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''}\Big\}.
\end{aligned}\right.$$

Wird nun $v_1'=v_2'=0$, $v_1=w_1\tau$, $v_2=w_2\tau$, so erhält man für $\lim\tau=0$ die Gleichung

(V^a.)
$$\left\{\begin{aligned}
&4\Big\{F_{\sigma'''}\Big(\frac{\partial}{\partial u_1}w_1+\frac{\partial}{\partial u_2}w_2\Big)F_\sigma-F_\sigma\Big(\frac{\partial}{\partial u_1}w_1+\frac{\partial}{\partial u_2}w_2\Big)F_{\sigma'''}\Big\}\\
&=-2(-1)^{\lambda_\sigma'''|\lambda_\sigma}C_4^2\Big\{\sum_{\varrho=1,2,3}(-1)^{|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma'''|}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\varepsilon_\varrho'(a_\varrho+i\varepsilon' b_\varrho)\triangle\vartheta_{\varkappa_\varrho}\vartheta(u+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho}\Big\}\\
&\quad\times\Big\{\sum_{\varrho=1,2,3}(-1)^{\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''|\varkappa_\varrho}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\varepsilon_\varrho'(a_\varrho-i\varepsilon' b_\varrho)\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''}\Big\}\\
&\quad-2(-1)^{\lambda_\sigma'''|\lambda_\sigma}C_4^2\Big\{\Sigma i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\varepsilon_\varrho'(a_\varrho-i\varepsilon' b_\varrho)\triangle\vartheta_{\varkappa_\varrho}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_\varrho}\Big\}\\
&\quad\times\Big\{\sum_{\varrho=1,2,3}(-1)^{\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''|\varkappa_\varrho+|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma|}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\varepsilon_\varrho'(a_\varrho+i\varepsilon' b_\varrho)\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\lambda_\sigma'''}\Big\}.
\end{aligned}\right.$$

Da nun F_σ und $F_{\sigma'''}$ bezüglich der Werthepaare u_1, u_2 und u'_1, u'_2 völlig symmetrisch sind, so erhält man weiter die Gleichung

$$\text{(IV.)}\quad \left\{\begin{aligned} &F_{\sigma'''}\left\{\left[w_1\frac{\partial}{\partial u_1}+w_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right]\pm\left[w_1\frac{\partial}{\partial u'_1}+w_2\frac{\partial}{\partial u'_2}\right]\right\}F_\sigma \\ &\qquad -F_\sigma\left\{\left[w_1\frac{\partial}{\partial u_1}+w_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right]\pm\left[w_1\frac{\partial}{\partial u'_1}+w_2\frac{\partial}{\partial u'_2}\right]\right\}F_{\sigma'''} \\ &=-C_4^2(-1)^{\lambda_{\sigma'''}|\lambda_\sigma}\Big\{\sum_{\varrho=1,2,3}(\mp 1)^{|\varkappa_\varrho\lambda_{\sigma'''}|}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\varepsilon'_\varrho(a_\varrho\pm i\varepsilon' b_\varrho)\Delta\vartheta_{\varkappa_\varrho}\vartheta(u_1\pm u'_1,\ u_2\pm u'_2)_{\varkappa_\varrho}\Big\} \\ &\times\Big\{\sum_{\varrho=1,2,3}(\pm 1)^{|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma|}(-1)^{\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}|\varkappa_\varrho}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\varepsilon'_\varrho(a_\varrho\mp i\varepsilon' b_\varrho)\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\vartheta(u_1\mp u'_1,\ u_2\mp u'_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'''}}\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Aus dieser Gleichung erhält man unmittelbar die Ableitungen der Grössen γ_σ bestimmt durch die Gleichung:

$$\text{(6.)}\quad \left\{\begin{aligned} &\left\{\frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial u_1}w_1+\frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial u_2}w_2\right\}\pm\left\{\frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial u'_1}w_1+\frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial u'_2}w_2\right\} \\ &=-\varepsilon_\sigma(-1)^{\mu|\lambda_\sigma}i^{|\lambda_\sigma\mu|}\frac{\Sigma\varepsilon'_\varrho(-1)^{\lambda_\sigma\mu|\varkappa_\varrho}(\pm 1)^{|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma|}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}(a_\varrho\mp i\varepsilon' b_\varrho)\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1\mp u'_1,\ u_2\mp u'_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}}{\vartheta(u'_1,\ u'_2)\vartheta(u_1,\ u_2)+\Sigma\varepsilon'_\varrho c_\varrho i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho}\vartheta(u'_1,\ u'_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}} \\ &\qquad\times\frac{\Sigma(\mp 1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\varepsilon'_\varrho(a_\varrho\pm i\varepsilon' b_\varrho)\Delta\vartheta_{\varkappa_\varrho}\vartheta(u_1\pm u'_1,\ u_2\pm u'_2)_{\varkappa_\varrho}}{\vartheta(u'_1,\ u'_2)\vartheta(u_1,\ u_2)+\Sigma\varepsilon'_\varrho c_\varrho i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho}\vartheta(u'_1,\ u'_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}}. \end{aligned}\right.$$

§ 5.

Die Richtungscosinus α_σ, β_σ $(\sigma=1,2,3)$ zweier Richtungen, welche auf einander und auf der durch γ_1, γ_2, γ_3 bestimmten Richtung senkrecht stehen, genügen bekanntlich, wenn das durch die drei Richtungen bestimmte Axensystem zu dem System der drei Coordinatenaxen congruent ist, den Gleichungen

$$\alpha_\sigma+i\varepsilon\beta_\sigma=-i\varepsilon\{\gamma_{\sigma''}(\alpha_{\sigma'}+i\varepsilon\beta_{\sigma'})-\gamma_{\sigma'}(\alpha_{\sigma''}+i\varepsilon\beta_{\sigma''})\},$$

wo ε einen beliebigen der Werthe $+1$ oder -1 bezeichnet, und σ, σ', σ'' eine beliebige cyklische Vertauschung der drei Werthe 1, 2, 3 darstellt.

Durch die vorstehenden Gleichungen sind die $\alpha_\varrho+i\varepsilon\beta_\varrho$ bis auf einen allen drei Grössen gemeinschaftlichen Factor bestimmt. Kennt man irgend ein System von Grössen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ welches den vorstehenden Gleichungen genügt, so darf man demnach setzen:

$$\alpha_\sigma+i\varepsilon\beta_\sigma=K\mathfrak{A}_\sigma \qquad (\sigma=1,2,3);$$

es dürfen hierbei gemeinschaftliche Factoren der Grössen $\mathfrak{A}_\sigma$ einfach unterdrückt werden.

Nun ist aber nach Gleichung (5ª.), (5ᵇ.)

$$\left(\frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial u_1}w_1+\frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial u_2}w_2\right)\mp\left(\frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial u_1'}w_1+\frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial u_2'}w_2\right)$$
$$=\mp i\varepsilon\left\{\gamma_{\sigma''}\left[\left(\frac{\partial\gamma_{\sigma'}}{\partial u_1}w_1+\frac{\partial\gamma_{\sigma'}}{\partial u_2}w_2\right)\mp\left(\frac{\partial\gamma_{\sigma'}}{\partial u_1'}w_1+\frac{\partial\gamma_{\sigma'}}{\partial u_2'}w_2\right)\right\}\right.$$
$$\left.-\gamma_{\sigma'}\left[\left(\frac{\partial\gamma_{\sigma''}}{\partial u_1}w_1+\frac{\partial\gamma_{\sigma''}}{\partial u_2}w_2\right)\mp\left(\frac{\partial\gamma_{\sigma''}}{\partial u_1'}w_1+\frac{\partial\gamma_{\sigma''}}{\partial u_2'}w_2\right)\right]\right\}.$$

wo ε den durch Gleichung (4.) bestimmten Werth hat.

Behält man diesen Werth für ε bei, so kann man nach den obigen Ausführungen und mit Rücksicht auf Formel (6.) setzen

$$(7.)\quad\begin{cases}\alpha_\sigma\pm i\varepsilon\beta_\sigma = Se^{\pm iu_3}\varepsilon_\sigma(-1)^{\mu|\lambda_\sigma}i^{|\lambda_\sigma\mu|}\\ \times\dfrac{\Sigma\varepsilon_\varrho'(-1)^{\lambda_\sigma\mu|\varkappa_\varrho}(\mp1)^{|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma|}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}(a_\varrho\pm i\varepsilon' b_\varrho)\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1\pm u_1',\ u_2\pm u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}}{\vartheta(u_1',\ u_2')\vartheta(u_1,\ u_2)+\Sigma\varepsilon_\varrho' c_\varrho i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}}.\end{cases}$$

Ausser den schon angeführten Gleichungen müssen die Grössen α_σ, β_σ noch der Gleichung

$$\sum_{\sigma=1,2,3}(\alpha_\sigma+i\beta_\sigma)(\alpha_\sigma-i\beta_\sigma)=2$$

genügen, welche uns eine Bestimmung der Grössen S gestattet, während u_3 unbestimmt bleibt.

Um nun S wirklich zu ermitteln, müssen wir vor allem den Ausdruck

$$\sum_{\sigma=1,2,3}(-1)^{|\lambda_\sigma\mu|}\Big\{\Big(\sum_{\varrho=1,2,3}\varepsilon_\varrho'(-1)^{\lambda_\sigma\mu|\varkappa_\varrho+|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma|}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}(a_\varrho+i\varepsilon' b_\varrho)\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1+u_1',\,u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\Big)$$
$$\times\Big(\sum_{\varrho=1,2,3}\varepsilon_\varrho'(-1)^{\lambda_\sigma\mu|\varkappa_\varrho}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}(a_\varrho-i\varepsilon' b_\varrho)\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\Big)\Big\}$$

auf eine passende Form bringen.

Wir betrachten zunächst den Theil, welcher die Grössen ε_ϱ' nicht enthält; wegen $|\lambda_\sigma\mu|+|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma|-|\varkappa_\varrho\mu|\equiv 0\,(\mathrm{mod.}\,2)$ wird derselbe:

$$\sum_{\varrho=1,2,3}(a_\varrho^2+b_\varrho^2)\sum_{\sigma=1,2,3}\vartheta^2_{\varkappa_\varrho\lambda\mu}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}.$$

Als Function von u_1, u_2 kann man den vorstehenden Ausdruck schreiben

$$\sum_{\varrho'=1,2,3,4}\mathfrak{A}_{\varrho'}\vartheta^2(u_1,\ u_2)_{\mu\varkappa_{\varrho'}}.$$

Setzen wir jetzt für u_1, u_2 das zum Index $\varkappa_{\varrho'}$ gehörige System simultaner Halbperioden, so erhalten wir

$$\mathfrak{A}_{\varrho'}\vartheta_\mu^2=\sum_{\varrho=1,2,3}(a_\varrho^2+b_\varrho^2)\sum_{\sigma=1,2,3}(-1)^{\varkappa_{\varrho'}|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma+|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}\mu\lambda_\sigma|}\vartheta^2_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta^2(u_1',\ u_2')_{\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}\mu\lambda_\sigma}$$
$$=-\sum_{\varrho=1,2,3}(-1)^{|\varkappa_{\varrho'}\mu\varkappa_\varrho|+|\varkappa_{\varrho'}\mu|}(a_\varrho^2+b_\varrho^2)\sum_{\sigma=1,2,3}(-1)^{\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta^2_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta^2(u_1',\ u_2')_{\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}\mu\lambda_\sigma}$$
$$=-\sum_{\varrho=1,2,3}(-1)^{|\varkappa_{\varrho'}\mu\varkappa_\varrho|+|\varkappa_{\varrho'}\mu|}(a_\varrho^2+b_\varrho^2)\vartheta_\mu^2\vartheta^2(u_1',\ u_2')_{\mu\varkappa_{\varrho'}}.$$

Ist zunächst $\varrho' = 4$, so erhalten wir

$$\mathfrak{A}_4 = 2\vartheta^2(u_1', u_2');$$

wird ϱ' dagegen gleich irgend einem ϱ von 1, 2, 3, so ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_\varrho &= (-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}\{a_{\varrho'}^2+b_{\varrho'}^2+a_{\varrho''}^2+b_{\varrho''}^2-(a_\varrho^2+b_\varrho^2)\}\,\vartheta^2(u_1', u_2')_{\mu\varkappa_\varrho}\\ &= (-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}\,2c_\varrho^2\vartheta^2(u_1', u_2')_{\mu\varkappa_\varrho}.\end{aligned}$$

Auf diese Weise ergiebt sich für die in Frage stehende Summe

$$2\{\vartheta^2(u_1', u_2')\vartheta^2(u_1, u_2)+\sum_{\varrho=1,2,3}(-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}c_\varrho^2\vartheta^2(u_1', u_2')_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta^2(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\}.$$

Ausser dem eben besprochenen Bestandtheil kommen in dem zu transformirenden Ausdrucke Glieder von folgender Form vor:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_\varrho'\varepsilon_{\varrho'}'(a_\varrho+i\varepsilon' b_\varrho)(a_{\varrho'}-i\varepsilon' b_{\varrho'})i^{-|\varkappa_\varrho\mu|-|\varkappa_{\varrho'}\mu|}\\ \times\sum_{\sigma=1,2,3}&(-1)^{\lambda_\sigma\mu|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}+|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma|+|\mu\lambda_\sigma|}\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\\ &+\varepsilon_\varrho'\varepsilon_{\varrho'}'(a_\varrho-i\varepsilon' b_\varrho)(a_{\varrho'}+i\varepsilon' b_{\varrho'})i^{-|\varkappa_\varrho\mu|-|\varkappa_{\varrho'}\mu|}\\ \times\sum_{\sigma=1,2,3}&(-1)^{\lambda_\sigma\mu|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}+|\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma|+|\mu\lambda_\sigma|}\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu},\end{aligned}$$

wo ϱ, ϱ' zwei beliebige von einander verschiedene Grössen aus der Reihe 1, 2, 3 sein sollen; die noch übrig bleibende dieser Grössen möge ϱ'' sein. Dann können wir stets annehmen, dass ϱ, ϱ', ϱ'' eine cyklische Vertauschung von 1, 2, 3 darstellen. Es wird also

$$\begin{aligned}&\varepsilon_\varrho'\varepsilon_{\varrho'}'(a_\varrho+i\varepsilon' b_\varrho)(a_{\varrho'}-i\varepsilon' b_{\varrho'})i^{-|\varkappa_\varrho\mu|-|\varkappa_{\varrho'}\mu|}\\ =\;&-\varepsilon_\varrho'\varepsilon_{\varrho'}'c_\varrho c_{\varrho'}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|-|\varkappa_{\varrho'}\mu|}+(-1)^{\varkappa_{\varrho'}\varkappa_{\varrho''}|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho''}}\varepsilon_{\varrho''}'c_{\varrho''}i^{-|\varkappa_{\varrho''}\mu|}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\varepsilon_\varrho'\varepsilon_{\varrho'}'(a_\varrho-i\varepsilon' b_\varrho)(a_{\varrho'}+i\varepsilon' b_{\varrho'})i^{-|\varkappa_\varrho\mu|-|\varkappa_{\varrho'}\mu|}\\ =\;&-\varepsilon_\varrho'\varepsilon_{\varrho'}'c_\varrho c_{\varrho'}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|-|\varkappa_{\varrho'}\mu|}-(-1)^{\varkappa_{\varrho'}\varkappa_{\varrho''}|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho''}}\varepsilon_{\varrho''}'c_{\varrho''}i^{-|\varkappa_{\varrho''}\mu|}.\end{aligned}$$

In Folge dessen kann der in Frage stehende Ausdruck geschrieben werden

$$\begin{aligned}&-\varepsilon_\varrho'\varepsilon_{\varrho'}'c_\varrho c_{\varrho'}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|-|\varkappa_{\varrho'}\mu|}\sum_{\sigma=1,2,3}(-1)^{\lambda_\sigma\mu|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}}\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\\ &\qquad\times\{(-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}\vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\\ &\qquad+(-1)^{|\varkappa_{\varrho'}\mu|}\vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\}\\ &+\varepsilon_{\varrho'}'c_{\varrho''}i^{-|\varkappa_{\varrho''}\mu|}(-1)^{\varkappa_{\varrho'}\varkappa_{\varrho''}|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho''}}\sum_{\sigma=1,2,3}(-1)^{\lambda_\sigma\mu|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}}\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\\ &\qquad\times\{(-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}\vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\\ &\qquad-(-1)^{|\varkappa_{\varrho'}\mu|}\vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1-u_1', u_2-u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\}.\end{aligned}$$

Die erste der beiden hier auftretenden Summen ist bezüglich u_1, u_2 gerade oder ungerade, je nachdem $|\varkappa_\varrho\mu|+|\varkappa_{\varrho'}\mu|$ congruent 0 oder 1 ist; wir dürfen sie daher setzen

$$\mathfrak{A}\,\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_{\varrho'}\mu}+\mathfrak{B}\,\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\lambda}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda},$$

wo λ irgend einen der drei Indices λ_1, λ_2, λ_3 bezeichnet. Wir bestimmen zunächst $\mathfrak{B}$. Indem wir $u_\alpha = \omega_\mu^\alpha$ setzen, erhalten wir

$$\mathfrak{B}\,i^{\mu;\ \varkappa_\varrho\lambda+\mu;\ \varkappa_{\varrho'}\lambda}\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda\mu}\vartheta_{\varkappa_{\varrho'}\lambda\mu}$$

$$= 2(-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|+|\varkappa_{\varrho'}\mu|+\mu|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}}\sum_{\sigma=1,2,3}(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}+|\lambda_\sigma\mu|}\,i^{\mu;\ \varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu+\mu;\ \varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}$$

$$\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}$$

$$= 2\sum_{\sigma=1,2,3}(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}+|\lambda_\sigma\mu|}\,i^{\mu;\ \varkappa_\varrho\lambda_\sigma+\mu;\ \varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}.$$

Aus der Thatsache, dass die drei von uns γ_σ genannten Grössen der Bedingung

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2 = 1$$

genügen, folgt aber die Formel:

$$(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_{\varrho'}\mu}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\mu}$$

$$=\sum_{\sigma=1,2,3}(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}+|\lambda_\sigma\mu|}\,\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma},$$

welche für $u_\alpha = \omega_\mu^\alpha$ übergeht in:

$$0 = \Sigma(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}+|\lambda_\sigma\mu|}\,i^{\mu;\ \varkappa_\varrho\lambda_\sigma+\mu;\ \varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}.$$

Es ist demnach $\mathfrak{B}$ gleich Null. Wegen der Symmetrie bezüglich der Werthepaare u_1, u_2 und u_1', u_2' kann man also schreiben:

$$\sum_{\sigma=1,2,3}(-1)^{\lambda_\sigma\mu|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}}\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}$$

$$\times\{(-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}$$

$$+(-1)^{|\varkappa_{\varrho'}\mu|}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\}$$

$$= m\,\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_{\varrho'}\mu}.$$

Hierin setzen wir $u_\alpha = \omega_{\lambda_\sigma}^\alpha$, $u_\alpha' = \omega_{\lambda_{\sigma'}}^\alpha$; dann wird links das Glied mit σ'' gleich Null; die beiden anderen werden einander gleich, und wir erhalten

$$m = -4(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}}.$$

Indem wir jetzt in der soeben bewiesenen Gleichung

$$+4(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_{\varrho'}\mu}$$

$$= -\sum_{\sigma=1,2,3}(-1)^{\lambda_\sigma\mu|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}}\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}$$

$$\times\{(-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}$$

$$+(-1)^{|\varkappa_{\varrho'}\mu|}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\}$$

die beiden Werthepaare u_a, u_a' um die Periode $\omega^a_{\varkappa_\varrho\mu}$ vermehren, erhalten wir eine andere Gleichung:

$$4(-1)^{\mu|\varkappa_{\varrho''}}\vartheta(u_1',\ u_2')\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_{\varrho''}\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_{\varrho''}\mu}$$

$$= +(-1)^{\varkappa_{\varrho'}\varkappa_{\varrho''}|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho''}}\sum_{\sigma=1,2,3}(-1)^{\lambda_\sigma\mu|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}}\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}$$

$$\times\{(-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}$$

$$-(-1)^{|\varkappa_{\varrho'}\mu|}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\},$$

welche mit der ersten zusammen für den Ausdruck auf den letzten Zeilen von Seite 232 die einfache Form

$$4(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}}\varepsilon_\varrho'\varepsilon_{\varrho'}'c_\varrho c_{\varrho'}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|-|\varkappa_{\varrho'}\mu|}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_{\varrho'}\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_{\varrho'}\mu}$$

$$+4(-1)^{\mu|\varkappa_{\varrho''}}\varepsilon_{\varrho''}'c_{\varrho''}i^{-|\varkappa_{\varrho''}\mu|}\vartheta(u_1',\ u_2')\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_{\varrho''}\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_{\varrho''}\mu}$$

ergiebt.

Nachdem wir die einzelnen Bestandtheile von

$$\sum_{\sigma=1,2,3}(-1)^{|\lambda_\sigma\mu|}[\sum_{\varrho=1,2,3}\varepsilon_\varrho'(-1)^{\lambda_\sigma\mu|\varkappa_\varrho+|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma|}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}(a_\varrho+i\varepsilon' b_\varrho)\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1+u_1',\ u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}]$$

$$\times[\sum_{\varrho=1,2,3}\varepsilon_\varrho'(-1)^{\lambda_\sigma\mu|\varkappa_\varrho}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}(a_\varrho-i\varepsilon' b_\varrho)\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1-u_1',\ u_2-u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}]$$

umgeformt haben, erhalten wir für diesen Ausdruck selbst den Werth

$$2\{\vartheta(u_1',\ u_2')\vartheta(u_1,\ u_2)+\sum_{\varrho=1,2,3}\varepsilon_\varrho' c_\varrho i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho}\vartheta(u_1',\ u_2')_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\}^2.$$

Demnach ergiebt sich mit den unter (7.) (S. 231) angegebenen Ausdrücken die Formel

$$\sum_{\sigma=1,2,3}(\alpha_\sigma+i\varepsilon\beta_\sigma)(\alpha_\sigma-i\varepsilon\beta_\sigma) = 2S^2.$$

Soll das gleich 2 sein, so muss S^2 einen der Werthe ± 1 haben. Wir dürfen, indem wir u_3 nöthigen Falles um $i\pi$ vermehren, $S=+1$ setzen und erhalten dann zur Bestimmung der Cosinus derjenigen Richtungen, welche mit der durch die Cosinus γ_1, γ_2, γ_3 bestimmten Richtung ein dem ursprüng-

lichen congruentes Axensystem bestimmen, die Gleichungen

$$(8.)\quad \begin{cases} \alpha_\sigma \pm i\varepsilon\beta_\sigma = \varepsilon_\sigma(-1)^{\mu|\lambda_\sigma} i^{|\lambda_\sigma\mu|} \\ \times \dfrac{\sum\limits_{\varrho=1,2,3} \varepsilon'_\varrho(-1)^{\lambda_\sigma\mu|\varkappa_\varrho}(\mp 1)^{|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma|} i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}(a_\varrho \pm i\varepsilon' b_\varrho)\vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1\pm u'_1,\ u_2\pm u'_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}}{\vartheta(u'_1,\ u'_2)\vartheta(u_1,\ u_2)+\sum\limits_{\varrho=1,2,3}\varepsilon'_\varrho c_\varrho i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho}\vartheta(u'_1,\ u'_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}} e^{\pm iu_3}, \\ (\sigma = 1,\ 2,\ 3) \end{cases}$$

in welchen gleichzeitig die oberen oder die unteren Zeichen zu wählen sind.

§ 6.

Der Zusammenhang zwischen den neun Grössen a_ϱ, b_ϱ, c_ϱ einerseits und den Grössen α_σ, β_σ, γ_σ ist insofern reciprok, als sich die zuerst genannten genau in derselben Weise durch die letzteren darstellen lassen, als diese durch jene. Damit die durch die Formeln (3.) dargestellten Grössen γ_1, γ_2, γ_3 der Gleichung

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2 = 1$$

genügen, sobald nur

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2 = 1$$

ist, müssen die folgenden Gleichungen gelten:

$$(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}}\vartheta(u'_1,\ u'_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u'_1,\ u'_2)_{\varkappa_{\varrho'}\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_{\varrho'}\mu}$$
$$-\sum_{\sigma=1,2,3}(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho\varkappa_{\varrho'}+|\lambda_\sigma\mu|}\vartheta(u'_1,\ u'_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u'_1,\ u'_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_{\varrho'}\lambda_\sigma} = 0,$$
$$(\varrho \neq \varrho' = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$$\vartheta^2(u'_1,\ u'_2)\vartheta^2(u_1,\ u_2)-\sum_{\sigma=1,2,3}(-1)^{|\lambda_\sigma\mu|}\vartheta^2(u'_1,\ u'_2)_{\lambda_\sigma\mu}\vartheta^2(u_1,\ u_2)_{\lambda_\sigma\mu}$$
$$+(-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}\{\vartheta^2(u'_1,\ u'_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta^2(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}-\sum_{\sigma=1,2,3}(-1)^{|\lambda_\sigma\mu|}\vartheta^2(u'_1,\ u'_2)_{\lambda_\sigma\varkappa_\varrho}\vartheta^2(u_1,\ u_2)_{\lambda_\sigma\varkappa_\varrho}\} = 0.$$
$$(\varrho = 1,\ 2,\ 3)$$

Mit Hülfe dieser Beziehungen erkennt man unmittelbar die Richtigkeit der folgenden Gleichungen

$$\vartheta(u'_1,\ u'_2)\vartheta(u_1,\ u_2)-\sum_{\sigma=1,2,3}\varepsilon_\sigma\gamma_\sigma i^{|\lambda_\sigma\mu|}(-1)^{\lambda_\sigma|\mu}\vartheta(u'_1,\ u'_2)_{\lambda_\sigma\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\lambda_\sigma\mu}$$
$$= \frac{\vartheta^2(u'_1,\ u'_2)\vartheta^2(u_1,\ u_2)-\sum\limits_{\sigma=1,2,3}(-1)^{|\lambda_\sigma\mu|}\vartheta^2(u'_1,\ u'_2)_{\lambda_\sigma\mu}\vartheta^2(u_1,\ u_2)_{\lambda_\sigma\mu}}{\vartheta(u'_1,\ u'_2)\vartheta(u_1,\ u_2)+\sum\limits_{\varrho=1,2,3}\varepsilon'_\varrho(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}c_\varrho\vartheta(u'_1,\ u'_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}},$$

$$(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho}\vartheta(u'_1,\ u'_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}-\sum_{\sigma=1,2,3}\varepsilon_\sigma\gamma_\sigma i^{|\lambda_\sigma\mu|}(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho}\vartheta(u'_1,\ u'_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}$$
$$= -\varepsilon'_\varrho c_\varrho i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}(-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}\frac{\vartheta^2(u'_1,\ u'_2)\vartheta^2(u_1,\ u_2)-\sum\limits_{\sigma=1,2,3}(-1)^{|\lambda_\sigma\mu|}\vartheta^2(u'_1,\ u'_2)_{\lambda_\sigma\mu}\vartheta^2(u_1,\ u_2)_{\lambda_\sigma\mu}}{\vartheta(u'_1,\ u'_2)\vartheta(u_1,\ u_2)+\sum\limits_{\varrho=1,2,3}\varepsilon'_\varrho(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}c_\varrho\vartheta(u'_1,\ u'_2)_{\mu\varkappa_\varrho}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\mu\varkappa_\varrho}}.$$

Bedenkt man, dass

$$|\lambda_\sigma \mu| + \lambda_\sigma |\mu \equiv \mu|\lambda_\sigma + 1, \pmod 2 \qquad (\sigma = 1, 2, 3)$$

$$|\varkappa_\varrho \mu| + \mu|\varkappa_\varrho \equiv \varkappa_\varrho|\mu + 1, \pmod 2 \qquad (\varrho = 1, 2, 3)$$

$$|\lambda_\sigma \mu| + |\varkappa_\varrho \mu| + \lambda_\sigma|\varkappa_\varrho \equiv \varkappa_\varrho|\lambda_\sigma \pmod 2 \qquad \begin{pmatrix}\varrho = 1, 2, 3\\ \sigma = 1, 2, 3\end{pmatrix}$$

ist, so erhält man hieraus die folgenden Ausdrücke für c_1, c_2, c_3:

$$(9.) \quad \begin{cases} c_\varrho = \varepsilon'_\varrho i^{|\varkappa_\varrho \mu|} \\ \times \dfrac{(-1)^{\varkappa_\varrho|\mu}\vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa_\varrho \mu}\vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho \mu} + \sum\limits_{\sigma=1,2,3} \varepsilon_\sigma (-1)^{\varkappa_\varrho|\lambda_\sigma} i^{-|\lambda_\sigma \mu|}\gamma_\sigma \vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa_\varrho \lambda_\sigma}\vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho \lambda_\sigma}}{\vartheta(u'_1, u'_2)\vartheta(u_1, u_2) + \sum\limits_{\sigma=1,2,3} \varepsilon_\sigma (-1)^{\mu|\lambda_\sigma} i^{-|\lambda_\sigma \mu|}\gamma_\sigma \vartheta(u'_1, u'_2)_{\mu\lambda_\sigma}\vartheta(u_1, u_2)_{\mu\lambda_\sigma}}. \end{cases}$$

Diese Formel geht aus der Formel (3.) dadurch hervor, dass gleichzeitig das Grössensystem c_1, c_2, c_3 mit γ_1, γ_2, γ_3 und das System der $\varkappa_\varrho$ mit dem System der λ_σ vertauscht ist. Da nun aber die beiden Indexsysteme völlig gleichberechtigt sind, so kann man an die neue Formel dieselben Folgerungen knüpfen wie an die Formel (3.). Demnach müssen sich die Grössen $a_\varrho \pm i\varepsilon' b_\varrho$ in folgender Weise darstellen lassen:

$$(10.) \quad \begin{cases} a_\varrho \pm i\varepsilon' b_\varrho = \varepsilon'_\varrho (-1)^{\mu|\varkappa_\varrho} i^{|\varkappa_\varrho \mu|} \\ \times \dfrac{\sum\limits_{\sigma=1,2,3} \varepsilon_\sigma (-1)^{\varkappa_\varrho \mu|\lambda_\sigma} (\mp 1)^{|\varkappa_\varrho \lambda_\sigma|} i^{-|\lambda_\sigma \mu|}(\alpha_\sigma \pm i\varepsilon\beta_\sigma)\vartheta_{\varkappa_\varrho \lambda_\sigma \mu}\vartheta(u_1 \pm u'_1, u_2 \pm u'_2)_{\varkappa_\varrho \lambda_\sigma \mu}}{\vartheta(u'_1, u'_2)\vartheta(u_1, u_2) + \sum\limits_{\sigma=1,2,3} \varepsilon_\sigma \gamma_\sigma i^{-|\lambda_\sigma \mu|}(-1)^{\mu|\lambda_\sigma}\vartheta(u'_1, u'_2)_{\lambda_\sigma \mu}\vartheta(u_1, u_2)_{\lambda_\sigma \mu}} e^{\pm i\bar{u}_3}. \end{cases}$$

Die Grösse $\bar{u}_3$ ist natürlich durch u_3 bestimmt; wir erhalten die Beziehung zwischen beiden, indem wir in Gleichung (10.) die durch (8.) gegebenen Werthe von $\alpha_\sigma \pm i\varepsilon\beta_\sigma$ einsetzen. Aus den beiden ersten Gleichungen dieses Abschnitts erhält man aber, wenn $u'_\alpha = \omega'^\alpha_\mu$, $u_\alpha = \omega^\alpha_\mu + w_\alpha$ gesetzt wird,

$$\sum_{\sigma=1,2,3} (-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho \varkappa_{\varrho'}+|\lambda_\sigma \mu|}\vartheta_{\varkappa_\varrho \lambda_\sigma \mu}\vartheta_{\varkappa_{\varrho'} \lambda_\sigma \mu}\vartheta(w_1, w_2)_{\varkappa_\varrho \lambda_\sigma \mu}\vartheta(w_1, w_2)_{\varkappa_{\varrho'} \lambda_\sigma \mu} = 0,$$

$$\vartheta^2_\mu \vartheta^2(w_1, w_2)_\mu - \sum_{\sigma=1,2,3} (-1)^{|\lambda_\sigma \mu|+|\varkappa_\varrho \mu|}\vartheta^2_{\varkappa_\varrho \lambda_\sigma \mu}\vartheta^2(w_1, w_2)_{\varkappa_\varrho \lambda_\sigma \mu} = 0,$$

so dass

$$(a_\varrho \pm i\varepsilon' b_\varrho) = \frac{(a_\varrho \pm i\varepsilon' b_\varrho)\vartheta^2_\mu \vartheta^2(u_1 \pm u'_1, u_2 \pm u'_2)_\mu e^{\pm i(u_3 + \bar{u}_3)}}{\vartheta^2(u'_1, u'_2)\vartheta^2(u_1, u_2) - \sum\limits_{\sigma=1,2,3} (-1)^{|\lambda_\sigma \mu|}\vartheta^2(u'_1, u'_2)_{\lambda_\sigma \mu}\vartheta^2(u_1, u_2)_{\lambda_\sigma \mu}}$$

wird. Man erkennt nun leicht, dass

$$\vartheta^2(u'_1, u'_2)\vartheta^2(u_1, u_2) - \sum_{\sigma=1,2,3} (-1)^{|\lambda_\sigma \mu|}\vartheta^2(u'_1, u'_2)_{\lambda_\sigma \mu}\vartheta^2(u_1, u_2)_{\lambda_\sigma \mu}$$

$$= \vartheta^2_\mu \vartheta(u_1 + u'_1, u_2 + u'_2)_\mu \vartheta(u_1 - u'_1, u_2 - u'_2)_\mu$$

ist, und erhält schliesslich zwischen u_3 und $\bar{u}_3$ die Beziehung

$$(11.) \qquad e^{i(u_3+\bar{u}_3)} = \frac{\vartheta(u_1-u'_1,\ u_2-u'_2)_\mu}{\vartheta(u_1+u'_1,\ u_2+u'_2)_\mu}.$$

§ 7.

Variirt man in den unter (3.) und (8.) aufgeführten Ausdrücken die Elemente aus welchen dieselben gebildet sind, so erfahren die neun Richtungscosinus $\alpha_\sigma, \beta_\sigma, \gamma_\sigma$ ebenfalls Variationen, d. h. die Axensysteme, welche diese Richtungscosinus bilden, führen eine Drehung gegen einander aus. Wir wollen im Interesse einer leichteren Ausdrucksweise die beiden Axensysteme als das erste und zweite in der Weise unterscheiden, wie es die nachfolgende Tabelle angiebt:

	1. Axe des ersten Systems	2. Axe des ersten Systems	3. Axe des ersten Systems
1. Axe des zweiten Systems	α_1	α_2	α_3
2. - - - -	β_1	β_2	β_2
3. - - - -	γ_1	γ_2	γ_3.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Componenten der Drehung des ersten Systems gegen das zweite zu bestimmen, welche einer gewissen Variation der Argumente entspricht. Wir können diese Drehung aus drei Bestandtheilen zusammensetzen, von denen der erste von der Variation der Argumente u_1, u_2, u_3, der zweite von der Variation der Argumente u'_1, u'_2, und endlich der dritte von der Variation der neun Grössen $a_\varrho, b_\varrho, c_\varrho$ herrührt. Die nach den Axen des ersten Systems genommenen Componenten sollen sein

$$\begin{array}{lll} p_1, & p_2, & p_3, \\ p'_1, & p'_2, & p'_3, \\ p''_1, & p''_2, & p''_3, \end{array}$$

während die nach den Axen des zweiten Systems genommenen Componenten durch

$$\begin{array}{lll} P, & Q, & R, \\ P', & Q', & R', \\ P'', & Q'', & R'' \end{array}$$

bezeichnet werden sollen.

Ist σ, σ', σ'' irgend eine cyklische Permutation der Grössen 1, 2, 3, so muss sein:

$$\frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial u_1}\delta u_1+\frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial u_2}\delta u_2 = \gamma_{\sigma'}p_{\sigma''}-\gamma_{\sigma''}p_{\sigma'}.$$

Nach Gleichung (5.) am Ende des § 3 S. 226 ist aber

$$\frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial u_1}\delta u_1+\frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial u_2}\delta u_2 = -\varepsilon i\left\{\gamma_{\sigma'}\left(\frac{\partial \gamma_{\sigma''}}{\partial u'_1}\delta u_1+\frac{\partial \gamma_{\sigma''}}{\partial u'_2}\delta u_2\right)-\gamma_{\sigma''}\left(\frac{\partial \gamma_{\sigma'}}{\partial u'_1}\delta u_1+\frac{\partial \gamma_{\sigma'}}{\partial u'_2}\delta u_2\right)\right\}.$$

Demnach muss

$$p_\sigma = -\varepsilon i\left(\frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial u'_1}\delta u_1+\frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial u'_2}\delta u_2\right)+\lambda\gamma_\sigma$$

sein. Die Grösse λ hat eine einfache Bedeutung; sie ist

$$\lambda = \sum_{\sigma=1,2,3} p_\sigma\gamma_\sigma = R.$$

Nun hat man aber nach bekannten Regeln (12.)

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\sigma=1,2,3}\alpha_\sigma\left(\frac{\partial \beta_\sigma}{\partial u_1}\delta u_1+\frac{\partial \beta_\sigma}{\partial u_2}\delta u_2+\frac{\partial \beta_\sigma}{\partial u_3}\delta u_3\right)\\ &= \frac{i\varepsilon}{4}\sum_{\sigma=1,2,3}(\alpha_\sigma+i\varepsilon\beta_\sigma)\left\{\frac{\partial(\alpha_\sigma-i\varepsilon\beta_\sigma)}{\partial u_1}\delta u_1+\frac{\partial(\alpha_\sigma-i\varepsilon\beta_\sigma)}{\partial u_2}\delta u_2+\frac{\partial(\alpha_\sigma-i\varepsilon\beta_\sigma)}{\partial u_3}\delta u_3\right\}\\ &\quad -\frac{i\varepsilon}{4}\sum_{\sigma=1,2,3}(\alpha_\sigma-i\varepsilon\beta_\sigma)\left\{\frac{\partial(\alpha_\sigma+i\varepsilon\beta_\sigma)}{\partial u_1}\delta u_1+\frac{\partial(\alpha_\sigma+i\varepsilon\beta_\sigma)}{\partial u_2}\delta u_2+\frac{\partial(\alpha_\sigma+i\varepsilon\beta_\sigma)}{\partial u_3}\delta u_3\right\}. \end{aligned}$$

Wir wollen zur Abkürzung den gemeinschaftlichen Nenner der neun Grössen α_σ, β_σ, γ_σ, d. h. den Ausdruck

$$\vartheta(u'_1,\ u'_2)\vartheta(u_1,\ u_2)+\Sigma(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho}i^{-|\varkappa_\varrho{}^\mu|}\varepsilon'_\varrho c_\varrho\vartheta(u'_1,\ u'_2)_{\varkappa_\varrho{}^\mu}\vartheta(u_1,\ u_2)_{\varkappa_\varrho{}^\mu}$$

gleich N setzen; dann lehrt ein Blick auf die Formel (8.), dass $(\alpha_\sigma+i\varepsilon\beta_\sigma)N$ nur von den Summen $u_1+u'_1$, $u_2+u'_2$, aber nicht von den Differenzen $u_1-u'_1$, $u_2-u'_2$ abhängt, und dass umgekehrt $(\alpha_\sigma-i\varepsilon\beta_\sigma)N$ eine Function von $u_1-u'_1$ und $u_2-u'_2$ ist. Es ist also

$$\frac{\partial(\alpha_\sigma+i\varepsilon\beta_\sigma)N}{\partial u_\alpha} = +\frac{\partial(\alpha_\sigma+i\varepsilon\beta_\sigma)N}{\partial u'_\alpha} \qquad (\alpha=1,\ 2)$$

oder

$$\frac{\partial(\alpha_\sigma+i\varepsilon\beta_\sigma)}{\partial u_\alpha} = \frac{\partial(\alpha_\sigma+i\varepsilon\beta_\sigma)}{\partial u'_\alpha}+\left(\frac{\partial \ln N}{\partial u'_\alpha}-\frac{\partial \ln N}{\partial u_\alpha}\right)(\alpha_\sigma+i\varepsilon\beta_\sigma). \qquad (\alpha=1,\ 2)$$

Ferner ist

$$\frac{\partial(\alpha_\sigma-i\varepsilon\beta_\sigma)}{\partial u_\alpha} = -\frac{\partial(\alpha_\sigma-i\varepsilon\beta_\sigma)}{\partial u'_\alpha}-\left(\frac{\partial \ln N}{\partial u'_\alpha}+\frac{\partial \ln N}{\partial u_\alpha}\right)(\alpha_\sigma-i\varepsilon\beta_\sigma) \qquad (\alpha=1,\ 2)$$

und

$$\frac{\partial(\alpha_\sigma\mp i\varepsilon\beta_\sigma)}{\partial u_3} = \pm i(\alpha_\sigma\pm i\varepsilon\beta_\sigma).$$

Mit Hülfe dieser Formeln erhält man für R den Werth

$$R = -i\varepsilon\Big(\frac{\partial \ln N}{\partial u'_1}\delta u_1 + \frac{\partial \ln N}{\partial u'_2}\delta u_2\Big) + \varepsilon\delta u_3$$

und dann ferner

$$p_\sigma = -\frac{i\varepsilon}{N}\Big\{\frac{\partial \gamma_\sigma N}{\partial u'_1}\delta u_1 + \frac{\partial \gamma_\sigma N}{\partial u'_2}\delta u_2\Big\} + \varepsilon\gamma_\sigma\delta u_3.$$

Bezeichnen wir den Ausdruck

$$-i\varepsilon\Big\{\frac{\partial f(u'_1, u'_2)}{\partial u'_1}\delta u_1 + \frac{\partial f(u'_1, u'_2)}{\partial u'_2}\delta u_2\Big\} + \varepsilon f(u'_1, u'_2)\delta u_3$$

durch $\underset{u}{\delta} f(u'_1, u'_2)$, so können wir die vorstehenden Gleichungen folgendermassen schreiben:

$$(12.)\quad \begin{cases} p_\sigma = \varepsilon_\sigma i^{|\lambda_\sigma \mu|} \\ \times \dfrac{(-1)^{\lambda_\sigma|\mu}\,\vartheta(u_1, u_2)_{\lambda_\sigma\mu}\underset{u}{\delta}\vartheta(u'_1, u'_2)_{\lambda_\sigma\mu} + \sum\limits_{\varrho=1,2,3}\varepsilon'_\varrho(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho}\, i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\, c_\varrho\,\vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}\underset{u}{\delta}\vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}}{\vartheta(u_1, u_2)\vartheta(u'_1, u'_2) + \sum\limits_{\varrho=1,2,3}\varepsilon'_\varrho(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho}\, i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\, c_\varrho\,\vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa_\varrho\mu}}, \\ (\sigma = 1, 2, 3) \end{cases}$$

$$(13^{a}.)\quad R = \frac{\vartheta(u_1, u_2)\underset{u}{\delta}\vartheta(u'_1, u'_2) + \sum\limits_{\varrho=1,2,3}\varepsilon'_\varrho(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho}\, i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\, c_\varrho\,\vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\underset{u}{\delta}\vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa_\varrho\mu}}{\vartheta(u_1, u_2)\vartheta(u'_1, u'_2) + \sum\limits_{\varrho=1,2,3}\varepsilon'_\varrho(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho}\, i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\, c_\varrho\,\vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}}.$$

Die nach der ersten und zweiten Axe des zweiten Axensystems genommenen Componenten der Geschwindigkeit erhalten wir aus den Formeln

$$P = \sum_{\sigma=1,2,3}\beta_\sigma\Big(\frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial u_1}\delta u_1 + \frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial u_2}\delta u_2\Big),$$

$$Q = -\sum_{\sigma=1,2,3}\alpha_\sigma\Big(\frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial u_1}\delta u_1 + \frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial u_2}\delta u_2\Big),$$

welche wir zusammenfassen in:

$$P \pm i\varepsilon Q = \mp i\varepsilon \sum_{\sigma=1,2,3}(\alpha_\sigma \pm i\varepsilon\beta_\sigma)\Big(\frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial u_1}\delta u_1 + \frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial u_2}\delta u_2\Big).$$

Nach Formel (6.) S. 230 und (8.) S. 235 erhält man, wenn

$$\underset{u}{\delta} f = [\underset{u}{\delta} f(u'_1, u'_2)]_{u'_1 = u'_2 = 0}$$

gesetzt wird,

$$\frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial u_1}\delta u_1 + \frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial u_2}\delta u_2$$

$$= -\tfrac{1}{2}\varepsilon i(\alpha_\sigma - i\varepsilon\beta_\sigma)e^{+iu_3}\frac{\Sigma(-1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}\, i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\,\varepsilon'_\varrho(a_\varrho + i\varepsilon' b_\varrho)\underset{u}{\delta}\vartheta_{\varkappa_\varrho}\vartheta(u_1 + u'_1,\ u_2 + u'_2)_{\varkappa_\varrho}}{N}$$

$$-\tfrac{1}{2}\varepsilon i(\alpha_\sigma + i\varepsilon\beta_\sigma)e^{-iu_3}\frac{\Sigma(+1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}\, i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\,\varepsilon'_\varrho(a_\varrho - i\varepsilon' b_\varrho)\underset{u}{\delta}\vartheta_{\varkappa_\varrho}\vartheta(u_1 - u'_1,\ u_2 - u'_2)_{\varkappa_\varrho}}{N}.$$

Demnach ist

$$(13^{b}.)\quad P\pm i\varepsilon Q=\mp\frac{\sum\limits_{\varrho=1,2,3}(\mp 1)^{|\varkappa_\varrho\mu|}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\varepsilon'_\varrho(a_\varrho\pm i\varepsilon' b_\varrho)\vartheta(u_1\pm u'_1,\,u_2\pm u'_2)_{\varkappa_\varrho}\delta\vartheta_{\varkappa_\varrho}}{\vartheta(u'_1,\,u'_2)\vartheta(u_1,\,u_2)+\Sigma\varepsilon'_\varrho(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}c_\varrho\vartheta(u'_1,\,u'_2)_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1,\,u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}}\,e^{\pm iu_3}.$$

Bei der vollständigen Symmetrie bezüglich der Werthepaare u_1, u_2 und u'_1, u'_2 können die sechs Grössen p'_1, p'_2, p'_3, R', P', Q' aus den durch die Formen (12.) und (13.) gelieferten Werthen unmittelbar durch Vertauschung der Grössenpaare u_1, u_2 und u'_1, u'_2 abgeleitet werden, und brauchen deshalb nicht in extenso aufgeführt zu werden.

Die Drehungscomponenten, welche einer Variation der neun Grössen a_ϱ, b_ϱ, c_ϱ entsprechen, lassen sich am besten ausdrücken, wenn man die durch folgende Gleichungen bestimmten Grössen einführt:

$$\mathfrak{R}=\sum_{\varrho=1,2,3}a_\varrho\delta b_\varrho=\pm\frac{i\varepsilon'}{2}\Sigma(a_\varrho\pm i\varepsilon' b_\varrho)\delta(a_\varrho\mp i\varepsilon' b_\varrho)$$

$$\mathfrak{P}\pm i\varepsilon'\mathfrak{Q}=\mp i\varepsilon'\sum_{\varrho=1,2,3}(a_\varrho\pm i\varepsilon' b_\varrho)\delta c_\varrho;$$

dann wird

$$\delta c_\varrho=+\frac{i\varepsilon'}{2}(\mathfrak{P}+i\varepsilon'\mathfrak{Q})(a_\varrho-i\varepsilon' b_\varrho)-\frac{i\varepsilon'}{2}(\mathfrak{P}-i\varepsilon'\mathfrak{Q})(a_\varrho+i\varepsilon' b_\varrho),$$

$$\delta(a_\varrho\pm i\varepsilon b_\varrho)=\pm i\varepsilon'\mathfrak{R}(a_\varrho\pm i\varepsilon' b_\varrho)\mp i\varepsilon'(\mathfrak{P}\pm i\varepsilon'\mathfrak{Q})c_\varrho.$$

Wir bezeichnen nun die Variationen der α_σ, β_σ, γ_σ, welche von einer Aenderung der Grössen a_ϱ, b_ϱ, c_ϱ herrühren, durch das Zeichen δ'' und schreiben also

$$R''=\pm\frac{i\varepsilon}{2}\Sigma(\alpha_\sigma\pm i\varepsilon\beta_\sigma)\delta''(\alpha_\sigma\mp i\varepsilon\beta_\sigma),$$

wo nach Belieben das obere oder untere Zeichen benutzt werden kann. Das Resultat wird ein Ausdruck von der Form

$$A\mathfrak{R}+B(\mathfrak{P}+i\varepsilon'\mathfrak{Q})+B'(\mathfrak{P}-i\varepsilon'\mathfrak{Q})$$

sein. Den ersten Theil können wir bestimmen, indem wir $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gleich Null annehmen; dann wird $\delta''(a_\varrho\pm i\varepsilon' b_\varrho)=\pm i\varepsilon'\mathfrak{R}(a_\varrho\pm i\varepsilon' b_\varrho)$ und in Folge dessen $\delta''(\alpha_\sigma\pm i\varepsilon\beta_\sigma)=\pm i\varepsilon'\mathfrak{R}(\alpha_\sigma\pm i\varepsilon\beta_\sigma)$. Demnach wird der erste Theil gleich

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\mathfrak{R}\,\Sigma(\alpha_\sigma+i\varepsilon\beta_\sigma)(\alpha_\sigma-i\varepsilon\beta_\sigma)=\varepsilon\varepsilon'\mathfrak{R}.$$

Um den Bestandtheil mit $\mathfrak{P}+i\varepsilon'\mathfrak{Q}$ zu bestimmen, benutzen wir in der Ausgangsformel für R'' die oberen Zeichen. In $\alpha_\sigma-i\varepsilon\beta_\sigma$ kommen nur die Aus-

drücke $a_\varrho - i\varepsilon' b_\varrho$ und c_ϱ vor; die Variationen der ersteren enthalten die Grösse $\mathfrak{P}+i\varepsilon\mathfrak{Q}$ nicht, und können bei Bildung des in Frage stehenden Theiles einfach gleich Null gesetzt werden. Die Grössen c_ϱ treten nur in dem gemeinschaftlichen Nenner auf. Bezeichnen wir den Theil der Variation von c_ϱ, welcher $(\mathfrak{P}+i\varepsilon'\mathfrak{Q})$ enthält, mit $\bar{\delta}c_\varrho$, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} B(\mathfrak{P}+i\varepsilon'\mathfrak{Q}) &= +\frac{i\varepsilon}{2}\sum_{\sigma=1,2,3}(\alpha_\sigma+i\varepsilon\beta_\sigma)(\alpha_\sigma-i\varepsilon\beta_\sigma)\sum_{\varrho=1,2,3}-\frac{\partial \ln N}{\partial c_\varrho}\bar{\delta}c_\varrho \\ &= -i\varepsilon\sum_{\varrho=1,2,3}\frac{\partial \ln N}{\partial c_\varrho}\bar{\delta}c_\varrho \\ &= +\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}(\mathfrak{P}+i\varepsilon'\mathfrak{Q})\sum_{\varrho=1,2,3}\frac{\partial \ln N}{\partial c_\varrho}(a_\varrho - i\varepsilon' b_\varrho). \end{aligned}$$

Auf ganz ähnliche Weise erhält man

$$B'(\mathfrak{P}-i\varepsilon'\mathfrak{Q}) = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}(\mathfrak{P}-i\varepsilon'\mathfrak{Q})\Sigma\frac{\partial \ln N}{\partial c_\varrho}(a_\varrho + i\varepsilon' b_\varrho).$$

Indem wir die drei Theile zusammenziehen, gelangen wir zu der Formel

$$R'' = \varepsilon\varepsilon'\Big(\Re+\sum_{\varrho=1,2,3}\frac{\partial \ln N}{\partial c_\varrho}(\mathfrak{P}a_\varrho+\mathfrak{Q}b_\varrho)\Big)$$

oder, wenn wir

$$\mathfrak{P}a_\varrho+\mathfrak{Q}b_\varrho+\Re c_\varrho = \mathfrak{p}_\varrho$$

setzen,

$$(14^{a}.)\quad R'' = \varepsilon\varepsilon'\,\frac{\Re\vartheta(u_1', u_2')\vartheta(u_1, u_2)+\sum_{\varrho=1,2,3}\varepsilon_\varrho'(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\mathfrak{p}_\varrho\vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}}{\vartheta(u_1', u_2')\vartheta(u_1, u_2)+\sum_{\varrho=1,2,3}\varepsilon_\varrho'(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho}i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}c_\varrho\vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa_\varrho\mu}\vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}}.$$

Um $P''\pm i\varepsilon Q''$ zu bestimmen, gehen wir aus von der Gleichung

$$P''\pm i\varepsilon Q'' = \mp i\varepsilon\Sigma(\alpha_\sigma\pm i\varepsilon\beta_\sigma)\delta''\gamma_\sigma = \pm i\varepsilon\Sigma\gamma_\sigma\delta''(\alpha_\sigma\pm i\varepsilon\beta_\sigma).$$

Das Glied, welches von der Variation des Nenners herrührt, fällt fort. In dem Zähler ist $a_\varrho\pm i\varepsilon' b_\varrho$ nach der Variation zu ersetzen durch

$$\pm i\varepsilon'\Re(a_\varrho\pm i\varepsilon' b_\varrho)\mp i\varepsilon'(\mathfrak{P}\pm i\varepsilon'\mathfrak{Q})c_\varrho.$$

Man erkennt also, dass das mit $\Re$ behaftete Glied von $\delta''(\alpha_\sigma\pm i\varepsilon\beta_\sigma)$ in $\pm i\varepsilon'(\alpha_\sigma\pm i\varepsilon\beta_\sigma)$ übergeht; deshalb muss $\Re$ vollständig aus $P''\pm i\varepsilon Q''$ verschwinden, und diese Grösse selbst den Factor $\mathfrak{P}\pm i\varepsilon'\mathfrak{Q}$ erhalten. Setzen wir nun in leicht verständlicher Abkürzung für die nächste Entwickelung

$$\gamma_\sigma = \frac{1}{N}\{C_\sigma+\sum_{\varrho=1,2,3}\varepsilon_\varrho' c_\varrho i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}C_{\sigma\varkappa_\varrho}\},$$

$$\alpha_\sigma\pm i\varepsilon\beta_\sigma = \frac{1}{N}\sum_{\varrho=1,2,3}\varepsilon_\varrho'(a_\varrho\pm i\varepsilon' b_\varrho)i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}S_{\sigma\varkappa_\varrho},$$

so erhalten wir

$$P'' \pm i\varepsilon Q'' = \varepsilon\varepsilon' \frac{\mathfrak{P} \pm i\varepsilon'\mathfrak{Q}}{N^2} \sum_{\sigma=1,2,3} \{C_\sigma + \Sigma \varepsilon'_\varrho c_\varrho i^{-|x_\varrho \mu|} C_{\sigma x_\varrho}\} \{\sum_\varrho \varepsilon'_\varrho c_\varrho i^{-|x_\varrho \mu|} S_{\sigma x_\varrho}\}.$$

Den vorstehenden Ausdruck können wir zunächst beträchtlich vereinfachen in Folge der Beziehung

$$\Sigma \gamma_\sigma (\alpha_\sigma \pm i\varepsilon\beta_\sigma) = 0,$$

welche für jedes System von Richtungscosinus a_ϱ, b_ϱ, c_ϱ erfüllt ist. Sind zunächst ϱ, ϱ', ϱ'' die drei Zahlen 1, 2, 3 in irgend einer cyklischen Vertauschung, so kann man

$$c_\varrho = 1, \quad a_{\varrho'} = 1, \quad b_{\varrho''} = 1$$

und die sechs übrigen Grössen gleich Null setzen. Das giebt

$$\sum_\sigma \{C_\sigma + \varepsilon'_\varrho i^{-|x_\varrho \mu|} C_{\sigma x_\varrho}\} \{\varepsilon'_{\varrho'} i^{-|x_{\varrho'} \mu|} S_{\sigma x_{\varrho'}} \pm \varepsilon'_{\varrho''} \varepsilon' i i^{-|x_{\varrho''} \mu|} S_{\sigma x_{\varrho''}}\} = 0$$

oder

$$\sum_\sigma \{C_\sigma + \varepsilon'_\varrho i^{-|x_\varrho \mu|} C_{\sigma x_\varrho}\} \{S_{\sigma x_{\varrho'}} \pm \varepsilon'_\varrho i^{-|x_\varrho \mu|} (-1)^{x_{\varrho'} x_{\varrho''} |x_\varrho x_{\varrho''}} S_{\sigma x_{\varrho''}}\} = 0.$$

Dies zerfällt bei der Willkür von ε'_ϱ in zwei Gleichungen:

$$\sum_\sigma C_\sigma S_{\sigma x_{\varrho'}} \pm (-1)^{x_{\varrho'} x_{\varrho''} |x_\varrho x_{\varrho'}} \sum_\sigma C_{\sigma x_\varrho} S_{\sigma x_{\varrho''}} = 0,$$

$$\sum_\sigma C_\sigma S_{\sigma x_{\varrho''}} \pm (-1)^{x_{\varrho'} x_{\varrho''} |x_\varrho x_{\varrho''}} \sum_\sigma C_{\sigma x_\varrho} S_{\sigma x_{\varrho'}} = 0,$$

Mit diesen Beziehungen und ähnlichen, welche hieraus durch cyklische Permutation der Indices ϱ, ϱ', ϱ'' hervorgehen, erhält man zunächst die Gleichung

$$\Sigma C_{\sigma x_{\varrho'}} S_{\sigma x_{\varrho''}} = -\Sigma C_{\sigma x_{\varrho''}} S_{\sigma x_{\varrho'}} \qquad (\varrho' \neq \varrho'' = 1, 2, 3)$$

und dann

$$\sum_\sigma \gamma_\sigma (\alpha_\sigma \pm i\varepsilon\beta_\sigma) = \sum_\varrho c_\varrho (a_\varrho \pm i\varepsilon b_\varrho) (-1)^{-|x_\varrho \mu|} \sum_\sigma C_{\sigma\varrho} S_{\sigma\varrho}.$$

Damit dieses nun für jedes beliebige System von Richtungscosinus gleich Null werde, müssen die drei Ausdrücke $(-1)^{|x_\varrho \mu|} \sum_{\sigma=1,2,3} C_{\sigma\varrho} S_{\sigma\varrho}$ einen gemeinschaftlichen Werth haben, welchen wir mit L bezeichnen wollen. Dann wird

$$P'' \pm i\varepsilon Q'' = \varepsilon\varepsilon' \frac{\mathfrak{P} \pm i\varepsilon'\mathfrak{Q}}{N^2} \left\{L + \sum_{\varrho=1,2,3} \varepsilon'_\varrho c_\varrho i^{-|x_\varrho \mu|} \sum_{\sigma=1,2,3} C_\sigma S_{\sigma\varrho}\right\}.$$

Es können aber die Summen

$$L = (-1)^{|x_\varrho \mu|} \Sigma C_{\sigma\varrho} S_{\sigma\varrho},$$

$$L = \sum_{\sigma=1,2,3} (\pm 1)^{|x_\varrho \lambda_\sigma|} (-1)^{\mu |x_\varrho \lambda_\sigma} \vartheta(u'_1, u'_2)_{x_\varrho \lambda_\sigma} \vartheta(u_1, u_2)_{x_\varrho \lambda_\sigma} \vartheta_{x_\varrho \lambda_\sigma \mu} \vartheta(u_1 \pm u'_1, u_2 \pm u'_2)_{x_\varrho \lambda_\sigma \mu}$$

und

$$\Sigma C_\sigma S_{\sigma\varrho} = -(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho} \Sigma (\pm 1)^{|\varkappa_\varrho \lambda_\sigma|} (-1)^{\varkappa_\varrho|\lambda_\sigma} \times \vartheta(u_1', u_2')_{\mu\lambda_\sigma} \vartheta(u_1, u_2)_{\mu\lambda_\sigma} \vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu} \vartheta(u_1 \pm u_1', u_2 \pm u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}$$

beträchtlich vereinfacht werden. Zunächst kann man den Ausdruck

$$\vartheta_\mu \vartheta(u_1, u_2) \vartheta(u_1', u_2') \vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_\mu,$$

insofern er eine Function von u ist, schreiben:

$$\sum_{\sigma=1,2,3} A_\sigma \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma} \vartheta(u_1+u_1', u_2+u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}.$$

Setzen wir hierin für u_1, u_2 die Halbperiode $\omega_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}$, so erhalten wir

$$A_\sigma = \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma} \vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu} i^{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu;\mu-\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu;\varkappa_\varrho\lambda_\sigma-|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu|}$$

oder

$$A_\sigma = (-1)^{\mu|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma} \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma} \vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}.$$

Daraus folgt unmittelbar die Gleichung

$$\vartheta_\mu \vartheta(u_1', u_2') \vartheta(u_1, u_2) \vartheta(u_1 \pm u_1', u_2 \pm u_2')_\mu = \sum_{\sigma=1,2,3} (\pm 1)^{|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma|} (-1)^{\mu|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma} \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma} \vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu} \vartheta(u_1 \pm u_1', u_2 \pm u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu},$$

deren rechte Seite gerade gleich L ist. Vermehren wir hierin u um $+\omega_{\varkappa_\varrho\mu}$ und u' um $\mp\omega_{\varkappa_\varrho\mu}$, so erhalten wir die Gleichung

$$\vartheta_\mu \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa_\varrho\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\mu} \vartheta(u_1 \pm u_1', u_2 \pm u_2')_\mu = -\Sigma (-1)^{\varkappa_\varrho|\lambda_\sigma} (\pm 1)^{|\varkappa_\varrho\lambda_\sigma|} \vartheta(u_1', u_2')_{\lambda_\sigma\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{\lambda_\sigma\mu} \vartheta_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu} \vartheta(u_1 \pm u_1', u_2 \pm u_2')_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma\mu}.$$

Demnach ergiebt sich

$$P'' \pm i\varepsilon Q'' = \varepsilon\varepsilon' \frac{\mathfrak{P} \pm i\varepsilon'\mathfrak{Q}}{N} \vartheta_\mu \vartheta(u_1 \pm u_1', u_2 \pm u_2')_\mu$$

oder ausführlicher geschrieben

$$(14^b.) \quad \begin{cases} P'' \pm i\varepsilon Q'' = \varepsilon\varepsilon'(\mathfrak{P} \pm i\varepsilon'\mathfrak{Q}) \\ \times \dfrac{\vartheta_\mu \vartheta(u_1 \pm u_1', u_2 \pm u_2')_\mu}{\vartheta(u_1', u_2')\vartheta(u_1, u_2) + \sum\limits_{\varrho=1,2,3} \varepsilon_\varrho' c_\varrho i^{-|\varkappa_\varrho\mu|} (-1)^{\mu|\varkappa_\varrho} \vartheta(u_1', u_2')_{\varkappa_\varrho\mu} \vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}}. \end{cases}$$

Aus R'', P'' und Q'' erhält man die Grössen p_σ'' vermittelst der Formeln

$$p_\sigma'' = R''\gamma_\sigma + \tfrac{1}{2}(P'' + i\varepsilon Q'')(\alpha_\sigma - i\varepsilon\beta_\sigma) + \tfrac{1}{2}(P'' - i\varepsilon Q'')(\alpha_\sigma + i\varepsilon\beta_\sigma).$$

Da mir eine nennenswerthe Vereinfachung des Resultats bisher nicht geglückt ist, so ist es nicht nöthig dasselbe in extenso aufzuführen. Dagegen soll eine andere Formel mitgetheilt werden, welche für die hydrodynamischen Aufgaben von Wichtigkeit ist.

Um die fortschreitende Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit zu bestimmen, muss man in den beiden oben erwähnten Fällen, welche sich durch Thetafunctionen darstellen lassen, den Ausdruck

$$\sum_{\sigma=1,2,3} \gamma_\sigma \left\{ \frac{\partial p_\sigma}{\partial u_1'} \delta u_1' + \frac{\partial p_\sigma}{\partial u_2'} \delta u_2' + \sum_\varrho \frac{\partial p_\sigma}{\partial c_\varrho} \delta c_\varrho \right\}$$

oder kürzer $\sum_\sigma \gamma_\sigma \delta' p_\sigma$ auf die Form $\delta U = \frac{\partial U}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial U}{\partial u_2} \delta u_2 + \frac{\partial U}{\partial u_3} \delta u_3$ bringen. Diese Aufgabe lässt sich allgemein lösen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
\sum_\sigma \gamma_\sigma \delta' p_\sigma &= \delta'(\Sigma p_\sigma \gamma_\sigma) - \Sigma p_\sigma \delta' \gamma_\sigma \\
&= \frac{i\varepsilon}{2} \delta' \Sigma (\alpha_\sigma + i\varepsilon\beta_\sigma)\delta(\alpha_\sigma - i\varepsilon\beta_\sigma) - \Sigma p_\sigma \delta' \gamma_\sigma \\
&= \frac{i\varepsilon}{2} \delta \{ \Sigma (\alpha_\sigma + i\varepsilon\beta_\sigma)\delta'(\alpha_\sigma - i\varepsilon\beta_\sigma) \} - \frac{i\varepsilon}{2} \Sigma \delta(\alpha_\sigma + i\varepsilon\beta_\sigma)\delta'(\alpha_\sigma - i\varepsilon\beta_\sigma) \\
&\quad + \frac{i\varepsilon}{2} \Sigma \delta'(\alpha_\sigma + i\varepsilon\beta_\sigma)\delta(\alpha_\sigma - i\varepsilon\beta_\sigma) - \Sigma p_\sigma \delta' \gamma_\sigma \\
&= \frac{i\varepsilon}{2} \delta \{ \sum_\sigma (\alpha_\sigma + i\varepsilon\beta_\sigma)\delta'(\alpha_\sigma - i\varepsilon\beta_\sigma) \} \\
&\quad + \frac{R}{2} \sum_\sigma (\alpha_\sigma + i\varepsilon\beta_\sigma)\delta'(\alpha_\sigma - i\varepsilon\beta_\sigma) - \tfrac{1}{2}(P + i\varepsilon Q) \sum_\sigma \gamma_\sigma \delta'(\alpha_\sigma - i\varepsilon\beta_\sigma) \\
&\quad + \frac{R}{2} \sum_\sigma (\alpha_\sigma - i\varepsilon\beta_\sigma)\delta'(\alpha_\sigma + i\varepsilon\beta_\sigma) - \tfrac{1}{2}(P - i\varepsilon Q) \sum_\sigma \gamma_\sigma \delta'(\alpha_\sigma + i\varepsilon\beta_\sigma) \\
&\quad - \Sigma \{ R\gamma_\sigma + \tfrac{1}{2}(P + i\varepsilon Q)(\alpha_\sigma - i\varepsilon\beta_\sigma) + \tfrac{1}{2}(P - i\varepsilon Q)(\alpha_\sigma + i\varepsilon\beta_\sigma) \} \delta' \gamma_\sigma \\
&= \frac{i\varepsilon}{2} \delta \sum_\sigma (\alpha_\sigma + i\varepsilon\beta_\sigma)\delta'(\alpha_\sigma - i\varepsilon\beta_\sigma) \\
&\quad + \frac{R}{2} \delta' \Sigma \left((\alpha_\sigma + i\varepsilon\beta_\sigma)(\alpha_\sigma - i\varepsilon\beta_\sigma) - \gamma_\sigma^2 \right) - \tfrac{1}{2}(P + i\varepsilon Q)\delta' \Sigma (\alpha_\sigma - i\varepsilon\beta_\sigma)\gamma_\sigma \\
&\qquad - \tfrac{1}{2}(P - i\varepsilon Q)\delta' \Sigma (\alpha_\sigma + i\varepsilon\beta_\sigma)\gamma_\sigma .
\end{aligned}$$

Bis auf das erste werden nun sämmtliche Glieder gleich Null und also erhalten wir, indem wir berücksichtigen, dass

$$\frac{i\varepsilon}{2} \Sigma (\alpha_\sigma + i\varepsilon\beta_\sigma)\delta'(\alpha_\sigma - i\varepsilon\beta_\sigma) = R' + R''$$

ist,

$$(15.) \quad \left\{ \sum_{\sigma=1,2,3} \gamma_\sigma \left(\frac{\partial p_\sigma}{\partial u_1'} \delta u_1' + \frac{\partial p_\sigma}{\partial u_2'} \delta u_2' + \sum_{\varrho=1,2,3} \frac{\partial p_\sigma}{\partial c_\varrho} \delta c_\varrho \right) \right. \\ \left. = \frac{\partial (R' + R'')}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial (R' + R'')}{\partial u_2} \delta u_2 . \right.$$

§ 8.

Aus den eben entwickelten Formeln erhält man nun die Lösungen der oben erwähnten mechanischen Probleme, indem man den Grössen a_ϱ, b_ϱ, c_ϱ, u'_1, u'_2 constante Werthe beilegt und für die Grössen u_1, u_2, u_3 lineare Functionen der Zeit $(a_i t+b_i)$ setzt. Führt man an Stelle von c_1, c_2, c_3 die Grössen $k_\varrho = c_\varrho \frac{\vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa_\varrho \mu}}{\vartheta(u'_1, u'_2)}$ ein, so nimmt γ_σ die Form an:

$$\gamma_\sigma = \varepsilon_\sigma i^{|\lambda_\sigma \mu|} \times \frac{(-1)^{\lambda_\sigma|\mu}\vartheta(u_1, u_2)_{\lambda_\sigma\mu}\frac{\vartheta(u'_1, u'_2)_{\lambda_\sigma\mu}}{\vartheta(u'_1, u'_2)} + \sum_{\varrho=1,2,3}\varepsilon'_\varrho k_\varrho (-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho} i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\frac{\vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}}{\vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa_\varrho\mu}}\vartheta(u_1, u_2)_{\lambda_\sigma\mu}}{\vartheta(u_1, u_2)+\sum\varepsilon'_\varrho k_\varrho(-1)^{\mu|\varkappa_\varrho} i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}}$$

und p_σ wird:

$$p_\sigma = \varepsilon_\sigma i^{|\lambda_\sigma\mu|} \times \frac{(-1)^{\lambda_\sigma|\mu}\frac{\Delta\vartheta(u'_1, u'_2)_{\lambda_\sigma\mu}}{\vartheta(u'_1, u'_2)}\vartheta(u_1, u_2)_{\lambda_\sigma\mu} + \sum_{\varrho=1,2,3}\varepsilon'_\varrho k_\varrho(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho} i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\frac{\Delta\vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa_\varrho\lambda_\sigma}}{\vartheta(u'_1, u'_2)_{\varkappa_\varrho\mu}}\vartheta(u_1, u_2)_{\lambda_\sigma\mu}}{\vartheta(u_1, u_2)+\sum_{\varrho=1,2,3}\varepsilon'_\varrho k_\varrho(-1)^{\lambda_\sigma|\varkappa_\varrho} i^{-|\varkappa_\varrho\mu|}\vartheta(u_1, u_2)_{\varkappa_\varrho\mu}};$$

wo $\Delta f(u'_1, u'_2)$ zur Abkürzung für

$$-i\varepsilon a_1\frac{\partial f(u'_1, u'_2)}{\partial u'_1} - i\varepsilon a_2\frac{\partial f(u'_1, u'_2)}{\partial u'_2} + \varepsilon a_3 f(u'_1, u'_2)$$

gesetzt ist.

Werden nun für die Grössen k_1, k_2, k_3 constante Werthe und für die Grössen u'_1, u'_2 Functionen eines Parameters τ gesetzt, welche der Bedingung genügen, dass $c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$ oder

$$\sum_{\varrho=1,2,3} k_\varrho^2\frac{\vartheta^2(u'_1, u'_2)}{\vartheta^2(u'_1, u'_2)_{\varkappa_\varrho\mu}} = 1$$

ist, so werden die auf einen Index bezüglichen Grössen γ und p, insofern sie Functionen von t sind, homogene lineare Aggregate von vier Functionen dieser Grösse. Legt man nun dem Parameter τ vier verschiedene feste Werthe bei, so wird man für jeden Index σ je vier Grössen γ und p erhalten und es werden sich im allgemeinen die vier Grössen p homogen und linear durch die vier Grössen γ darstellen lassen.

Es gelten aber die Differentialgleichungen

$$\frac{d\gamma_\sigma}{dt} = \gamma_{\sigma'} p_{\sigma''} - \gamma_{\sigma''} p_{\sigma'}$$

und demnach genügt das von den zwölf Grössen γ gebildete Grössensystem einem solchem System von Differentialgleichungen, dass die Ableitung jeder zu einem Index σ gehörenden Grösse eine bilineare Function der beiden anderen Gruppen von Grössen γ ist.

Auf dieser Eigenschaft der Grössen γ, einem System von Differentialgleichungen der beschriebenen Art zu genügen, beruht meines Erachtens die Brauchbarkeit der entwickelten Formeln zur Darstellung verschiedener Bewegungen eines starren Körpers.

Ueber einige Arten singulärer Punkte von Raumcurven.

(Fortsetzung und Schluss der Arbeit aus Heft I dieses Bandes.)

(Von Herrn *Alfred Meder* in Dorpat.)

V.

Projection eines Punktes auf seine Schmiegungs-, rectificirende und Normalebene.

§ 17.

Wir wollen in diesem Abschnitte die schon von *Staudt* und *Wiener* durch geometrische Betrachtungen gefundenen Projectionen eines Punktes einer Raumcurve auf seine Schmiegungs-, rectificirende und Normalebene auf analytischem Wege herleiten. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Art des betrachteten Punktes nach der Bezeichnungsweise von § 15 wieder durch die folgenden Gleichungen definirt:

$$(1.)\qquad x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, \quad x^{(n+1)} \gtrless 0,$$

$$(2.)\qquad A = A' = \cdots = A^{(m)} = 0, \quad A^{(m+1)} \gtrless 0,$$

$$(3.)\qquad \Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(p)} = 0, \quad \Delta^{(p+1)} \gtrless 0,$$

$$(4.)\qquad m \geqq 2n-1, \quad p \geqq 2m-n+1.$$

Es seien für diesen Punkt, den wir als mit dem Coordinatenanfangspunkt zusammenfallend annehmen wollen, die Coordinaten und ihre Ableitungen bis zu einer so hohen Ordnung hinauf eindeutige, endliche und stetige Functionen des Parameters t, dass wir die *Taylor*schen Entwickelungen für dieselben

$$(5.)\qquad \begin{cases} x = x_0' t + x_0'' \dfrac{t^2}{2} + x_0''' \dfrac{t^3}{3!} + \cdots, \\ y = y_0' t + y_0'' \dfrac{t^2}{2} + y_0''' \dfrac{t^3}{3!} + \cdots, \\ z = z_0' t + z_0'' \dfrac{t^2}{2} + z_0''' \dfrac{t^3}{3!} + \cdots, \end{cases}$$

mit einem solchen Gliede abbrechen können, dass alle aus den Coor-

dinaten gebildeten Ausdrücke, die wir gebrauchen, bis zu einer so hohen Ordnung hinauf, als sie in unseren Entwickelungen auftreten, ebenfalls eindeutige, endliche und stetige Functionen von t sind.

Wir müssen nun versuchen, das Coordinatensystem so zu legen, dass in den Reihen (5.) für x, y, z möglichst viele von den ersten Gliedern wegfallen, wir werden sehen, dass dann die Schmiegungs-, rectificirende und Normalebene mit den drei Coordinatenebenen zusammenfallen. Die Coordinaten dieses zweiten Systems seien X, Y, Z und mit den Coordinaten des alten Systems durch die folgenden Transformationsgleichungen verbunden:

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z, \\ Y &= \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z, \\ Z &= \alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 z, \end{aligned}$$

wobei die Determinante aus den Coefficienten α, β, γ gleich $+1$ ist.

Setzt man die Werthe von x, y, z aus den Gleichungen (5.) ein, so erhält man

$$(6.)\qquad \begin{cases} X = \sum\limits_{\nu=1,2,\ldots} (\alpha_1 x_0^{(\nu)}+\beta_1 y_0^{(\nu)}+\gamma_1 z_0^{(\nu)}) \dfrac{t^\nu}{\nu!}, \\ Y = \sum\limits_{\nu=1,2,\ldots} (\alpha_2 x_0^{(\nu)}+\beta_2 y_0^{(\nu)}+\gamma_2 z_0^{(\nu)}) \dfrac{t^\nu}{\nu!}, \\ Z = \sum\limits_{\nu=1,2,\ldots} (\alpha_3 x_0^{(\nu)}+\beta_3 y_0^{(\nu)}+\gamma_3 z_0^{(\nu)}) \dfrac{t^\nu}{\nu!}, \end{cases}$$

wobei die Reihenentwickelungen wiederum für ein so grosses Intervall gelten, dass wir sie mit einem solchen Gliede abbrechen können, dass alle in unseren Betrachtungen vorkommenden Grössen eindeutige, endliche und stetige Functionen von t sind.

Die Axen des neuen Coordinatensystems sind bis auf die Unterscheidung der positiven oder negativen Richtungen vollkommen festgelegt, wenn man zwei Gleichungen von der Form

$$(7.)\qquad \begin{cases} \alpha_1 x_0^{(\lambda)}+\beta_1 y_0^{(\lambda)}+\gamma_1 z_0^{(\lambda)} = 0, \\ \alpha_1 x_0^{(\mu)}+\beta_1 y_0^{(\mu)}+\gamma_1 z_0^{(\mu)} = 0 \end{cases}$$

und eine Gleichung von der Form

$$(8.)\qquad \alpha_2 x_0^{(\nu)}+\beta_2 y_0^{(\nu)}+\gamma_2 z_0^{(\nu)} = 0$$

ansetzt, wobei weder alle λten, noch alle μten, noch alle νten Ableitungen der drei Coordinaten gleich Null sein dürfen und ausserdem mindestens eine der drei folgenden Determinanten von Null verschieden sein muss:

$$(9.)\qquad y_0^{(\lambda)} z_0^{(\mu)}-y_0^{(\mu)} z_0^{(\lambda)},\quad z_0^{(\lambda)} x_0^{(\mu)}-z_0^{(\mu)} x_0^{(\lambda)},\quad x_0^{(\lambda)} y_0^{(\mu)}-x_0^{(\mu)} y_0^{(\lambda)}.$$

Aus den Gleichungen (7.) findet man offenbar, wenn nicht alle Determinanten (9.) verschwinden, das Verhältniss der Richtungscosinus der X-Axe bezogen auf das alte System. Durch die Gleichung (8.) zusammen mit der Relation $\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0$ wird auch das Verhältniss der Richtungscosinus der Y-Axe bestimmt. Nimmt man eine der beiden Richtungen der X-Axe als die positive an und thut dasselbe mit der Y-Axe, so ist das neue Coordinatensystem in der That vollkommen festgelegt, da es mit dem ursprünglichen congruent ist. Welche von den beiden Richtungen der X-Axe und der Y-Axe als die positiven angenommen werden, ist für die folgenden Betrachtungen gleichgültig.

In dem für X aufgestellten Ausdrucke (6.) verschwinden wegen der Bedingung (1.) nachstehende Glieder:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 x_0' &+\beta_1 y_0' &+\gamma_1 z_0' &= 0,\\
\alpha_1 x_0'' &+\beta_1 y_0'' &+\gamma_1 z_0'' &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_1 x_0^{(n)} &+\beta_1 y_0^{(n)} &+\gamma_1 z_0^{(n)} &= 0.
\end{aligned}$$

Aus der Bedingung (2.) folgen nach Satz I (S. 57) die Proportionen:

$$x_0^{(n+1)} : y_0^{(n+1)} : z_0^{(n+1)} = x_0^{(n+2)} : y_0^{(n+2)} : z_0^{(n+2)} = \cdots = x_0^{(m-n+2)} : y_0^{(m-n+2)} : z_0^{(m-n+2)}.$$

Setzt man den folgenden Ausdruck gleich Null:

$$(10.) \qquad \alpha_1 x_0^{(n+1)}+\beta_1 y_0^{(n+1)}+\gamma_1 z_0^{(n+1)} = 0,$$

so besteht also auch das System

$$\begin{aligned}
\alpha_1 x_0^{(n+2)} &+\beta_1 y_0^{(n+2)} &+\gamma_1 z_0^{(n+2)} &= 0,\\
\alpha_1 x_0^{(n+3)} &+\beta_1 y_0^{(n+3)} &+\gamma_1 z_0^{(n+3)} &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_1 x_0^{(m-n+2)} &+\beta_1 y_0^{(m-n+2)} &+\gamma_1 z_0^{(m-n+2)} &= 0.
\end{aligned}$$

Wir setzen zur Bestimmung der X-Axe noch die folgende Gleichung an:

$$(11.) \qquad \alpha_1 x_0^{(m-n+3)}+\beta_1 y_0^{(m-n+3)}+\gamma_1 z_0^{(m-n+3)} = 0.$$

Aus den Bedingungen (1.) und (2.) folgt nach Satz II (S. 59):

$$\Delta_0 = \Delta_0' = \cdots = \Delta_0^{(2m-n+1)} = 0.$$

Die $(2m-n+2)$-te Ableitung von Δ reducirt sich nach § 5 auf die nachstehende Determinante:

$$\Delta_0^{(2m-n+2)} = k_{n+1,m-n+3}^{2m-n+2} \begin{vmatrix} x_0^{(n+1)} & y_0^{(n+1)} & z_0^{(n+1)} \\ x_0^{(m-n+3)} & y_0^{(m-n+3)} & z_0^{(m-n+3)} \\ x_0^{(m-n+4)} & y_0^{(m-n+4)} & z_0^{(m-n+4)} \end{vmatrix}.$$

Ist $\Delta_0^{(2m-n+2)} = 0$, so kommt zu den Gleichungen (10.) und (11.) noch die folgende hinzu:

$$\alpha_1 x_0^{(m-n+4)} + \beta_1 y_0^{(m-n+4)} + \gamma_1 z_0^{(m-n+4)} = 0.$$

Es mögen für einen Punkt der Curve die Gleichungssysteme (1.), (2.) und ausserdem das nachstehende erfüllt sein:

$$\Delta_0 = \Delta_0' = \cdots = \Delta_0^{(q-1)} = 0,$$

und es sei eine Folge derselben das Bestehen der Gleichungen

$$(12.) \quad \begin{cases} \alpha_1 x_0' + \beta_1 y_0' + \gamma_1 z_0' = 0, \\ \alpha_1 x_0'' + \beta_1 y_0'' + \gamma_1 z_0'' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\

drucke (6.) für X die nachstehenden Summanden weg:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 x_0' \quad &+\beta_1 y_0' \quad &+\gamma_1 z_0' \quad &= 0,\\
\alpha_1 x_0'' \quad &+\beta_1 y_0'' \quad &+\gamma_1 z_0'' \quad &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_1 x_0^{(p-m+2)} &+\beta_1 y_0^{(p-m+2)} &+\gamma_1 z_0^{(p-m+2)} &= 0.
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (10.) und (11.), welche die X-Axe bestimmen, folgt

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$$
$$= y_0^{(n+1)} z_0^{(m-n+3)} - y_0^{(m-n+3)} z_0^{(n+1)} : z_0^{(n+1)} x_0^{(m-n+3)} - z_0^{(m-n+3)} x_0^{(n+1)} : x_0^{(n+1)} y_0^{(m-n+3)} - x_0^{(m-n+3)} y_0^{(n+1)}.$$

Die einzelnen Determinanten in diesem Ausdrucke sind jedenfalls nicht alle gleich Null, denn dann wären nach Satz I auch $A^{(m+1)}$, $B^{(m+1)}$, $C^{(m+1)}$ gleich Null, was nach (2.) ausgeschlossen worden ist. Die X-Axe ist also vollkommen bestimmt und für Punkte der Curve ist

$$X = \sum_{\nu=p-m+3,\ldots} (\alpha_1 x_0^{(\nu)} + \beta_1 y_0^{(\nu)} + \gamma_1 z_0^{(\nu)}) \frac{t^\nu}{\nu!},$$

wobei die $(p-m+3)$-te Ableitung einer der drei Coordinaten x, y, z sicher von Null verschieden ist, da sonst $\Delta_0^{(p+1)}$ gleich Null wäre, was der Voraussetzung (3.) widerspricht.

Von den Gliedern in dem Ausdrucke (6.) für Y verschwinden wegen der Bedingung (1.) die folgenden:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 x_0' \quad &+\beta_2 y_0' \quad &+\gamma_2 z_0' \quad &= 0,\\
\alpha_2 x_0'' \quad &+\beta_2 y_0'' \quad &+\gamma_2 z_0'' \quad &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_2 x_0^{(n)} &+\beta_2 y_0^{(n)} &+\gamma_2 z_0^{(n)} &= 0.
\end{aligned}$$

Es muss zur Bestimmung von α_2, β_2, γ_2 noch eine Gleichung angesetzt werden:

$$\alpha_2 x_0^{(n+1)} + \beta_2 y_0^{(n+1)} + \gamma_2 z_0^{(n+1)} = 0.$$

Dann verschwinden infolge der Bedingungsgleichungen (2.) in dem Ausdrucke für Y noch die Summanden

$$\begin{aligned}
\alpha_2 x_0^{(n+2)} \quad &+\beta_2 y_0^{(n+2)} \quad &+\gamma_2 z_0^{(n+2)} \quad &= 0,\\
\alpha_2 x_0^{(n+3)} \quad &+\beta_2 y_0^{(n+3)} \quad &+\gamma_2 z_0^{(n+3)} \quad &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_2 x_0^{(m-n+2)} &+\beta_2 y_0^{(m-n+2)} &+\gamma_2 z_0^{(m-n+2)} &= 0.
\end{aligned}$$

Y nimmt die nachstehende Gestalt an:

$$Y = \sum_{\nu=m-n+3,\ldots} (\alpha_2 x_0^{(\nu)} + \beta_2 y_0^{(\nu)} + \gamma_2 z_0^{(\nu)}) \frac{t^\nu}{\nu!},$$

wobei die $(m-n+3)$-te Ableitung einer der drei Coordinaten x, y, z sicher von Null verschieden ist, da sonst die $(m+1)$-ten Ableitungen von A, B, C gleich Null wären, was der Voraussetzung (2.) widerspricht.

In dem Ausdrucke (6.) für Z fallen wegen der Bedingung (1.) die folgenden Glieder weg:

$$\begin{aligned}
\alpha_3 x_0' + \beta_3 y_0' + \gamma_3 z_0' &= 0,\\
\alpha_3 x_0'' + \beta_3 y_0'' + \gamma_3 z_0'' &= 0,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot&\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot&\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot&\\
\alpha_3 x_0^{(n)} + \beta_3 y_0^{(n)} + \gamma_3 z_0^{(n)} &= 0,
\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$Z = \sum_{\nu=n+1,\ldots} (\alpha_3 x_0^{(\nu)} + \beta_3 y_0^{(\nu)} + \gamma_3 z_0^{(\nu)}) \frac{t^\nu}{\nu!}.$$

In dem neuen Systeme sind also die Coordinaten X, Y, Z durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$(14.) \qquad \begin{cases} X = t^{p-m+3}(a + t(\cdots)), \\ Y = t^{m-n+3}(b + t(\cdots)), \\ Z = t^{n+1}(c + t(\cdots)), \end{cases}$$

wobei $p-m+3 > m-n+3 > n+1$ ist und die numerischen Factoren a, b, c von Null verschieden sind.

§ 18.

Die Gleichungen der Tangente an die Curve (X, Y, Z) sind, wenn man durch ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten derselben bezeichnet:

$$\begin{aligned}
Y'(\xi - X) - X'(\eta - Y) &= 0,\\
Z'(\eta - Y) - Y'(\zeta - Z) &= 0.
\end{aligned}$$

Da der Exponent der niedrigsten vorkommenden Potenz von t in X grösser ist als in Y, und in Y grösser als in Z, so erhält man für $t = 0$, also für die Tangente im Coordinatenanfangspunkt, $\xi = \eta = 0$, d. h. die Tangente ist die Z-Axe.

Die Gleichung der Schmiegungsebene ist

$$\begin{vmatrix} \xi - X & \eta - Y & \zeta - Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man die Werthe

$$X' = t^{p-m+2}(a_1+t(\cdots)), \quad X'' = t^{p-m+1}(a_2+t(\cdots)),$$
$$Y' = t^{m-n+2}(b_1+t(\cdots)), \quad Y'' = t^{m-n+1}(b_2+t(\cdots)),$$
$$Z' = t^{n}(c_1+t(\cdots)), \quad Z'' = t^{n-1}(c_2+t(\cdots)),$$

wo a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 von Null verschiedene Constanten sind, in die Gleichung der Schmiegungsebene ein und dividirt dann die zweite Horizontalreihe durch t^n, die dritte durch t^{n-1}, so erhält man

$$\begin{vmatrix} \xi-X & \eta-Y & \zeta-Z \\ t^{p-m-n+2}(a_1+t(\cdots)) & t^{m-2n+2}(b_1+t(\cdots)) & c_1+t(\cdots) \\ t^{p-m-n+2}(a_2+t(\cdots)) & t^{m-2n+2}(b_2+t(\cdots)) & c_2+t(\cdots) \end{vmatrix} = 0.$$

Nach den Gliedern der ersten Horizontalreihe geordnet und durch t^{m-2n+2} dividirt:

$$(\xi-X)\begin{vmatrix} b_1+t(\cdots), & c_1+t(\cdots) \\ b_2+t(\cdots), & c_2+t(\cdots) \end{vmatrix} - (\eta-Y)t^{p-2m+n}\begin{vmatrix} a_1+t(\cdots), & c_1+t(\cdots) \\ a_2+t(\cdots), & c_2+t(\cdots) \end{vmatrix}$$
$$+(\zeta-Z)t^{p-m-n+2}\begin{vmatrix} a_1+t(\cdots), & b_1+t(\cdots) \\ a_2+t(\cdots), & b_2+t(\cdots) \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Exponenten $p-2m+n$ und $p-m-n+2$ nach den Ungleichungen (4.) positiv sind, so erhält man für $t=0$ als Gleichung der Schmiegungsebene im Coordinatenanfangspunkt

$$\xi = 0.$$

Wie wir gefunden haben, ist die Tangente an die Curve im Coordinatenanfangspunkt die Z-Axe, also die Ebene $X=0$ die Schmiegungsebene, $Y=0$ die rectificirende Ebene, $Z=0$ die Normalebene der Curve im Coordinatenanfangspunkt.

Bestehen für einen Punkt einer Raumcurve, der der Coordinatenanfangspunkt sein möge, die Relationen

$$x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, \; x^{(n+1)} \gtrless 0, \quad A = A' = \cdots = A^{(m)} = 0, \; A^{(m+1)} \gtrless 0,$$
$$y' = y'' = \cdots = y^{(n)} = 0, \; y^{(n+1)} \gtrless 0, \quad B = B' = \cdots = B^{(m)} = 0, \; B^{(m+1)} \gtrless 0,$$
$$z' = z'' = \cdots = z^{(n)} = 0, \; z^{(n+1)} \gtrless 0, \quad C = C' = \cdots = C^{(m)} = 0, \; C^{(m+1)} \gtrless 0,$$
$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(p)} = 0, \quad \Delta^{(p+1)} \gtrless 0,$$

so können die Gleichungen der Curve auf die nachstehende Form gebracht werden:

$$X = t^{p-m+3}(a+t(\cdots)),$$
$$Y = t^{m-n+3}(b+t(\cdots)),$$
$$Z = t^{n+1}(c+t(\cdots)),$$

wobei a, b, c von Null verschiedene Constanten bedeuten, und es ist dann die YZ-Ebene die Schmiegungsebene, die ZX-Ebene die rectificirende, die XY-Ebene die Normalebene der Curve im Coordinatenanfangspunkt.

Aus den Ausdrücken (14.) findet man leicht die Projectionen der Curve auf diese drei Ebenen. Für die Projection auf die Schmiegungsebene erhält man z. B.

$$Y = t^{m-n+3}(b+t(\cdots)), \quad Z = t^{n+1}(c+t(\cdots)).$$

Die Tangente an diese Projection ist die Z-Axe. Der Charakter der Projection des Coordinatenanfangspunktes auf seine Schmiegungsebene, also des Coordinatenanfangspunktes in der *YZ*-Ebene, hängt von den niedrigsten in *Y* und *Z* vorkommenden Exponenten von *t* ab. Sind dieselben ungerade, so wechseln die Coordinaten, wenn *t* aus dem negativen ins positive übergeht, also im Coordinatenanfangspunkt ihr Zeichen; sind die Exponenten der niedrigsten Potenzen von *t* dagegen gerade, so behalten sie es. Es können folgende Fälle eintreten:

I. $m-n+3$ ist gerade, $n+1$ ungerade. *Y* behält sein Zeichen, *Z* ändert es. Man erhält einen *regulären Punkt.*

II. $m-n+3$ ist ungerade, $n+1$ gerade. *Y* ändert sein Zeichen, *Z* dagegen nicht. Man erhält eine *Spitze.*

III. $m-n+3$ und $n+1$ sind beide ungerade. *Y* und *Z* ändern ihr Zeichen. Man erhält einen *Wendepunkt.*

IV. $m-n+3$ und $n+1$ sind gerade. *Y* und *Z* behalten ihr Zeichen. Man erhält einen *Schnabelpunkt.*

Für die Projectionen auf die rectificirende und Normalebene lassen sich analoge Betrachtungen anstellen.

Aus den Ausdrücken (14.) für die Coordinaten kann man auch ersehen, ob die Curve die Coordinatenebenen durchdringt oder nicht. Die Curve durchdringt die Schmiegungs-, rectificirende oder Normalebene im Coordinatenanfangspunkt oder nicht, je nachdem die bezw. niedrigsten Exponenten von *t* in den Ausdrücken (14.) für *X, Y, Z* von ungerader oder gerader Ordnung sind, denn im ersten Falle wechseln die Coordinaten ihr Zeichen, im zweiten behalten sie es.

§ 19.

Um die Projectionen des Punktes auf seine Schmiegungs-, rectificirende und Normalebene in jedem einzelnen der acht singulären Fälle zu finden, muss man in den Ausdrücken (14.) *n, m, p* durch ihre in § 15 abgeleiteten Werthe ersetzen.

I. $+++$. $n = 2\alpha$, $p-m+3 = 2\gamma-2\beta+3$ ist ungerade,
$m = 2\beta-1$, $m-n+3 = 2\beta-2\alpha+2$ ist gerade,
$p = 2\gamma-1$, $n+1 = 2\alpha+1$ ist ungerade.

Man erhält als Projection des Coordinatenanfangspunktes auf seine Schmiegungsebene einen regulären Punkt, auf die rectificirende Ebene einen Wendepunkt, auf die Normalebene eine Spitze. Die Curve durchdringt die Schmiegungs- und Normalebene, die rectificirende Ebene dagegen nicht.

Auf diese Weise findet man die schon bekannten Projectionen für jede einzelne der acht Arten von Punkten. Was die Durchdringung der drei Ebenen durch die Curve anbetrifft, so erhält man:

Die Curve durchdringt die Schmiegungsebene in den Fällen

I $+++$, IV $+--$, VI $-+-$, VII $--+$,

die rectificirende Ebene in den Fällen

III $+-+$, IV $+--$, V $-++$, VI $-+-$,

die Normalebene in den Fällen

I $+++$, II $++-$, III $+-+$, IV $+--$.

§ 20.

Ausgehend von den Ausdrücken (14.) kann man auch bestimmen, wie viele auf einander folgende Punkte die Curve im Coordinatenanfangspunkt mit ihrer Schmiegungsebene und Tangente gemein hat. Hat die Curve im Coordinatenanfangspunkt zwei auf einander folgende Punkte mit der YZ-Ebene gemein, so ist $X = X' = 0$, $X'' \gtrless 0$; hat sie drei auf einander folgende Punkte mit dieser Ebene gemein, so muss $X = X' = X'' = 0$, $X''' \gtrless 0$ sein u. s. f. Da für $t = 0$

$$X = X' = \cdots = X^{(p-m+2)} = 0, \quad X^{(p-m+3)} \gtrless 0$$

ist, so hat die Curve mit ihrer Schmiegungsebene $p-m+3$ auf einander folgende Punkte gemein. Die Curve hat also mit ihrer Schmiegungsebene eine ungerade oder gerade Anzahl von auf einander folgenden Punkten gemein, je nachdem sie dieselbe durchdringt oder nicht.

Die Tangente geht, als Durchschnittslinie der Schmiegungs- und rectificirenden Ebene, durch $m-n+3$ auf einander folgende Punkte der Curve, da

$$Y = Y' = \cdots = Y^{(m-n+2)} = 0, \quad Y^{(m-n+3)} \gtrless 0$$

ist. Die Curve hat mit ihrer Tangente eine ungerade oder gerade Anzahl von auf einander folgenden Punkten gemein, je nachdem sie die rectificirende Ebene durchdringt oder nicht.

Bei Einführung eines anderen Parameters τ, der von dem ursprünglichen in folgender Weise abhängig sei:

$$t = \tau^{\alpha},$$

ändert sich auch die Anzahl der auf einander folgenden Punkte, die die Curve mit ihrer Schmiegungsebene oder Tangente gemein hat. Sie bleibt aber gerade oder ungerade, wie sie es früher war, wenn α ungerade ist. Ist α dagegen gerade, so hat die Curve für $\tau = 0$ mit ihrer Schmiegungsebene und Tangente stets eine gerade Anzahl von auf einander folgenden Punkten gemein, wie es sich auch nach § 16 nicht anders erwarten liess, da dann der Punkt in den Fall VIII $---$ übergeführt wird.

VI.

Krümmungs- und Torsionsradius.

§ 21.

Wir wollen in diesem Abschnitte die Ausdrücke für den Krümmungs- und Torsionsradius einer näheren Untersuchung unterziehen und werden dann sehen, dass dieselben in manchen der von uns betrachteten Fälle nicht endlich und dabei von Null verschieden sein können.

Die Art des Punktes sei wieder durch die folgenden Bedingungsgleichungen definirt:

$$x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, \quad x^{(n+1)} \gtrless 0,$$
$$A = A' = \cdots = A^{(m)} = 0, \quad A^{(m+1)} \gtrless 0,$$
$$\Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(p)} = 0, \quad \Delta^{(p+1)} \gtrless 0.$$

Der Krümmungsradius R wird, wenn s' die Ableitung des Bogens bedeutet, durch den Ausdruck

$$R = \frac{s'^3}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

gegeben. Wir betrachten das Quadrat des Krümmungsradius, weil dann das Wurzelzeichen wegfällt:

$$R^2 = \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}{A^2+B^2+C^2}.$$

Die erste nicht verschwindende Ableitung von $x'^2+y'^2+z'^2$ ist die $2n$te, von $(x'^2+y'^2+z'^2)^3$ also die $6n$te, dagegen die erste nicht verschwindende Ableitung des Nenners die $(2m+2)$-te. Nach Satz IV (S. 62) ist also R^2 gleich Null, endlich oder unendlich gross, je nachdem $6n$ grösser, gleich oder kleiner ist als $2m+2$.

$R = 0$, endlich, ∞, je nachdem m kleiner, gleich oder grösser als $3n-1$ ist.

Der Ausdruck für den Torsionsradius lautet

$$T = \frac{A^2+B^2+C^2}{\Delta}.$$

Die erste nicht verschwindende Ableitung des Zählers ist die $(2m+2)$-te, die des Nenners die $(p+1)$-te.

$T=0$, endlich, ∞, je nachdem p kleiner, gleich oder grösser als $2m+1$ ist.

Für die einzelnen acht Arten von Punkten erhalten wir nach § 15:

I. $+++$. $n=2\alpha$, $m=2\beta-1$, $p=2\gamma-1$.

$3n-1=6\alpha-1$, $2m+1=4\beta-1$.

Sowohl $p=2m+1$, als auch $m=3n-1$ ist möglich. R und T können endlich und von Null verschieden sein.

II. $++-$. $n=2\alpha$, $m=2\beta-1$, $p=2\gamma$.

$3n-1=6\alpha-1$, $2m+1=4\beta-1$.

Die Bedingung $p=2m+1$ ist nicht erfüllbar, denn dann müsste $2\gamma=4\beta-1$, also eine gerade Zahl einer ungeraden gleich sein; es kann daher T nicht endlich und dabei von Null verschieden sein.

III. $+-+$. $n=2\alpha$, $m=2\beta$, $p=2\gamma-1$.

$3n-1=6\alpha-1$, $2m+1=4\beta+1$.

R kann nicht endlich und von Null verschieden sein.

IV. $+--$. $n=2\alpha$, $m=2\beta$, $p=2\gamma$.

$3n-1=6\alpha-1$, $2m+1=4\beta+1$.

R und T können beide nicht endlich und dabei von Null verschieden sein.

V. $-++$. $n=2\alpha-1$, $m=2\beta-1$, $p=2\gamma$.

$3n-1=6\alpha-4$, $2m+1=4\beta-1$.

R und T können beide nicht endlich und dabei von Null verschieden sein.

VI. $-+-$. $n=2\alpha-1$, $m=2\beta-1$, $p=2\gamma-1$.

$3n-1=6\alpha-4$, $2m+1=4\beta-1$.

R kann nicht endlich und dabei von Null verschieden sein.

VII. $--+$. $n=2\alpha-1$, $m=2\beta$, $p=2\gamma$.

$3n-1=6\alpha-4$, $2m+1=4\beta+1$.

T kann nicht endlich und dabei von Null verschieden sein.

VIII. $---$. $n = 2\alpha-1, \quad m = 2\beta, \quad p = 2\gamma-1.$

$$3n-1 = 6\alpha-4, \quad 2m+1 = 4\beta+1.$$

R und T können beide endlich und von Null verschieden sein.

Aus diesen Entwickelungen ist Folgendes ersichtlich:

Besitzt ein Punkt der Curve, der kein Rückkehrpunkt ist, eine Rückkehrtangente, so kann in ihm der Krümmungsradius nicht endlich und dabei von Null verschieden sein, besitzt er eine Rückkehrschmiegungsebene, so kann der Torsionsradius nicht endlich und dabei von Null verschieden sein. Ist der Punkt dagegen ein Rückkehrpunkt, so kann der Krümmungsradius nur im Fall einer Rückkehrtangente, der Torsionsradius nur im Fall einer Rückkehrschmiegungsebene endlich und dabei von Null verschieden sein.

VII.

Contingenz- und Torsionswinkel. Andere Arten der Herleitung der analytischen Kriterien für die singulären Punkte.

§ 22.

Der Contingenzwinkel ε und der Torsionswinkel ω sind in einem analytisch sowohl als geometrisch regulären Punkte unendlich klein von derselben Ordnung wie dt. Es soll in diesem Abschnitt untersucht werden, ob und wann sie unendlich klein von höherer Ordnung sein können.

$$\varepsilon = \frac{ds}{R} = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{s'^2}\,dt.$$

$$(1.) \qquad \left(\frac{\varepsilon}{dt}\right)^2 = \frac{A^2+B^2+C^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}.$$

Die Art des Punktes sei wieder durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$(2.) \qquad \begin{cases} x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, & x^{(n+1)} \gtrless 0, \\ A = A' = \cdots = A^{(m)} = 0, & A^{(m+1)} \gtrless 0, \\ \Delta = \Delta' = \cdots = \Delta^{(p)} = 0, & \Delta^{(p+1)} \gtrless 0. \end{cases}$$

Dann ist nach Satz III die erste nicht verschwindende Ableitung des Zählers im Ausdruck (1.) von der Ordnung $2m+2$, des Nenners von der Ordnung $4n$. Nach Satz IV ist der Ausdruck (1.) gleich Null, endlich oder unendlich gross, je nachdem $2m+2$ grösser, gleich oder kleiner ist als $4n$. Nach § 15 ist aber immer $m \geqq 2n-1$, es kann also $\varepsilon : dt$ nicht unendlich gross

sein, der Contingenzwinkel ist immer unendlich klein von mindestens derselben Ordnung, wie das Differential des Parameters.

$$\frac{\varepsilon}{dt} = \begin{cases} 0 \\ \text{endlich,} \end{cases} \text{ je nachdem } m \gtreqless 2n-1.$$

Für den Torsionswinkel ω lässt sich eine ähnliche Betrachtung anstellen:

$$\omega = \frac{ds}{T} = \frac{s'\Delta}{A^2+B^2+C^2}\,dt.$$

$$\text{(3.)} \qquad \left(\frac{\omega}{dt}\right)^2 = \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)\Delta^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

Infolge der Gleichungen (2.) ist nach Satz III die erste nicht verschwindende Ableitung des Zählers in dem Ausdruck (3.) von der Ordnung $2n+2p+2$, des Nenners von der Ordnung $4m+4$. Der Ausdruck (3.) ist nach Satz IV gleich Null, endlich oder unendlich gross, je nachdem $2n+2p+2$ grösser, gleich oder kleiner ist als $4m+4$. Nach § 15 ist immer $p \geqq 2m-n+1$, auch der Torsionswinkel kann nicht unendlich gross sein im Verhältniss zu dt und es ist

$$\frac{\omega}{dt} = \begin{cases} 0 \\ \text{endlich,} \end{cases} \text{ je nachdem } p \gtreqless 2m-n+1.$$

Wir wollen jetzt in jedem einzelnen der acht Fälle untersuchen, ob die Bedingungen

$$m \gtreqless 2n-1, \quad p \gtreqless 2m-n+1$$

immer erfüllbar sind.

I. $+++$. $n = 2\alpha$, $m = 2\beta-1$, $p = 2\gamma-1$.

$2n-1 = 4\alpha-1$, $2m-n+1 = 4\beta-2\alpha-1$.

Sowohl $m \geqq 2n-1$, als auch $p \geqq 2m-n+1$ ist möglich.

II. $++-$. $n = 2\alpha$, $m = 2\beta-1$, $p = 2\gamma$.

$2n-1 = 4\alpha-1$, $2m-n+1 = 4\beta-2\alpha-1$.

Die Erfüllung der Bedingung $p = 2m-n+1$ ist nicht möglich, denn dann müsste $2\gamma = 4\beta-2\alpha-1$, also eine gerade Zahl einer ungeraden gleich sein.

III. $+-+$. $n = 2\alpha$, $m = 2\beta$, $p = 2\gamma-1$.

$2n-1 = 4\alpha-1$, $2m-n+1 = 4\beta-2\alpha+1$.

$m = 2n-1$ ist nicht möglich.

IV. $+--$. $n = 2\alpha$, $m = 2\beta$, $p = 2\gamma$.

$2n-1 = 4\alpha-1$, $2m-n+1 = 4\beta-2\alpha+1$.

Weder $m = 2n-1$, noch $p = 2m-n+1$ ist möglich.

V. $-++$. $n = 2\alpha-1$, $m = 2\beta-1$, $p = 2\gamma$.
$2n-1 = 4\alpha-3$, $2m-n+1 = 4\beta-2\alpha$.

Sowohl $m \geqq 2n-1$, als auch $p \geqq 2m-n+1$ ist möglich.

VI. $-+-$. $n = 2\alpha-1$, $m = 2\beta-1$, $p = 2\gamma-1$.
$2n-1 = 4\alpha-3$, $2m-n+1 = 4\beta-2\alpha$.

$p = 2m-n+1$ ist nicht möglich.

VII. $--+$. $n = 2\alpha-1$, $m = 2\beta$, $p = 2\gamma$.
$2n-1 = 4\alpha-3$, $2m-n+1 = 4\beta-2\alpha+2$.

$m = 2n-1$ ist nicht möglich.

VIII. $---$. $n = 2\alpha-1$, $m = 2\beta$, $p = 2\gamma-1$.
$2n-1 = 4\alpha-3$, $2m-n+1 = 4\beta-2\alpha+2$.

Weder $m = 2n-1$, noch $p = 2m-n+1$ ist möglich.

Die Relation $m = 2n-1$, welche besagt, dass ε unendlich klein ist von derselben Ordnung wie *dt*, kann also nicht bestehen in den Fällen, in denen die Tangente, die Relation $p = 2m-n+1$, welche besagt, dass ω unendlich klein ist von derselben Ordnung wie *dt*, kann nicht bestehen in den Fällen, in denen die Schmiegungsebene ein Rückkehrelement ist.

Aendert die Tangente ihren Drehungssinn, so ist der Contingenzwinkel immer unendlich klein im Verhältniss zu dt, ändert die Schmiegungsebene ihren Drehungssinn, so ist der Torsionswinkel unendlich klein im Verhältniss zu dt. Unendlich klein von derselben Ordnung wie dt können der Contingenz- und der Torsionswinkel nur in den übrigen Fällen sein und zwar ist es der Contingenzwinkel dann und nur dann, wenn m, der Torsionswinkel, wenn p seinen kleinsten möglichen Werth hat: $m = 2n-1$, $p = 2m-n+1$.

Dass bei einer Aenderung des Drehungssinnes der Tangente oder Schmiegungsebene der Contingenz-, resp. Torsionswinkel unendlich klein sein muss im Verhältniss zu *dt*, ist auch aus folgenden geometrischen Betrachtungen ersichtlich.

Zwei auf einander folgende Tangenten bilden mit einander den Contingenzwinkel. Dreht sich die Tangente immer in demselben Sinne, so muss der Contingenzwinkel, von der positiven Seite der Schmiegungsebene aus betrachtet, von constantem Zeichen, etwa positiv sein. Dreht sich die Tangente im entgegensetzten Sinne, so ist der Contingenzwinkel negativ. Kehrt die Tangente in einem Punkte der Curve ihren Drehungssinn um, so

geht der Contingenzwinkel in diesem Punkte aus dem positiven ins negative über. Da man die auf einander folgenden Punkte der Curve erhält, indem man den Parameter t allmählich wachsen lässt, so ist dt von constantem Zeichen. Soll ε aus dem positiven ins negative übergehen, so muss $\varepsilon : dt$ sein Zeichen wechseln, das ist aber nur möglich, wenn $\varepsilon : dt$ verschwindet, da es nie unendlich gross werden kann.

Zwei auf einander folgende Schmiegungsebenen schliessen den Torsionswinkel ein. Dreht sich die Schmiegungsebene immer in demselben Sinne, so behält der Torsionswinkel sein Zeichen, ist etwa positiv. Aendert die Schmiegungsebene in einem Punkte der Curve ihren Drehungssinn, so ändert der Torsionswinkel sein Zeichen, er wird negativ, es muss dann in diesem Punkte auch $\omega : dt$ sein Zeichen wechseln, was nur möglich ist, wenn $\omega : dt$ verschwindet.

§ 23.

Nach diesen Betrachtungen haben wir den Contingenz- und den Torsionswinkel bald als positiv, bald als negativ anzusehen; es müssen also die Quadratwurzeln, die in den Ausdrücken für ε und ω vorkommen, in gewissen Fällen ihr Zeichen wechseln. Diese Annahme wird auch dadurch gerechtfertigt, dass man von ihr ausgehend die Kriterien für die Rückkehrtangente und die Rückkehrschmiegungsebene in einfacher Weise ableiten kann, wie es im Folgenden angedeutet werden soll.

Bei der Rückkehrtangente wechselt der Ausdruck $\varepsilon : dt$ sein Zeichen, er muss also verschwinden und seine erste nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung sein. Setzt man

$$A^2+B^2+C^2 = D^2,$$

so ist

$$\frac{\varepsilon}{dt} = \frac{D}{s'^2} = Ds'^{-2}.$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{dt}\right)^{(r)} = D^{(r)}s'^{-2}+rD^{(r-1)}(s'^{-2})'+\cdots+D(s'^{-2})^{(r)}.$$

Bestehen für den betreffenden Punkt, nach der Bezeichnungsweise von § 15, die Relationen

$$x' = x'' = \cdots = x^{(n)} = 0, \quad x^{(n+1)} \gtrless 0,$$

so ist für denselben auch

$$s' = s'' = \cdots = s^{(n)} = 0, \quad s^{(n+1)} \gtrless 0,$$

$$D = D' = \cdots = D^{(2n-1)} = 0.$$

Durch dieselben Betrachtungen, wie in Abschnitt III, findet man, dass dann die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für

$$\frac{\varepsilon}{dt} = \left(\frac{\varepsilon}{dt}\right)' = \cdots = \left(\frac{\varepsilon}{dt}\right)^{(r)} = 0, \quad \left(\frac{\varepsilon}{dt}\right)^{(r+1)} \gtrless 0$$

die folgenden sind:

$$D = D' = \cdots = D^{(2n+r)} = 0, \quad D^{(2n+r+1)} \gtrless 0.$$

Diese Bedingungen sind dann und nur dann erfüllt, wenn dieselben Ableitungen von A, B, C verschwinden. Im Fall einer Rückkehrtangente ist r gerade, die letzten verschwindenden Ableitungen von A, B, C sind von gerader Ordnung.

Kehrt in einem Punkt der Curve die Schmiegungsebene den Sinn ihrer Drehung um die Tangente um, so muss $\omega : dt$ sein Zeichen wechseln.

$$\frac{\omega}{dt} = \frac{s' \Delta}{A^2+B^2+C^2}.$$

Im Abschnitt IV hatten wir den Ausdruck

$$\xi' = \frac{(yz'-y'z)\Delta}{A^2}$$

betrachtet und es musste derselbe nebst einer geraden Anzahl von auf einander folgenden Ableitungen verschwinden. Es verschwinden offenbar von s' eben so viele Ableitungen, wie von $yz'-y'z$, und von $A^2+B^2+C^2$ eben so viele, wie von A^2; es muss sich daher bei näherer Untersuchung zeigen, dass, wenn eine gewisse Anzahl auf einander folgender Ableitungen von Δ verschwindet, von $\omega : dt$ dieselben Ableitungen gleich Null sind, wie von ξ'. Wir erhalten dasselbe analytische Kriterium für die Rückkehrschmiegungsebene.

Führen wir einen neuen Parameter τ ein, so brauchen $\varepsilon : d\tau$ und $\omega : d\tau$ nicht mit derselben Anzahl von auf einander folgenden Ableitungen zu verschwinden, wie $\varepsilon : dt$ und $\omega : dt$. Nach unseren letzten Betrachtungen muss es sich aber ergeben, dass, wenn vorher eine gerade Anzahl von Ableitungen verschwand, es auch nachher der Fall ist; war dagegen die Anzahl der verschwindenden Ableitungen ungerade, so muss sie es auch nach der Einführung des neuen Parameters sein.

Es sei

$$t = \tau^\alpha,$$

wo α eine positive ganze Zahl ist, dann haben wir

$$\frac{\varepsilon}{d\tau} = \alpha\tau^{\alpha-1}\frac{\varepsilon}{dt}, \quad \frac{\omega}{d\tau} = \alpha\tau^{\alpha-1}\frac{\omega}{dt}.$$

Entspricht der Punkt dem Parameter $t = \tau = 0$ und ist α ungerade, so ist in der That die Anzahl der auf einander folgenden verschwindenden Ableitungen von $\varepsilon : d\tau$ und $\omega : d\tau$ gerade oder ungerade, je nachdem sie von $\varepsilon : dt$ und $\omega : dt$ gerade oder ungerade war. Ist dagegen α eine gerade Zahl, so beginnen die Reihen, in die wir $\varepsilon : dt$ und $\omega : dt$ entwickelt denken können, wenn wir in dieselben τ statt t einführen, immer mit einer geraden Potenz von τ. Die Reihen für $\varepsilon : d\tau$ und $\omega : d\tau$ werden dann immer mit einer ungeraden Potenz von τ anfangen, die ersten nicht verschwindenden Ableitungen von $\varepsilon : d\tau$ und $\omega : d\tau$ sind von ungerader Ordnung, die Singularität des Punktes geht in den Fall VIII. ––– über, wie es auch nach § 16 sein muss.

§ 24.

Wir können auch die analytischen Kriterien für die geometrischen Singularitäten herleiten, ausgehend von der sphärischen Indicatrix und der sphärischen Polare zur sphärischen Indicatrix der Curve.

Construirt man um den Coordinatenanfangspunkt eine Kugel mit dem Radius 1 und zieht zu den Tangenten der Curve Parallele durch den Coordinatenanfangspunkt, so schneiden dieselben auf der Kugel die sphärische Indicatrix der Curve aus, welche stetig verläuft nach unserer Annahme über die positiven und negativen Richtungen der Tangenten (S. 50). Im Fall einer Rückkehrtangente der Curve besitzt die sphärische Indicatrix im entsprechenden Punkt einen Rückkehrpunkt. Die Coordinaten ξ, η, ζ der Punkte der sphärischen Indicatrix sind die Richtungscosinus der Tangenten der betrachteten Curve in den entsprechenden Punkten.

$$\xi = \frac{x'}{s'}, \quad \eta = \frac{y'}{s'}, \quad \zeta = \frac{z'}{s'}.$$

Der Ausdruck

$$\sigma' = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}$$

kann auf die folgende Form gebracht werden:

$$\sigma' = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{s'^2}.$$

Im Falle eines Rückkehrpunktes der sphärischen Indicatrix muss σ' verschwinden, und die erste von Null verschiedene Ableitung von σ von gerader Ordnung sein. Nach § 22 ist aber der Ausdruck für σ' gleich $\varepsilon : dt$, wir erhalten unser früheres Kriterium für die Rückkehrtangente.

Zieht man durch den Coordinatenanfangspunkt Parallele zu den Binormalen der Curve, so schneiden dieselben auf der mit dem Radius 1 um den Coordinatenanfangspunkt construirten Kugel die sphärische Polare zur sphärischen Indicatrix aus, welche ebenfalls nach unserer Annahme über die positiven und negativen Seiten der Schmiegungsebenen (S. 51) stetig verläuft. Kehrt die Schmiegungsebene ihren Drehungssinn um die Tangente um, so besitzt offenbar die sphärische Polare zur sphärischen Indicatrix einen Rückkehrpunkt. Die Coordinaten ξ, η, ζ dieser letzteren sind die Richtungscosinus der Binormalen der ursprünglichen Curve, also

$$\xi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \eta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \zeta = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Der Ausdruck

$$\sigma' = \sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}$$

kann auf die folgende Form gebracht werden:

$$\sigma' = \frac{s'\Delta}{A^2+B^2+C^2}.$$

Im Falle eines Rückkehrpunktes der sphärischen Polare zur sphärischen Indicatrix muss σ' verschwinden und die erste nicht verschwindende Ableitung von σ von gerader Ordnung sein; wir erhalten wieder unser früheres Kriterium für die Rückkehrschmiegungsebene, da σ' gleich dem Ausdruck $\omega : dt$ ist, den wir im vorigen Paragraphen behandelt haben.

Zum Schluss dieser Abhandlung sei es mir gestattet, Herrn Professor Dr. *Adolf Kneser*, der mich zu dieser Arbeit veranlasst hat, meinen Dank zu sagen für die mir während meiner Studienzeit in so reichem Maasse gebotene Anregung und freundliche Unterstützung.

Dorpat, Februar 1895.

Ueber die Reihenentwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen.

(Von Herrn *J. Horn* in Charlottenburg.)

Die *Fuchs*sche Theorie der linearen Differentialgleichungen lehrt die Reihenentwickelung der Integrale einer Differentialgleichung von der Form

$$(A.) \qquad x^n \frac{d^n y}{dx^n} = x^{n-1} g_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + x g_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + g_n(x) y,$$

in welcher $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ in gewöhnliche Potenzreihen von x entwickelbar sind, in der Umgebung der singulären Stelle $x = 0$. Für nicht lineare Differentialgleichungen erster (zum Theil auch zweiter) Ordnung wurden von Herrn *Poincaré* (Journ. de l'Éc. pol. cah. 45) und Herrn *Picard* (Comptes rendus t. 87) verwandte Reihenentwickelungen angegeben; es handelt sich hier um die Entwickelung der für $x = 0$ verschwindenden Integrale der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(B.) \qquad x \frac{dy}{dx} = G(x, y),$$

in welcher

$$G(x, y) = ay + bx + \cdots$$

eine für $x = 0$, $y = 0$ verschwindende, in der Umgebung dieser Stelle reguläre Function von x, y bedeutet, vorausgesetzt, dass der Coefficient a von y einen positiven reellen Theil besitzt. Man kann nun ähnliche Untersuchungen für nicht lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung verlangen, etwa für eine Gleichung von der Form

$$(C.) \qquad x^n \frac{d^n y}{dx^n} = G\left(x, y, x \frac{dy}{dx}, \ldots, x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right),$$

deren rechte Seite

$$G = c_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + c_{n-1} x \frac{dy}{dx} + c_n y + \cdots$$

eine für die Nullwerthe der angegebenen Argumente verschwindende, in

der Umgebung dieser Nullwerthe reguläre Function darstellt. Es lassen sich für die für $x = 0$ verschwindenden Integrale der Differentialgleichung (C.) Reihenentwickelungen aufstellen, welche die bekannten Reihenentwickelungen der Integrale der linearen Differentialgleichung (A.) als Specialfall enthalten, soweit die letzteren für $x = 0$ verschwinden, d. h. soweit die Wurzeln der determinirenden Gleichung positive reelle Theile besitzen.

An Stelle der linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung (A.) kann man ein System von n linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit n abhängigen Veränderlichen setzen von der Form

$$(D.) \qquad x\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_\beta g_{\alpha\beta}(x)y_\beta, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

wo $g_{\alpha\beta}(x)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von x darstellt, ebenso an Stelle der Differentialgleichung (C.) das System

$$(E.) \qquad x\frac{dy_\alpha}{dx} = G_\alpha(x, y_1, \ldots, y_n), \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

worin

$$G_\alpha(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}y_\beta + \cdots$$

eine gewöhnliche Potenzreihe von $x, y_1, \ldots, y_n$ darstellt, welche für $x = 0$, $y_1 = 0, \ldots, y_n = 0$ verschwindet. Mit dem System (E.) beschäftigt sich bereits Herr *Königsberger* in seinem Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen (Kapitel 5, IV), sowie Herr *Picard* im Traité d'Analyse Bd. III S. 1—22*) unter Benutzung der Dissertation des Herrn *Poincaré*. Da dort jedoch nur der einfachste Fall vollständig erledigt wird, so möchte ich im Folgenden die Untersuchung wieder aufnehmen und so weit führen, dass auch die mit Logarithmen behafteten *Fuchs*schen Reihenentwickelungen der für $x = 0$ verschwindenden Integrale der linearen Differentialgleichung (A.) als specielle Fälle der für das System (E.) herzuleitenden Entwickelungen erscheinen.

Setzt man in dem linearen System (D.)

$$g_{\alpha\beta}(0) = a_{\alpha\beta},$$

so hängt, wie ich Math. Ann. Bd. 39 gezeigt habe, die Form der Reihenentwickelungen von den Elementartheilern der Determinante

$$(\delta.) \qquad \Delta(s) = |a_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

ab; der Gleichung $\Delta(s) = 0$ entspricht bei der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung (A.) die determinirende Fundamentalgleichung des Herrn

*) In engerer Verbindung mit letzterer Darstellung steht der später erscheinende dritte Theil der Arbeit, während zunächst an *Königsberger* angeknüpft wird.

Fuchs. Bei dem hier zu untersuchenden System (E.) wird ebenfalls die Determinante

$$(\varepsilon.) \qquad \Delta(s) = |a_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

eingeführt. Hat $\Delta(s)$ lauter einfache Elementartheiler $s-a_1, \ldots, s-a_n$ und sind die reellen Theile von $a_1, \ldots, a_m$ $(m \leqq n)$ positiv, so besitzt das System (E.), wie Herr *Königsberger* a. a. O. gezeigt hat, eine Lösung von der Form

$$y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \ldots, n \\ \lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_m > 0\end{pmatrix}$$

welche von m willkürlichen Constanten abhängt*). Die Gültigkeit dieser Entwickelung ist indessen nicht nur an die Voraussetzung geknüpft, dass keine der Grössen $a_1, \ldots, a_m$ eine ganze positive Zahl ist (*Königsberger* S. 402) und dass keine der Differenzen $a_i - a_k$ $(i, k = 1, \ldots, m)$ eine von Null verschiedene ganze Zahl ist (wie dies sich aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen ergiebt), sondern jene einfache Gestalt der Reihenentwickelung ist im allgemeinen nicht mehr vorhanden, wenn zwischen $a_1, \ldots, a_m$ Beziehungen von der Form

$$a_i = \varrho + \varrho_{i'} a_{i'} + \varrho_{i''} a_{i''} + \cdots$$

bestehen, wo $\varrho, \varrho_{i'}, \varrho_{i''}, \ldots$ ganze positive Zahlen sind. Im Falle solcher Relationen treten im allgemeinen Logarithmen in den Reihenentwickelungen auf; diese haben die Form

$$y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m} (\log x)^{\lambda_1\nu_1+\cdots+\lambda_m\nu_m}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \ldots, n \\ \lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_m > 0\end{pmatrix}$$

wo $\nu_1, \ldots, \nu_m$ ganze positive Zahlen (einschliesslich Null) bedeuten, welche durch die zwischen $a_1, \ldots, a_m$ bestehenden Relationen bedingt sind*).

Nachdem diese Resultate in § 1 und § 2 hergeleitet sind, werden sie in § 3 durch einige Beispiele erläutert und in § 4 für Systeme linearer Differentialgleichungen specialisirt. In § 5 wird die Differentialgleichung $n$ter Ordnung (C.) betrachtet unter der Voraussetzung, dass die der determinirenden Fundamentalgleichung des Herrn *Fuchs* entsprechende Gleichung $n$ten Grades in s

$$(\gamma.) \quad s(s-1)\ldots(s-n+1) = c_1 s(s-1)\ldots(s-n+2) + \cdots + c_{n-1} s + c_n$$

lauter einfache Wurzeln $a_1, \ldots, a_n$ besitzt. Sind die reellen Theile von $a_1, \ldots, a_m$ positiv und bestehen zwischen $a_1, \ldots, a_m$ keine Beziehungen

*) Man sehe den genaueren Ausdruck der Sätze auch für den Fall, dass $a_1, \ldots, a_m$ nicht sämmtlich verschieden sind, in § 1 und § 2.

von der oben angegebenen Form, so besitzt die Differentialgleichung (C.) ein von m willkürlichen Constanten abhängiges Integral von der Gestalt

$$y = \Sigma C_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m},$$

während man eine Reihe

$$y = \Sigma C_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m} (\log x)^{\lambda_1\nu_1+\cdots+\lambda_m\nu_m}$$

erhält, wenn zwischen $a_1, \ldots, a_m$ Beziehungen der bezeichneten Art bestehen, von welchen die ganzen positiven Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_m$ abhängen.

Der Fall mehrfacher Elementartheiler der Determinante ($\varepsilon.$) bezw. mehrfacher Wurzeln der Gleichung ($\gamma.$) wird in einer Fortsetzung der vorliegenden Arbeit behandelt werden.

§ 1.*)

Das Differentialgleichungssystem (E.) kann, wenn die Determinante ($\varepsilon.$) $\Delta(s)$ die n einfachen Elementartheiler $s-a_1, \ldots, s-a_n$ besitzt, durch eine lineare Transformation der Variablen $y_1, \ldots, y_n$ (vergl. Math. Ann. Bd. 39, S. 392, sowie *Weierstrass*' Werke Bd. II S. 75) auf die Form

$$(1.) \qquad x\frac{dy_\alpha}{dx} = a_\alpha y_\alpha + \Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n} x^k y_1^{k_1}\ldots y_n^{k_n} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

gebracht werden, worin für die Indices $k, k_1, \ldots, k_n$ positive ganze Zahlen mit Einschluss der Null zu setzen sind, unter Ausschluss der Werthsysteme $k = k_1 = \cdots = k_n = 0$ und $k = 0,\ k_1+\cdots+k_n = 1$. Die reellen Theile der Grössen $a_1, \ldots, a_m$ seien positiv, diejenigen von $a_{m+1}, \ldots, a_n$ negativ oder Null. Zwischen den Grössen $a_1, \ldots, a_m$, welche wir zunächst als verschieden voraussetzen, soll keine Beziehung von der Form

$$a_i = \varrho + \varrho_{i'} a_{i'} + \varrho_{i''} a_{i''} + \cdots$$

bestehen, in welcher $\varrho, \varrho_{i'}, \varrho_{i''}$ positive ganze Zahlen sind.

Wir suchen das Differentialgleichungssystem (1.) durch ein System von Reihen

$$(2.) \qquad y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

zu befriedigen, worin $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ganze positive Zahlen einschliesslich Null, jedoch unter Ausschluss der Verbindung $\lambda = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$, bedeuten. Wir setzen

$$(3.) \qquad z_1 = x^{a_1}, \quad \ldots, \quad z_m = x^{a_m}$$

*) § 1 stellt im wesentlichen bekannte Resultate mit den für das Folgende erforderlichen Modificationen dar.

und schreiben die Reihe (2.)

$$(4.) \qquad y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m} x^\lambda z_1^{\lambda_1}\dots z_m^{\lambda_m}. \qquad (\alpha = 1, \dots, n)$$

Wir benutzen mitunter die Bezeichnung

$$C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m} = (y_\alpha) x^\lambda z_1^{\lambda_1}\dots z_m^{\lambda_m}.$$

Durch Einsetzen der Reihen (4.) in das Differentialgleichungssystem (1.) und durch Vergleichung der Coefficienten von $x^\lambda z_1^{\lambda_1}\dots z_m^{\lambda_m}$ ergiebt sich die Recursionsformel

$$(5.) \qquad (\lambda+\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_m a_m-a_\alpha) C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m} = \Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1\dots k_n} C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\dots\lambda'_m} C^{(\alpha'')}_{\lambda''\lambda''_1\dots\lambda''_m}\dots;$$

in einem Gliede der auf der rechten Seite stehenden Summe ist die Zahl der mit $A^{(\alpha)}_{kk_1\dots k_n}$ multiplicirten Grössen $C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\dots\lambda'_m}$, $C^{(\alpha'')}_{\lambda''\lambda''_1\dots\lambda''_m}$, ... gleich $k_1+\dots+k_n$, die oberen Indices α', α'', ... sind irgend welche der Zahlen 1, ..., n, und die unteren Indices genügen den Bedingungen

$$\begin{aligned} \lambda' + \lambda'' + \dots &= \lambda - k, \\ \lambda'_1 + \lambda''_1 + \dots &= \lambda_1, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \lambda'_m + \lambda''_m + \dots &= \lambda_m. \end{aligned}$$

Da die Indexverbindungen k, k_1, ..., k_n, für welche $k = 0$, $k_1+\dots+k_n = 1$ ist, ausgeschlossen sind, so ist

$$(\alpha.) \qquad \lambda' \leqq \lambda, \quad \lambda'_1 \leqq \lambda_1, \quad \dots, \quad \lambda'_m \leqq \lambda_m, \quad \lambda'+\lambda'_1+\dots+\lambda'_m < \lambda+\lambda_1+\dots+\lambda_m.$$

Falls $\lambda+\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_m a_m-a_\alpha$ von Null verschieden ist, lässt sich vermittelst der Recursionsformel (5.) $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m}$ durch Grössen $C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\dots\lambda'_m}$ ($\alpha' = 1, \dots, n$) ausdrücken, deren Indices λ', λ'_1, ..., λ'_m die Bedingungen (α.) erfüllen. Für $\lambda_i = 1$, $\lambda = \lambda_1 = \dots = 0$ wird die Gleichung (5.)

$$(a_i - a_\alpha)(y_\alpha)_{z_i} = 0;$$

es ist demnach

$$(y_\alpha)_{z_i} = 0, \qquad (\alpha \leqq i)$$

während

$$(y_i)_{z_i} = C_i \qquad (i = 1, \dots, m)$$

unbestimmt bleibt. Für $\lambda = 1$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ ergiebt sich

$$(y_\alpha)_x = \frac{A^{(\alpha)}_{10\dots0}}{1-a_\alpha}.$$

Für $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m}$ erhält man einen Ausdruck, welcher durch $C_1^{\lambda_1}\dots C_m^{\lambda_m}$ theilbar ist.

Dies gilt zunächst, wie wir oben gesehen haben, für den Fall, dass $\lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_m=1$ ist. Setzt man die Richtigkeit der Behauptung für die Indexsysteme λ', λ'_1, ..., λ'_m voraus, welche die Bedingung (α.) erfüllen, so enthält das auf der rechten Seite der Recursionsformel (5.) auftretende Product $C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m} C^{(\alpha'')}_{\lambda''\lambda''_1\ldots\lambda''_m}\ldots$ den Factor

$$C_1^{\lambda'_1}\ldots C_m^{\lambda'_m}.C_1^{\lambda''_1}\ldots C_m^{\lambda''_m}\ldots = C_1^{\lambda_1}\ldots C_m^{\lambda_m};$$

da hiernach jedes Glied der rechten Seite von (5.) den Factor $C_1^{\lambda_1}\ldots C_m^{\lambda_m}$ enthält, so gilt dies auch von $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$, w. z. b. w.

Dass die so berechnete Reihe (4.) convergirt, wenn die absoluten Beträge von x, z_1, ..., z_m hinreichend klein sind, ergiebt sich folgendermassen. Es lässt sich eine positive Zahl M so angeben, dass

$$|\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m-a_\alpha| > M$$

ist für $\alpha=1, \ldots, n$ und für alle in Betracht kommenden Werthsysteme λ, λ_1, ..., λ_m mit Ausnahme von $\lambda=0$, $\lambda_1+\cdots+\lambda_m=1$. Es sei nämlich

$$a_\alpha = p_\alpha+q_\alpha\sqrt{-1}; \qquad (\alpha=1, \ldots, n)$$

die positiven Grössen 1, p_1, ..., p_m seien sämmtlich kleiner als ϖ, während p_{m+1}, ..., p_n Null oder negativ sind. Für diejenigen Werthsysteme λ, λ_1, ..., λ_m, für welche $\lambda+\lambda_1 p_1+\cdots+\lambda_m p_m > 2\varpi$ ist, ist

$$\begin{aligned}|\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m-a_\alpha| &= \sqrt{(\lambda+\lambda_1 p_1+\cdots+\lambda_m p_m-p_\alpha)^2+(\lambda_1 q_1+\cdots+\lambda_m q_m-q_\alpha)^2}\\ &\geqq \lambda+\lambda_1 p_1+\cdots+\lambda_m p_m-p_\alpha > 2\varpi-\varpi=\varpi.\end{aligned}$$

Der kleinste unter den Werthen in endlicher Anzahl, welche

$$|\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m-a_\alpha|$$

annimmt, wenn $\lambda+\lambda_1 p_1+\cdots+\lambda_m p_m-p_\alpha \leqq \varpi$ ist, sei ϖ', und zwar ist ϖ' von Null verschieden, da die Verbindungen, für welche $\lambda=0$, $\lambda_1+\cdots+\lambda_m=1$ ist, ausgeschlossen sind. Eine Zahl M, welche sowohl kleiner als ϖ wie auch kleiner als ϖ' ist, erfüllt die angegebene Bedingung.

Das System der Gleichungen

$$(6.)\quad \Phi_\alpha(\eta_1, \ldots, \eta_n) = -M\eta_\alpha+M\Gamma_\alpha z_\alpha+\Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n} x^k \eta_1^{k_1}\ldots\eta_n^{k_n} = 0, \qquad (\alpha=1, \ldots, n)$$
$$(k=1,\ k_1+\cdots+k_n=0;\ \ k+k_1+\cdots+k_n>1)$$

wo $|A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n}| = A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n}$ gesetzt ist und Γ_1, ..., Γ_m beliebige positive Zahlen bedeuten, während $\Gamma_{m+1}=\cdots=\Gamma_n=0$ ist, wird, da die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)}{\partial(\eta_1, \ldots, \eta_n)}$$

für $x = 0$, $z_1 = \cdots = z_m = 0$; $\eta_1 = \cdots = \eta_n = 0$ den von Null verschiedenen Werth $(-M)^n$ besitzt, durch ein System von Potenzreihen

$$\eta_\alpha = \Sigma \Gamma^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda z_1^{\lambda_1} \ldots z_m^{\lambda_m} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n) \tag{7.}$$

befriedigt, welche für $x = 0$, $z_1 = \cdots = z_m = 0$ verschwinden und convergent sind, wenn die absoluten Beträge von x, z_1, …, z_m unterhalb gewisser Grenzen liegen. Zur Bestimmung der Coefficienten

$$\Gamma^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \qquad (\lambda = 1,\ \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0;\ \ \lambda + \lambda_1 + \cdots + \lambda_m > 1)$$

dient die Recursionsformel

$$M\Gamma^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} = \Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n} \Gamma^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m} \Gamma^{(\alpha'')}_{\lambda''\lambda''_1\ldots\lambda''_m} \cdots, \tag{8.}$$

deren rechte Seite derjenigen der Formel (5.) entsprechend gebildet ist; unter i eine der Zahlen 1, …, m verstehend, hat man für $\lambda_i = 1$, $\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, …

$$M(\eta_i)_{z_i} = M\Gamma_i,$$

$$M(\eta_\alpha)_{z_i} = 0, \qquad (\alpha \gtrless i)$$

woraus sich ergiebt:

$$(\eta_i)_{z_i} = \Gamma_i, \quad (\eta_\alpha)_{z_i} = 0; \qquad (\alpha \gtrless i)$$

für $k = m+1$, …, n hat man

$$M(\eta_\alpha)_{z_k} = 0,$$

also

$$(\eta_\alpha)_{z_k} = 0.$$

Wenn Γ_i $(i = 1, \ldots, m)$ positiv angenommen ist, ergiebt alsdann die Recursionsformel (8.) für sämmtliche Grössen $\Gamma^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ positive Werthe.

Nimmt man

$$\Gamma_1 \geqq |C_1|, \quad \ldots, \quad \Gamma_m \geqq |C_m|$$

an, so wird, wie die Vergleichung der Recursionsformeln (5.) und (8.) lehrt,

$$|C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}| \leqq \Gamma^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}.$$

Wenn also die Reihe (7.) für $|x| < r$, $|z_1| < r_1$, …, $|z_m| < r_m$ convergirt, so gilt dasselbe für die Reihe (4.).

Da $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ den Factor $C_1^{\lambda_1} \ldots C_m^{\lambda_m}$ enthält, so ergiebt sich, wenn man sämmtliche Constanten C_1, …, C_m mit Ausnahme von C_i gleich Null setzt, für y_α eine Potenzreihe von x und z_i allein

$$y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda,\lambda_i} x^{\lambda + \lambda_i a_i} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

als particuläre Lösung des Differentialgleichungssystems (1.). Durch Nullsetzen sämmtlicher Constanten $C_1, \ldots, C_m$ wird y_α eine Potenzreihe von x.

Während bisher diejenigen der Grössen $a_1, \ldots, a_n$, deren reelle Theile positiv sind, von einander verschieden vorausgesetzt wurden, nehmen wir jetzt an, es seien $s-a_1, \ldots, s-a_n$ immer noch einfache Elementartheiler der Determinante $\Delta(s)$, es sei aber

$$a_{\alpha'} = a' \quad (\alpha' = \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{r'}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{\alpha^{(m)}} = a^{(m)} \quad (\alpha^{(m)} = \alpha_1^{(m)}, \ldots, \alpha_{r^{(m)}}^{(m)});$$

die reellen Theile von $a', \ldots, a^{(m)}$ seien positiv, während a_α einen negativen oder verschwindenden reellen Theil besitze, wenn der Index α keinen der angegebenen Werthe hat. Wir suchen jetzt das Differentialgleichungssystem (1.) durch ein System von Reihen von der Gestalt

$$(2^a.) \qquad y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1\alpha'+\cdots+\lambda_m\alpha^{(m)}} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

zu befriedigen, wo $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ganze positive Zahlen einschliesslich Null bedeuten, unter Ausschluss des Werthsystems $\lambda = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Unter Einführung der Bezeichnung

$$(3^a.) \qquad z_1 = x^{\alpha'}, \quad \ldots, \quad z_m = x^{\alpha^{(m)}}$$

geht die Reihe (2ª.) über in

$$(4^a.) \qquad y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda z_1^{\lambda_1} \ldots z_m^{\lambda_m}. \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

Für die Coefficienten erhält man die Recursionsformel

$$(5^a.) \quad (\lambda+\lambda_1 a'+\cdots+\lambda_m a^{(m)}-a_\alpha) C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} = \Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n} C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda''_1\ldots\lambda''_m} C^{(\alpha'')}_{\lambda''\lambda''_1\ldots\lambda''_m} \ldots,$$

deren rechte Seite wie diejenige von (5.) gebildet ist. Setzt man hierin $\lambda_i = 1$, die übrigen Indices $\lambda, \lambda_1, \ldots$ gleich Null, so erhält man

$$(a^{(i)}-a_\alpha)(y_\alpha)_{z_i} = 0;$$

es wird also $(y_\alpha)_{z_i} = 0$, wenn α keine der Zahlen $\alpha^{(i)}$ ist, dagegen hat man

$$(y_\alpha^{(i)})_{z_i} = C_{\alpha^{(i)}} \quad (\alpha^{(i)} = \alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{r^{(i)}}^{(i)}),$$

wo $C_{\alpha^{(i)}}$ eine willkürliche Constante bedeutet. Durch wiederholte Benutzung der Recursionsformel (5ª.) ergiebt sich $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ als ganze rationale Function der $r'+\cdots+r^{(m)}$ willkürlichen Constanten $C_{\alpha'}, \ldots, C_{\alpha^{(m)}}$, und zwar ist $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ in den $C_{\alpha'}$ homogen von der Dimension λ_1, in den $C_{\alpha''}$ homogen von der Dimension λ_2 u. s. w. Denn für $\lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_m = 1$ ist die Behauptung richtig;

gilt sie für alle Werthsysteme λ', λ_1', ..., λ_m', welche den Bedingungen (α.) genügen, sind also $C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda_1'\ldots\lambda_m'}$, $C^{(\alpha'')}_{\lambda''\lambda_1''\ldots\lambda_m''}$, ... in den $C_{\alpha(i)}$ homogen von den Dimensionen λ_i', λ_i'', ..., so ist $C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda_1'\ldots\lambda_m'} C^{(\alpha'')}_{\lambda''\lambda_1''\ldots\lambda_m''}\ldots$ und demnach jedes Glied der rechten Seite der Formel (5^a.) in den $C_{\alpha(i)}$ homogen von der Dimension $\lambda_i'+\lambda_i''+\cdots=\lambda_i$; dasselbe gilt also auch für $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$. Die Convergenz der Reihe (4^a.) wird wie diejenige der Reihe (4.) unter Benutzung eines Gleichungssystems von der Form (8.) bewiesen, worin Γ_α ($\alpha=\alpha', \ldots, \alpha^{(m)}$) eine positive Zahl ist, während Γ_α für andere Indices α verschwindet, und wo $z_{\alpha'}$ durch $z_1, \ldots, z_{\alpha^{(m)}}$ durch z_m zu ersetzen ist.

Wir können das bisher Bewiesene in den Satz zusammenfassen:

Die aus dem Differentialgleichungssystem

$$x\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_\beta a_{\alpha\beta}y_\beta + \sum A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n}x^k y_1^{k_1}\ldots y_n^{k_n} \qquad (\alpha=1,\ldots,n)$$
$$(k=1,\ k_1=\cdots=k_n=0;\ \ k+k_1+\cdots+k_n>1)$$

gebildete Determinante

$$\Delta(s) = |a_{\alpha\beta}-s\delta_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha,\beta=1,\ldots,n)$$

habe lauter einfache Elementartheiler $s-a_1, \ldots, s-a_n$. *Die Grössen*

$$a_{\alpha'}=a' \ (\alpha'=\alpha_1', \ldots, \alpha_{r'}'), \quad \ldots, \quad a_{\alpha^{(m)}}=a^{(m)} \ (\alpha^{(m)}=\alpha_1^{(m)}, \ldots, \alpha_{r^{(m)}}^{(m)})$$

mögen positive, die übrigen Grössen a_α *negative oder verschwindende reelle Theile besitzen. Zwischen den Grössen* $a', \ldots, a^{(m)}$ *sollen Beziehungen von der Form* $a_i=\varrho+\varrho' a^{(i')}+\varrho'' a^{(i'')}+\cdots$ *mit ganzen positiven Coefficienten* ϱ, ϱ', ϱ'', ... *nicht bestehen. Dann wird dem Differentialgleichungssystem durch ein System von Reihen von der Gestalt*

$$y_\alpha = \sum C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}x^{\lambda+\lambda_1\alpha'+\cdots+\lambda_m\alpha^{(m)}} \qquad (\alpha=1,\ldots,n)$$

genügt, welche von $r'+\cdots+r^{(m)}$ *willkürlichen Constanten abhängen und für hinreichend kleine Werthe von* $|x|$ *convergiren.*

Behufs späterer Verwendung schliessen wir hier noch den Beweis des folgenden Hülfssatzes an:

„Die Reihe

(4'.) $$y_\alpha = \sum C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}x^\lambda z_1^{\lambda_1}\ldots z_m^{\lambda_m} \qquad (\alpha=1,\ldots,n)$$

ist auch dann für hinreichend kleine absolute Beträge von x, $z_1, \ldots, z_m$ convergent, wenn man

$$C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}, \qquad (\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m \leqq \mathfrak{r})$$

wo $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ und $\mathfrak{r}$ beliebige positive Zahlen darstellen, willkürlich wählt

und die Recursionsformel (5.) nur für $\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m > \mathfrak{r}$ benutzt, um

$$C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}, \qquad (\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m > \mathfrak{r})$$

durch die willkürlich angenommenen Grössen ausdrücken."

Wenn man die rechte Seite der Recursionsformel (5.) mit

$$G^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}(C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}\ldots)$$

bezeichnet, genügt die so bestimmte Reihe dem Differentialgleichungssystem

$$(1'.)\quad \begin{cases} x\dfrac{dy_\alpha}{dx} = a_\alpha y_\alpha + \Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n} x^k y_1^{k_1}\ldots y_n^{k_n} \\ \quad + \Sigma[\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m - a_\alpha) C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} - G^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}(C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}\ldots) x^\lambda z_1^{\lambda_1}\ldots z_m^{\lambda_m}, \\ \qquad\qquad (\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m \leqq \mathfrak{r}) \end{cases}$$

worin unter $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ $(\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m \leqq \mathfrak{r})$ die für diese Grössen willkürlich angenommenen Werthe zu setzen sind. Denn für $\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m > \mathfrak{r}$ bleibt die Recursionsformel (5.) unverändert; für $\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m \leqq \mathfrak{r}$ lautet sie:

$$(\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m - a_\alpha)(y_\alpha)_{x^\lambda z_1^{\lambda_1}\ldots z_m^{\lambda_m}} - G^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}((y_{\alpha'})_{x^{\lambda'} z_1^{\lambda'_1}\ldots}\ldots)$$

$$= (\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m - a_\alpha) C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} - G^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}(C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}\ldots);$$

hieraus ergiebt sich

$$(y_\alpha) x^\lambda z_1^{\lambda_1}\ldots z_m^{\lambda_m} = C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m},$$

nachdem sich aus den vorangehenden Recursionsformeln für alle den Bedingungen (α.) genügenden Indexsysteme λ, λ'_1, …, λ'_m

$$(y_\alpha) x^{\lambda'} z_1^{\lambda'_1}\ldots z_m^{\lambda'_m} = C^{(\alpha)}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}$$

ergeben hat, vorausgesetzt, dass die unbestimmt bleibende Grösse $(y_i)_{z_i}$ $(i=1,\ldots,m)$ gleich $C^{(i)}_{0\,0\ldots 1\ldots 0}$ angenommen wurde. Die positiven Grössen $\Gamma^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ $(\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m \leqq \mathfrak{r})$ seien nun so gewählt, dass

$$|C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}| \leqq \Gamma^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \qquad (\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m \leqq \mathfrak{r})$$

ist, und das Gleichungssystem (6.) werde ersetzt durch

$$(6'.)\quad M\eta_\alpha = \Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n} x^k \eta_1^{k_1}\ldots\eta_n^{k_n} + \Sigma[M\Gamma^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} - \mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}(\Gamma^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m})] x^\lambda z_1^{\lambda_1}\ldots z_m^{\lambda_m},$$
$$(\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m \leqq \mathfrak{r})$$

worin gesetzt ist:

$$\Sigma A^{(\alpha)}_{kk_2\ldots k_n}\Gamma^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}\ldots = \mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}(\Gamma^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}\ldots).$$

Dasselbe wird durch ein System von Potenzreihen

$$(7'.) \qquad \eta_\alpha = \Sigma \Gamma^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda z_1^{\lambda_1}\ldots z_m^{\lambda_m} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

befriedigt, welche für hinreichend kleine Werthe von $|x|, |z_1|, \ldots, |z_m|$ convergiren. Für $\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m > \mathfrak{r}$ bleibt die Recursionsformel (8.) bestehen; für $\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots \leqq \mathfrak{r}$ ist dieselbe zu ersetzen durch

$$(8'.) \quad \begin{cases} M(\eta_\alpha) x^\lambda z_1^{\lambda_1}\ldots z_m^{\lambda_m} - \mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}\left((\eta_{\alpha'}) x^{\lambda'} z_1^{\lambda'_1}\ldots z_m^{\lambda'_m}\ldots\right) \\ = M\Gamma^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} - \mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}\left(C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}\ldots\right), \end{cases}$$

woraus sich

$$(\eta_\alpha) x^\lambda z_1^{\lambda_1}\ldots z_m^{\lambda_m} = \Gamma'^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \qquad (\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m \leqq \mathfrak{r})$$

ergiebt. Die Formel (8.) liefert alsdann für

$$(\eta_\alpha) x^\lambda z_1^{\lambda_1}\ldots z_m^{\lambda_m} = \Gamma'^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \qquad (\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m > \mathfrak{r})$$

bestimmte positive Werthe, und die Vergleichung der Recursionsformeln (5.) und (8.) ergiebt

$$|C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}| \leqq \Gamma'^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}. \qquad (\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m > \mathfrak{r})$$

Somit folgt aus der Convergenz der Reihe (7'.) diejenige der Reihe (4'.) für hinreichend kleine $|x|, |z_1|, \ldots, |z_m|$.

Der Satz bleibt bestehen, wenn die Grössen a_α nicht sämmtlich verschieden sind, in welchem Falle nur die Recursionsformel (5.) durch (5ª.) zu ersetzen ist.

§ 2.

In dem Differentialgleichungssystem

$$(1.) \qquad x\frac{dy_\alpha}{dx} = a_\alpha y_\alpha + \Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n} x^k y_1^{k_1}\ldots y_n^{k_n} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$
$$(k=1,\ k_1=\cdots=k_n=0;\ \ k+k_1+\cdots+k_n > 1)$$

seien die reellen Theile von $a_1, \ldots, a_m$ positiv, diejenigen von $a_{m+1}, \ldots, a_n$ negativ oder Null. Zwischen den Grössen $a_1, \ldots, a_m$, welche zunächst als verschieden vorausgesetzt werden, dürfen jetzt beliebige Beziehungen von der Form

$$a_i = \varrho + \varrho_{i'} a_{i'} + \varrho_{i''} a_{i''} + \cdots$$

bestehen, wo $\varrho, \varrho_{i'}, \varrho_{i''}, \ldots$ ganze positive Zahlen sind. Eine lineare Ver-

bindung von $a_1, \ldots, a_m$

$$\lambda + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m,$$

worin die Coefficienten $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ganze positive Zahlen mit Einschluss der Null sind, wollen wir (auch wenn lediglich λ von Null verschieden ist) kurz eine Verbindung von $a_1, \ldots, a_m$ nennen. Diejenigen unter den Grössen $a_1, \ldots, a_m$, welche nicht mit Verbindungen anderer dieser Grössen übereinstimmen, wollen wir mit $a_1, \ldots, a_l$ bezeichnen. Wenn zwischen $a_1, \ldots, a_m$ überhaupt keine Beziehungen der bezeichneten Art bestehen, ist $l = m$; dagegen ist $l = 0$, wenn $a_1, \ldots, a_m$ sämmtlich ganze positive Zahlen sind. Wenn die übrigen Grössen $a_{l+1}, \ldots, a_m$ so angeordnet sind, dass die reellen Theile $\Re(a_{l+1}), \ldots, \Re(a_m)$ eine nicht abnehmende Reihe bilden, kommen nur Beziehungen von der Form

$$a_i = \varrho_i + \varrho_{i1} a_1 + \cdots + \varrho_{i,i-1} a_{i-1}$$

in Betracht, wo $\varrho_i, \varrho_{i1}, \ldots, \varrho_{i,i-1}$ ganze positive Zahlen, die Null eingeschlossen, bedeuten.

Wir legen jeder der Grössen a_i $(i = 1, \ldots, m)$ einen Rang ν_i bei, wo ν_i eine noch zu definirende ganze positive Zahl (einschliesslich Null) ist. Wir sagen dann, die Verbindung $\lambda + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m$ habe den Rang $\lambda_1 \nu_1 + \cdots + \lambda_m \nu_m$. Für die Grössen $a_1, \ldots, a_l$ setzen wir den Rang $\nu_1 = \cdots = \nu_l = 0$. Sämmtliche Verbindungen

$$\varrho_{l+1} + \varrho_{l+1,1} a_1 + \cdots + \varrho_{l+1,l} a_l,$$

welche den Werth a_{l+1} besitzen, haben den Rang 0; als Rang von a_{l+1} führen wir die Zahl $\nu_{l+1} = 1$ ein. Nachdem die Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_{i-1}$ ermittelt sind, erhält man den Rang ν_i von a_i folgendermassen. Es seien sämmtliche Verbindungen von $a_1, \ldots, a_{i-1}$

$$\varrho_i + \varrho_{i1} a_1 + \cdots + \varrho_{i,i-1} a_{i-1}$$

gebildet, welche den Werth a_i haben, und von jeder der Rang $\varrho_{i1} \nu_1 + \cdots + \varrho_{i,i-1} \nu_{i-1}$ bestimmt. Wir nehmen ν_i um 1 grösser an als die grösste der Zahlen $\varrho_{i1} \nu_1 + \cdots + \varrho_{i,i-1} \nu_{i-1}$. Mit

$$\mu_i + \mu_{i1} a_1 + \cdots + \mu_{i,i-1} a_{i-1}$$

bezeichnen wir irgend eine Verbindung von $a_1, \ldots, a_{i-1}$, welche den Werth a_i hat, und deren Rang den grösstmöglichen Werth $\nu_i - 1$ besitzt; es bestehen dann die Gleichungen

$$(2.) \qquad a_i = \mu_i + \mu_{i1} a_1 + \cdots + \mu_{i,i-1} a_{i-1},$$

$$(3.) \qquad \nu_i = 1 + \mu_{i1} \nu_1 + \cdots + \mu_{i,i-1} \nu_{i-1}.$$

Die Verbindung

$$\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m,$$

deren Werth mit a bezeichnet sei, hat den Rang

$$\nu = \lambda_1\nu_1+\cdots\lambda_m\nu_m.$$

Ist $\nu>0$, so ist für einen gewissen Index h $\lambda_h>0$, $\nu_h>0$. Setzt man

$$\lambda'=\lambda+\mu_h,\quad \lambda'_1=\lambda_1+\mu_{h1},\quad \ldots,\quad \lambda'_{h-1}=\lambda_{h-1}+\mu_{h,h-1},$$
$$\lambda'_h=\lambda_h-1,\quad \lambda'_{h+1}=\lambda_{h+1},\quad \ldots,\quad \lambda'_m=\lambda_m,$$

so erhält man mit Rücksicht auf (2.) und (3.) die Gleichungen

$$\lambda'+\lambda'_1 a_1+\cdots+\lambda'_m a_m = a,$$
$$\lambda'_1\nu_1+\cdots+\lambda'_m\nu_m = \nu-1.$$

Es ist demnach auch eine Verbindung vom Rang $\nu-1$

$$\lambda'+\lambda'_1 a_1+\cdots+\lambda'_m a_m$$

vorhanden, welche den Werth a besitzt. Der grösste Rang, welchen eine Verbindung $\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m$ von vorgeschriebenem Werthe a besitzen kann, sei mit $\bar{\nu}$ bezeichnet. Wenn k eine der Zahlen $0, 1, \ldots, \bar{\nu}$ bedeutet, so ist nach dem soeben Bewiesenen mindestens eine Verbindung

$$\lambda^{(k)}+\lambda_1^{(k)} a_1+\cdots+\lambda_m^{(k)} a_m$$

vom Werth a und vom Rang $\bar{\nu}-k$ vorhanden. Im Falle $a=a_i$ ist $\bar{\nu}=\nu_i$ und wir haben sicher je eine Verbindung vom Rang ν_i, ν_i-1, …, 1, 0 mit dem Werth a_i, nämlich

$$(4.)\qquad \begin{cases} a_i \\ \mu'_i+\mu'_{i1}a_1+\cdots+\mu'_{i,i-1}a_{i-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_i^{(\nu_i)}+\mu_{i1}^{(\nu_i)}+\cdots+\mu_{i,i-1}^{(\nu_i)}a_{i-1}. \end{cases}$$

Als Verbindung vom Rang ν_i-1 sei die bereits oben eingeführte $\mu_i+\mu_{i1}a_1+\cdots+\mu_{i,i-1}a_{i-1}$ gewählt, so dass $\mu'_i=\mu_i$, $\mu'_{i1}=\mu_{i1}$, …, $\mu'_{i,i-1}=\mu_{i,i-1}$ ist. Die übrigen Verbindungen der Tabelle seien so ausgewählt, dass zwischen je zwei auf einander folgenden

$$\mu_i^{(k-1)}+\mu_{i1}^{(k-1)}a_1+\cdots+\mu_{i,i-1}^{(k-1)}a_{i-1},$$
$$\mu_i^{(k)}\quad+\mu_{i1}^{(k)}a_1\quad+\cdots+\mu_{i,i-1}^{(k)}a_{i-1}$$

bei geeigneter Wahl von h die Beziehung besteht:

$$(5.)\qquad \begin{cases} \mu_i^{(k)}=\mu_i^{(k-1)}+\mu_h, & \mu_{i1}^{(k)}=\mu_{i1}^{(k-1)}+\mu_{h1}, & \ldots, & \mu_{i,h-1}^{(k)}=\mu_{i,h-1}^{(k-1)}+\mu_{h,h-1}, \\ \mu_{ih}^{(k)}=\mu_{ih}^{(k-1)}-1, & \mu_{i,h+1}^{(k)}=\mu_{i,h+1}^{(k-1)}, & \ldots, & \mu_{i,i-1}^{(k)}=\mu_{i,i-1}^{(k-1)}. \end{cases}$$

In der Verbindung vom Rang 0 ist $\mu_{ik}^{(\nu_i)} = 0$, wenn $\nu_h > 0$ ist; in derselben kommen also $a_{l+1}, \ldots, a_m$ nicht vor, und wir können ihr die Form geben:

$$\omega_i + \omega_{i1} a_1 + \cdots + \omega_{il} a_l.$$

Ausser der Verbindung

$$\mu_i^{(k)} + \mu_{i1}^{(k)} a_1 + \cdots + \mu_{i,i-1}^{(k)} a_{i-1}$$

vom Werth a_i und vom Rang $\nu_i - k$ sind im allgemeinen noch andere Verbindungen

$$\varrho_i^{(k)} + \varrho_{i1}^{(k)} a_1 + \cdots + \varrho_{i,i-1}^{(k)} a_{i-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

von gleichem Werth und Rang vorhanden*).

Wir suchen das Differentialgleichungssystem (1.) durch ein System von Reihen von der Gestalt

$$(6.) \qquad y_\alpha = \Sigma C_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}^{(\alpha)} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m} (-\log x)^{\lambda_1\nu_1+\cdots+\lambda_m\nu_m} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

zu befriedigen, worin $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ganze positive Zahlen einschliesslich Null (unter Ausschluss des Werthsystems $\lambda = 0, \lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_m = 0$) bedeuten. Unter Einführung der Bezeichnung

$$(7.) \qquad t_i = x^{a_i} (-\log x)^{\nu_i} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

geht die Reihe (6.) in eine gewöhnliche Potenzreihe von $x, t_1, \ldots, t_m$ über:

$$(8.) \qquad y_\alpha = \Sigma C_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}^{(\alpha)} x^\lambda t_1^{\lambda_1} \ldots t_m^{\lambda_m}, \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

welche für $x = 0, t_1 = 0, \ldots, t_m = 0$ verschwindet. Den Exponenten von x in einem Glied der Reihe (6.),

$$a = \lambda + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m,$$

wollen wir das Gewicht und den Exponenten von $-\log x$,

$$\nu = \lambda_1 \nu_1 + \cdots + \lambda_m \nu_m,$$

den Rang des Gliedes $C_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}^{(\alpha)} x^\lambda t_1^{\lambda_1} \ldots t_m^{\lambda_m}$ oder des Coefficienten $C_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}^{(\alpha)}$ oder auch des Indexsystems $(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ nennen. Bisweilen gebrauchen wir auch die Bezeichnung:

$$C_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}^{(\alpha)} = (y_\alpha)_{x^\lambda t_1^{\lambda_1}\ldots t_m^{\lambda_m}} = (y_\alpha)_{x^a (-\log x)^\nu}.$$

Es seien sämmtliche Indexsysteme vom Gewicht a_i und vom Rang $\nu_i - k$ $(k = 0, 1, \ldots, \nu_i)$ ermittelt:

*) Man vergleiche die in § 3 gegebenen Beispiele.

$$(\mu_i^{(k)}, \mu_{i1}^{(k)}, \ldots, \mu_{i,i-1}^{(k)}, 0, \ldots, 0),$$
$$(\varrho_i^{(k)}, \varrho_{i1}^{(k)}, \ldots, \varrho_{i,i-1}^{(k)}, 0, \ldots, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

dann ist

$$x^{\mu_i^{(k)}} t_1^{\mu_{i1}^{(k)}} \ldots t_{i-1}^{\mu_{i,i-1}^{(k)}} = x^{\varrho_i^{(k)}} t_1^{\varrho_{i1}^{(k)}} \ldots t_{i-1}^{\varrho_{i,i-1}^{(k)}} = \cdots = x^{a_i}(-\log x)^{\nu_i - k};$$

wir dürfen deswegen voraussetzen, dass in der Reihe (4.) für y_i*) ein Glied mit $x^{\mu_i^{(k)}} t_1^{\mu_{i1}^{(k)}} \ldots$ vorkommt, während die Glieder mit $x^{\varrho_i^{(k)}} t_1^{\varrho_{i1}^{(k)}} \ldots, \ldots$ fehlen, dass also

$$(y_i)_{x^{\varrho_i^{(k)}} t_1^{\varrho_{i1}^{(k)}} \cdots} = 0; \quad \ldots$$

ist. Wenn wir

$$(y_i)_{x^{\mu_i^{(k)}} t_1^{\mu_{i1}^{(k)}} \cdots} = c_k^{(i)}$$

setzen, so enthält die Reihe für y_i die folgenden Glieder vom Gewicht a_i:

$$\sum_{k=0}^{\nu_i} c_k^{(i)} x^{a_i}(-\log x)^{\nu_i - k}.$$

Die Function t_i genügt der Differentialgleichung

$$x\frac{dt_i}{dx} = a_i t_i - \nu_i x^{a_i}(-\log x)^{\nu_i - 1},$$

welche mit Rücksicht auf die Gleichungen (2.) und (3.) die Form annimmt:

$$x\frac{dt_i}{dx} = a_i t_i - \nu_i x^{\mu_i} t_1^{\mu_{i1}} \ldots t_{i-1}^{\mu_{i,i-1}}. \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{9.}$$

Demnach wird

$$(\alpha.) \quad \begin{cases} x\dfrac{dy_\alpha}{dx} = \displaystyle\sum_{(\lambda)} \Big\{ (\lambda + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m) C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \\ \qquad - \displaystyle\sum_{h=1}^{m} \nu_h (\lambda_h + 1) C^{(\alpha)}_{\lambda-\mu_h, \lambda_1-\mu_{h1}, \ldots, \lambda_{h-1}-\mu_{h,h-1}, \lambda_h+1, \lambda_{h+1}, \ldots, \lambda_m} \Big\} x^\lambda t_1^{\lambda_1} \ldots t_m^{\lambda_m}. \end{cases}$$

Die Grösse $C^{(\alpha)}_{\lambda-\mu_h, \lambda_1-\mu_{h1}, \ldots, \lambda_h+1, \ldots}$ hat dasselbe Gewicht wie $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$, aber einen um 1 höheren Rang, denn wegen (2.) ist

$$(\lambda - \mu_h) + (\lambda_1 - \mu_{h1}) a_1 + \cdots + (\lambda_h + 1) a_h + \cdots = \lambda + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m$$

und wegen (3.)

$$(\lambda_1 - \mu_{h1}) \nu_1 + \cdots + (\lambda_{h-1} - \mu_{h,h-1}) \nu_{h-1} + (\lambda_h + 1) \nu_h + \cdots = \lambda_1 \nu_1 + \cdots + \lambda_m \nu_m + 1.$$

Demnach gehen aus Gliedern der Reihe (8.) vom Gewicht a auch nur

---

*) Bei der Reihe für y_α ($\alpha \leqq i$) soll diese Annahme nicht gemacht werden.

Glieder der Reihe ($\alpha.$) von gleichem Gewicht hervor; die Glieder vom Gewicht a_i in der Reihe für $x\frac{dy}{dx_i}$ erhält man demnach durch Differentiation der Glieder vom Gewicht a_i in der Reihe für y_i:

$$(8'.) \qquad y_i = \sum_{k=0}^{\nu_i} c_k^{(i)} x^{a_i} (-\log x)^{\nu_i - k} + \cdots,$$

$$(\alpha'.) \quad x\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=0}^{\nu_i} [a_i c_k^{(i)} + (\nu_i - k + 1) c_{k-1}^{(i)}] x^{a_i} (-\log x) \nu^{\nu_i - k} + \cdots.$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung (1.) geht durch Einsetzung der Reihen (8.) über in

$$(\beta.) \qquad \sum_{(\lambda)} a_\alpha C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda t_1^{\lambda_1} \ldots t_m^{\lambda_m} + \sum_{(\lambda)} G^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} (C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m} \ldots) x^\lambda t_1^{\lambda_1} \ldots t_m^{\lambda_m},$$

wobei

$$(10.) \qquad G^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} = \Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n} C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m} C^{(\alpha'')}_{\lambda''\lambda''_1\ldots\lambda''_m} \ldots$$

gesetzt ist; in einem Gliede der Summe (10.) ist die Anzahl der Factoren $C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}$, $C^{(\alpha'')}_{\lambda''\lambda''_1\ldots\lambda''_m}$, ... gleich $k_1+\cdots+k_n$, und die Indices erfüllen die Bedingungen

$$\begin{aligned} \lambda' + \lambda'' + \cdots &= \lambda - k, \\ \lambda'_1 + \lambda''_1 + \cdots &= \lambda_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \lambda'_m + \lambda''_m + \cdots &= \lambda_m; \end{aligned}$$

$G^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ ist demnach eine ganze Function solcher Grössen $C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}$, für welche

$$(\gamma.) \qquad \begin{cases} \lambda' \leqq \lambda, \quad \lambda'_1 \leqq \lambda_1, \quad \ldots, \quad \lambda'_m \leqq \lambda_m, \\ \lambda' + \lambda'_1 + \cdots + \lambda'_m < \lambda + \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \end{cases}$$

ist. Wir werden bisweilen sagen, das Indexsystem $(\lambda', \lambda'_1, \ldots, \lambda'_m)$ sei von geringerem Gewicht als das Indexsystem $(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, wenn

$$\Re(\lambda' + \lambda'_1 a_1 + \cdots + \lambda'_m a_m) < \Re(\lambda + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m)$$

ist. Dann ist $G^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ eine ganze Function solcher Grössen $C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}$, deren Gewicht geringer ist als dasjenige von $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$. Auch in der Reihe ($\beta.$) für $a = i$ ersetzen wir $x^{\varrho_i^{(k)}} t_1^{\varrho_{i1}^{(k)}} \ldots$, ... durch $x^{\mu_i^{(k)}} t_1^{\mu_{i1}^{(k)}} \ldots$ und erhalten als Glieder mit

$$x^{\mu_i^{(k)}} t_1^{\mu_{i1}^{(k)}} \ldots = x^{a_i} (-\log x)^{\nu_i - k}$$

die folgenden:

$$(\beta'.) \qquad x\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=0}^{\nu_i}(a_i c_k^{(i)} + G_k^{(i)})x^{a_i}(-\log x)^{\nu_i - k} + \cdots,$$

wo

$$(10'.) \qquad G_k^{(i)} = G^{(i)}_{\mu_i^{(k)}\mu_{i1}^{(k)}\ldots} + G^{(i)}_{\varrho_i^{(k)}\varrho_{i1}^{(k)}\ldots} + \cdots$$

eine ganze Function solcher Grössen $C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}$ darstellt, deren Gewicht kleiner ist als a_i. Durch Gleichsetzung der Coefficienten von $x^\lambda t_1^{\lambda_1}\ldots t_m^{\lambda_m}$ in den Reihen $(\alpha.)$ und $(\beta.)$ ergiebt sich die Recursionsformel

$$(11.) \quad \left\{ \begin{aligned} (\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m - a_\alpha) C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} &= \sum_{h=1}^{m} \nu_h(\lambda_h+1) C^{(\alpha)}_{\lambda-\mu_h,\lambda_1-\mu_{h1},\ldots,\lambda_h+1,\ldots} \\ &\quad + G^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}(C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}\ldots); \end{aligned} \right.$$

ist jedoch das Indexsystem $(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ vom Gewicht a_i und vom Rang $\nu_i - k$ $(k = 0, 1, \ldots, \nu_i)$, so ist die Formel (11.) für $\alpha = i$ zu ersetzen durch die Formel

$$(11'.) \qquad 0 = (\nu_i - k + 1)c_{k-1}^{(i)} + G_k^{(i)}, \qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu_i)$$

welche man durch Gleichsetzung der Coefficienten von $x^{a_i}(-\log x)^{\nu_i - k}$ in den Reihen $(\alpha'.)$ und $(\beta'.)$ erhält.

Wenn $\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m - a_\alpha$ von Null verschieden ist, drückt die Recursionsformel (11.) die Grösse $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ vom Gewicht a und vom Rang ν aus durch Grössen $C^{(\alpha)}_{\lambda-\mu_h,\lambda_1-\mu_{h1},\ldots,\lambda_h+1,\ldots}$ von gleichem Gewicht a und vom Rang $\nu+1$, sowie durch Grössen $C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}$, deren Indexsystem $(\lambda', \lambda'_1, \ldots, \lambda'_m)$ die Bedingungen $(\gamma.)$ erfüllt, deren Gewicht $< a$ und deren Rang $\leqq \nu$ ist. Ist $\bar{\nu}$ der höchste mit dem Gewicht a vereinbare Rang und sind die Grössen $C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}$ von geringerem Gewicht bereits bestimmt, so lassen sich vermittelst der Formel (11.) der Reihe nach die Grössen $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ vom Gewicht a und vom Rang $\bar{\nu}, \bar{\nu}-1, \ldots, 1, 0$ berechnen. Aus der Formel (11'.), welche für $k = 0, 1, \ldots, \nu_i$ lautet:

$$\begin{aligned} 0 &= 0, \\ 0 &= \nu_i c_0^{(i)} + G_1^{(i)}, \\ 0 &= (\nu_i - 1)c_1^{(i)} + G_2^{(i)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= c_{\nu_i - 1}^{(i)} + G_{\nu_i}^{(i)}, \end{aligned}$$

erhält man, nachdem die Coefficienten von geringerem Gewicht als a_i berechnet sind, die Grössen

$$c_0^{(i)} = (y_i)_{t_i} = (y_i)_{x^{a_i}(-\log x)^{\nu_i}},$$

$$c_1^{(i)} = (y_i)_{x^{\mu_i'} t_1^{\mu_{i1}'} \ldots} = (y_i)_{x^{a_i}(-\log x)^{\nu_i - 1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{\nu_i - 1}^{(i)} = (y_i)_{x^{\mu_i^{(\nu_i-1)}} t_1^{\mu_{i1}^{(\nu_i-1)}} \ldots} = (y_i)_{x^{a_i}(-\log x)},$$

während

$$c_{\nu_i}^{(i)} = (y_i)_{x^{\omega_i} t_1^{\omega_{i1}} \ldots t_l^{\omega_{il}}} = (y_i)_{x^{a_i}}$$

unbestimmt bleibt. So ergeben sich sämmtliche Grössen $C_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}^{(\alpha)}$ als ganze rationale Functionen der m willkürlichen Constanten

$$C_i = (y_i)_{x^{a_i}}. \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

Um die Convergenz des so berechneten Reihensystems (8.) nachzuweisen, vergleichen wir das Differentialgleichungssystem (1.) mit einem anderen, welches folgendermassen gebildet wird.

Wir verstehen unter $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_l$ positive Grössen, welche nicht grösser sind als die reellen Theile von $a_1, \ldots, a_l$:

$$\mathfrak{a}_i \leqq \Re(a_i), \qquad (i = 1, \ldots, l)$$

und definiren $\mathfrak{a}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{a}_m$ durch die Gleichungen

$$\mathfrak{a}_i = \mu_i + \mu_{i1}\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mu_{i,i-1}\mathfrak{a}_{i-1}, \qquad (i = l+1, \ldots, m)$$

so dass auch $\mathfrak{a}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{a}_m$ positive Zahlen sind, welche die Bedingung erfüllen:

$$\mathfrak{a}_i \leqq \Re(a_i). \qquad (i = l+1, \ldots, m)$$

Zwischen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ bestehen dann jedenfalls die Beziehungen

$$\mathfrak{a}_i = \mu_i^{(k)} + \mu_{i1}^{(k)}\nu_1 + \cdots + \mu_{i,i-1}^{(k)}\nu_{i-1}; \qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu_i)$$

doch brauchen nicht alle Beziehungen, welche zwischen $a_1, \ldots, a_m$ stattfinden, auch für $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ zu gelten. Durch geeignete Wahl der innerhalb gewisser Grenzen willkürlich anzunehmenden Grössen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_l$ lässt es sich erreichen, dass zwischen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ keine Relation besteht, die nicht auch zwischen $a_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ stattfindet, so dass $\nu_1, \ldots, \nu_m$ auch die Rangzahlen von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ sind. Mit $\mathfrak{a}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n$ bezeichnen wir die reellen Theile von $a_{m+1}, \ldots, a_n$ und setzen $\nu_{m+1} = \cdots = \nu_n = 0$.

Wir bilden nun das Differentialgleichungssystem

$$(12.) \qquad x\frac{d\mathfrak{y}_\alpha}{dx} = (\mathfrak{a}_\alpha-\nu_\alpha\varepsilon)\mathfrak{y}_\alpha+\Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n}x^k\mathfrak{y}_1^{k_1}\ldots\mathfrak{y}_n^{k_n}, \qquad (\alpha=1,\ldots,n)$$

worin

$$A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n} = |A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n}|$$

ist und ε eine positive Zahl bedeutet, welche jedenfalls so klein anzunehmen ist, dass $\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon, \ldots, \mathfrak{a}_m-\nu_m\varepsilon$ positiv sind. Wenn zwischen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ die Relation

$$\mathfrak{a}_i = \varrho_i+\varrho_{i1}\mathfrak{a}_1+\cdots+\varrho_{i,i-1}\mathfrak{a}_{i-1}$$

besteht, so kann zwischen $\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon, \ldots, \mathfrak{a}_m-\nu_m\varepsilon$ die Relation

$$\mathfrak{a}_i-\nu_i\varepsilon = \varrho_i+\varrho_{i1}(\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon)+\cdots+\varrho_{i,i-1}(\mathfrak{a}_{i-1}-\nu_{i-1}\varepsilon)$$

nicht bestehen, denn es müsste dann

$$\nu_i = \varrho_{i1}\nu_1+\cdots+\varrho_{i,i-1}\nu_{i-1}$$

sein, während auf Grund der Definition von ν_i

$$\varrho_{i1}\nu_1+\cdots+\varrho_{i,i-1}\nu_{i-1} \leqq \nu_i-1$$

ist. Durch geeignete Wahl von ε lässt es sich verhindern, dass zwischen $\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon, \ldots, \mathfrak{a}_m-\nu_m\varepsilon$ eine Beziehung

$$\mathfrak{a}_i-\nu_i\varepsilon = \sigma_i+\sigma_{i1}(\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon)+\cdots+\sigma_{i,i-1}(\mathfrak{a}_{i-1}-\nu_{i-1}\varepsilon)$$

stattfindet, während dieselbe Beziehung zwischen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$

$$\mathfrak{a}_i = \sigma_i+\sigma_{i1}\mathfrak{a}_1+\cdots+\sigma_{i,i-1}\mathfrak{a}_{i-1}$$

nicht besteht.

Unter den gemachten Voraussetzungen wird das System (12.), wenn man

$$(13.) \qquad \mathfrak{z}_i = x^{\mathfrak{a}_i-\nu_i\varepsilon} \qquad (i=1,\ldots,m)$$

setzt, nach § 1 durch ein System von Potenzreihen von x, $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_m$

$$(14.) \qquad \mathfrak{y}_\alpha = \Sigma\mathfrak{B}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}x^\lambda\mathfrak{z}_1^{\lambda_1}\ldots\mathfrak{z}_m^{\lambda_m} \qquad (\alpha=1,\ldots,n)$$

befriedigt, welche für hinreichend kleine Werthe von $|x|, |\mathfrak{z}_1|, \ldots, |\mathfrak{z}_m|$ convergiren. Durch Einsetzung des Reihensystems (14.) in das Differentialgleichungssystem (12.) und Vergleichung der Coefficienten von $x^\lambda\mathfrak{z}_1^{\lambda_1}\ldots\mathfrak{z}_m^{\lambda_m}$ ergiebt sich die Recursionsfnrmel

$$(15.) \quad \begin{cases} (\lambda+\lambda_1(\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon)+\cdots+\lambda_m(\mathfrak{a}_m-\nu_m\varepsilon)-(\mathfrak{a}_\alpha-\nu_\alpha\varepsilon))\mathfrak{B}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \\ \qquad = \Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n}\mathfrak{B}^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}\mathfrak{B}^{(\alpha'')}_{\lambda''\lambda''_1\ldots\lambda''_m}\cdots, \end{cases}$$

deren rechte Seite, welche mit

$$\mathfrak{B}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}(\mathfrak{B}^{(a')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}\ldots)$$

bezeichnet werden möge, eine ganze Function derjenigen Grössen $\mathfrak{B}^{(a')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}$ darstellt, deren Indices die Bedingung $(\gamma.)$ erfüllen. Die m Grössen

$$(\mathfrak{y}_i)_{\mathfrak{z}_i} = \mathfrak{B}_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

bleiben unbestimmt, und sämmtliche Grössen $\mathfrak{B}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ ergeben sich als ganze rationale Functionen von $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m$. An Stelle von $\mathfrak{z}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ setzen wir jetzt die Functionen

$$\text{(16.)} \qquad \mathfrak{t}_i = x^{\mathfrak{a}_i - \nu_i\varepsilon}\left(\frac{1-x^\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\nu_i}, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

so dass zwischen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_m$ und $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_m$ die Beziehungen bestehen:

$$\text{(17.)} \qquad \mathfrak{z}_i = \varepsilon^{\nu_i}\mathfrak{t}_i + \sum_{k=1}^{\nu_i}(\nu_i)_k \varepsilon^{\nu_i - k} x^{\mu_i^{(k)}} \mathfrak{t}_1^{\mu_{i1}^{(k)}} \ldots \mathfrak{t}_{i-1}^{\mu_{i,i-1}^{(k)}},$$

$$\text{(18.)} \qquad \varepsilon^{\nu_i}\mathfrak{t}_i = \mathfrak{z}_i + \sum_{k=1}^{\nu_i}(-1)^k(\nu_i)_k x^{\mu_i^{(k)}} \mathfrak{z}_1^{\mu_{i1}^{(k)}} \ldots \mathfrak{z}_{i-1}^{\mu_{i,i-1}^{(k)}}.$$

Es ist nämlich

$$\varepsilon^{\nu_i}\mathfrak{t}_i = x^{\mathfrak{a}_i - \nu_i\varepsilon}(1-x^\varepsilon)^{\nu_i},$$

$$\varepsilon^{\nu_i - k} x^{\mu_i^{(k)}} \mathfrak{t}_1^{\mu_{i1}^{(k)}} \ldots \mathfrak{t}_{i-1}^{\mu_{i,i-1}^{(k)}} = \varepsilon^{\nu_i - k} x^{\mu_i^{(k)} + \mu_{i1}^{(k)}(\mathfrak{a}_1 - \nu_1\varepsilon) + \cdots + \mu_{i,i-1}^{(k)}(\mathfrak{a}_{i-1} - \nu_{i-1}\varepsilon)}$$

$$\times\left(\frac{1-x^\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\mu_{i1}^{(k)}\nu_1 + \cdots + \mu_{i,i-1}^{(k)}\nu_{i-1}}$$

$$= \varepsilon^{\nu_i - k} x^{\mathfrak{a}_i - (\nu_i - k)\varepsilon}\left(\frac{1-x^\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\nu_i - k} = x^{\mathfrak{a}_i - (\nu_i - k)\varepsilon}(1-x^\varepsilon)^{\nu_i - k}$$

mit Rücksicht auf

$$\mathfrak{a}_i = \mu_i^{(k)} + \mu_{i1}^{(k)}\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mu_{i,i-1}^{(k)}\mathfrak{a}_{i-1}$$

und

$$\nu_i - k = \mu_{i1}^{(k)}\nu_1 + \cdots + \mu_{i,i-1}^{(k)}\nu_{i-1}.$$

Demnach wird die rechte Seite der Gleichung (17.)

$$\sum_{k=0}^{\nu_i}(\nu_i)_k x^{\mathfrak{a}_i - (\nu_i - k)\varepsilon}(1-x^\varepsilon)^{\nu_i - k} = x^{\mathfrak{a}_i - \nu_i\varepsilon}\sum_{k=0}^{\nu_i}(\nu_i)_k x^{\varepsilon k}(1-x^\varepsilon)^{\nu_i - k}$$

$$= x^{\mathfrak{a}_i - \nu_i\varepsilon}(x^\varepsilon + 1 - x^\varepsilon)^{\nu_i} = x^{\mathfrak{a}_i - \nu_i\varepsilon} = \mathfrak{z}_i.$$

Die rechte Seite der Gleichung (18.) ist

$$x^{\mathfrak{a}_i - \nu_i\varepsilon} + \sum_{k=1}^{\nu_i}(-1)^k(\nu_i)_k x^{\mathfrak{a}_i - (\nu_i - k)\varepsilon} = x^{\mathfrak{a}_i - \nu_i\varepsilon}\sum_{k=0}^{\nu_i}(-1)^k(\nu_i)_k(x^\varepsilon)^k$$

$$= x^{\mathfrak{a}_i - \nu_i\varepsilon}(1-x^\varepsilon)^{\nu_i} = \varepsilon^{\nu_i}\mathfrak{t}_i.$$

Die Grössen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_m$ lassen sich also als ganze Functionen von x, $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_m$ darstellen, und wenn man die Ausdrücke (17.) in die Reihe (14.) einsetzt, geht diese in eine Potenzreihe von x, $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_m$ über:

$$\mathfrak{y}_\alpha = \Sigma \mathfrak{S}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda \mathfrak{t}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{t}_m^{\lambda_m}, \qquad (\alpha = 1, \ldots, m) \tag{19.}$$

welche für hinreichend kleine Werthe von $|x|, |\mathfrak{t}_1|, \ldots, |\mathfrak{t}_m|$ convergirt. Die Function $\mathfrak{t}_i$ genügt der Differentialgleichung

$$x \frac{d\mathfrak{t}_i}{dx} = (\mathfrak{a}_i - \nu_i \varepsilon)\mathfrak{t}_i - \nu_i x^{\mathfrak{a}_i - (\nu_i - 1)\varepsilon} \Big(\frac{1-x^\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{\nu_i - 1},$$

welche mit Rücksicht auf

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_i &= \mu_i + \mu_{i1}\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mu_{i,i-1}\mathfrak{a}_{i-1}, \\ \nu_i - 1 &= \mu_{i1}\nu_1 + \cdots + \mu_{i,i-1}\nu_{i-1} \end{aligned}$$

auch geschrieben werden kann:

$$x \frac{d\mathfrak{t}_i}{dx} = (\mathfrak{a}_i - \nu_i \varepsilon)\mathfrak{t}_i - \nu_i x^{\mu_i} \mathfrak{t}_1^{\mu_{i1}} \ldots \mathfrak{t}_{i-1}^{\mu_{i,i-1}}. \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{20.}$$

Durch Einsetzung der Reihen (19.) in das System (12.) unter Beobachtung von (20.) und durch Vergleichung der Coefficienten von $x^\lambda \mathfrak{t}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{t}_m^{\lambda_m}$ ergiebt sich die Recursionsformel

$$\begin{cases} \big(\lambda + \lambda_1(\mathfrak{a}_1 - \nu_1\varepsilon) + \cdots + \lambda_m(\mathfrak{a}_m - \nu_m\varepsilon) - (\mathfrak{a}_\alpha - \nu_\alpha\varepsilon)\big)\mathfrak{S}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \\ \qquad = \sum_{h=1}^{m} \nu_h(\lambda_h + 1)\mathfrak{S}^{(\alpha)}_{\lambda-\mu_h,\lambda_1-\mu_{h1},\ldots,\lambda_h+1,\ldots} + \mathfrak{B}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}\big(\mathfrak{S}^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}\cdots\big), \end{cases} \tag{21.}$$

aus welcher man $\mathfrak{S}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ als ganze rationale Function von

$$(\mathfrak{y}_i)_{\mathfrak{t}_i} = \mathfrak{S}_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

erhält.

Zur Abkürzung des Ausdrucks wollen wir vorübergehend die Zahl

$$\mathfrak{a} = \lambda + \lambda_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_m\mathfrak{a}_m$$

als das Gewicht und die Zahl

$$\nu = \lambda_1\nu_1 + \cdots + \lambda_m\nu_m$$

als den Rang sowohl des Gliedes $\mathfrak{B}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda \mathfrak{z}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{z}_m^{\lambda_m}$ der Reihe (14.) als auch des Gliedes $\mathfrak{S}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda \mathfrak{t}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{t}_m^{\lambda_m}$ der Reihe (19.) bezeichnen. Da

$$\mathfrak{a}_i = \mu_i^{(k)} + \mu_{i1}^{(k)}\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mu_{i,i-1}^{(k)}\mathfrak{a}_{i-1}$$

ist, so sind in der Gleichung (17.) alle Glieder von gleichem Gewicht $\mathfrak{a}_i$, und es gehen aus einem Glied der Reihe (14.) vom Gewicht $\mathfrak{a}$ vermittelst

der Substitution (17.) nur Glieder der Reihe (19.) von gleichem Gewicht $\mathfrak{a}$ hervor. Mit Rücksicht auf (17.) besteht demnach die Gleichung

$$(22.) \qquad \Sigma \mathfrak{B}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda} \mathfrak{z}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{z}_m^{\lambda_m} = \Sigma \mathfrak{C}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda} \mathfrak{t}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{t}_m^{\lambda_m}$$

auch dann, wenn beide Summen nur auf diejenigen Indexsysteme $(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ erstreckt werden, für welche

$$\lambda + \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_m \mathfrak{a}_m = \mathfrak{a}$$

ist, oder auch auf die Indexsysteme, welche der Bedingung

$$\lambda + \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_m \mathfrak{a}_m \leqq \mathfrak{a}$$

genügen. Durch Einsetzung des Ausdrucks (18.) für $\mathfrak{t}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ und durch Vergleichung der Coefficienten von $x^{\lambda} \mathfrak{z}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{z}_m^{\lambda_m}$ in der Gleichung (22.) erhält man eine Gleichung von der Form

$$(23.) \qquad \mathfrak{B}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} = \varepsilon^{-(\lambda_1\nu_1 + \cdots + \lambda_m\nu_m)} \mathfrak{C}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} + \mathfrak{L}\left(\mathfrak{C}^{(a)}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m} \ldots\right),$$

wo $\mathfrak{L}$ eine lineare homogene Function von Grössen $\mathfrak{C}^{(a)}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}$ darstellt, deren Gewicht gleich $\mathfrak{a}$ und deren Rang grösser als ν ist. Insbesondere besteht zwischen $(\mathfrak{y}_i)_{\mathfrak{t}_i} = \mathfrak{C}_i$ und $(\mathfrak{y}_i)_{\mathfrak{z}_i} = \mathfrak{B}_i$ der Zusammenhang

$$\mathfrak{C}_i = \varepsilon^{\nu_i} \mathfrak{B}_i.$$

Nach dem am Schluss von § 1 bewiesenen Hülfssatz ist die Reihe (14.) auch dann noch convergent, wenn man

$$\mathfrak{B}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \quad (\lambda + \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_m \mathfrak{a}_m \leqq \mathfrak{r}),$$

wo $\mathfrak{r}$ eine beliebige positive Zahl bedeutet, beliebig annimmt und

$$\mathfrak{B}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \quad (\lambda + \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_m \mathfrak{a}_m > \mathfrak{r})$$

vermittelst der Recursionsformel (15.) berechnet. Das so abgeänderte Reihensystem genügt aber dem Differentialgleichungssystem

$$(12'.) \qquad \begin{cases} x \dfrac{d\mathfrak{y}_a}{dx} = (\mathfrak{a}_a - \nu_a \varepsilon)\mathfrak{y}_a + \Sigma A^{(a)}_{kk_1\ldots k_n} x^k \mathfrak{y}_1^{k_1} \ldots \mathfrak{y}_n^{k_n} \\ \qquad + \Sigma\left[\left(\lambda + \lambda_1(\mathfrak{a}_1 - \nu_1\varepsilon) + \cdots - (\mathfrak{a}_a - \nu_a\varepsilon)\right)\mathfrak{B}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}\right. \\ \qquad\qquad \left. - \mathfrak{G}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}\left(\mathfrak{B}^{(a')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m} \ldots\right)\right] x^{\lambda} \mathfrak{z}_1^{\lambda_1} \cdots \mathfrak{z}_m^{\lambda_m}. \\ \qquad\qquad (\lambda + \lambda_1\mathfrak{a}_1 + \cdots \leqq \mathfrak{r}) \end{cases}$$

Wir setzen für

$$\mathfrak{G}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \quad (\lambda + \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_m \mathfrak{a}_m \leqq \mathfrak{r})$$

beliebige positive Werthe und denken uns in (12'.) für $\mathfrak{B}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ $(\lambda + \lambda_1\mathfrak{a}_1 + \cdots \leqq \mathfrak{r})$

diejenigen Werthe eingesetzt, welche sich aus den Gleichungen (23.) ergeben. Die Grössen $(\mathfrak{y}_i)_{\mathfrak{z}_i} = \mathfrak{B}_i$, welche die Differentialgleichungen (12′.) unbestimmt lassen, werden gleich

$$\mathfrak{B}_i = \frac{\mathfrak{C}_i}{\varepsilon^{\nu_i}} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

gesetzt. Durch die Substitution (17.) geht das Differentialgleichungssystem (12′.) über in

$$(12''.)\quad \begin{cases} x\dfrac{d\mathfrak{y}_\alpha}{dx} = (\mathfrak{a}_\alpha - \nu_\alpha\varepsilon)\mathfrak{y}_\alpha + \Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n} x^k \mathfrak{y}_1^{k_1}\ldots\mathfrak{y}_n^{k_n} \\ \qquad + \Sigma\big[(\lambda+\lambda_1(\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon)+\cdots-(\mathfrak{a}_\alpha-\nu_\alpha\varepsilon))\mathfrak{C}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \\ \qquad - \sum_{h=1}^{m}\nu_h(\lambda_h+1)\mathfrak{C}^{(\alpha)}_{\lambda-\mu_h,\lambda_1-\mu_{h1},\ldots,\lambda_h+1,\ldots} \\ \qquad\qquad - \mathfrak{C}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}(\mathfrak{C}^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda_1'\ldots\lambda_m'}\ldots)\big]x^\lambda \mathfrak{t}_1^{\lambda_1}\ldots\mathfrak{t}_m^{\lambda_m}\text{*)}; \\ \qquad\qquad (\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots \leqq \mathfrak{r}) \end{cases}$$

dieses wird durch ein Reihensystem (19.) befriedigt, worin

$$(\mathfrak{y}_\alpha)_{x^\lambda \mathfrak{t}_1^{\lambda_1}\ldots\mathfrak{t}_m^{\lambda_m}} = \mathfrak{C}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \qquad (\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots \leqq \mathfrak{r})$$

---

*) Die Differentialgleichung (12.) sei, nachdem alle Glieder auf die linke Seite gebracht sind, mit

$$\mathfrak{D}_\alpha(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n) = 0$$

bezeichnet. Setzt man für $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$ erst die Reihen (14.), dann die Reihen (19.) ein, so erhält man

$$\mathfrak{D}_\alpha(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n) = \Sigma\mathfrak{E}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda \mathfrak{z}_1^{\lambda_1}\ldots\mathfrak{z}_m^{\lambda_m},$$
$$\mathfrak{D}_\alpha(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n) = \Sigma\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda \mathfrak{t}_1^{\lambda_1}\ldots\mathfrak{t}_m^{\lambda_m};$$

die Gleichungen

$$\mathfrak{E}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} = 0, \quad \mathfrak{F}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} = 0$$

stellen die Recursionsformeln (15.) und (21.) dar, nachdem alle Glieder auf die linke Seite gebracht sind. Zufolge der Substitution (17.) gilt die Gleichung

$$\Sigma\mathfrak{E}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda \mathfrak{z}_1^{\lambda_1}\ldots\mathfrak{z}_m^{\lambda_m} = \Sigma\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda \mathfrak{t}_1^{\lambda_1}\ldots\mathfrak{t}_m^{\lambda_m}$$

auch dann, wenn beide Summen nur auf diejenigen Werthsysteme $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ erstreckt werden, für welche $\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m \leqq \mathfrak{r}$ ist. Die Differentialgleichung (12′.)

$$\mathfrak{D}_\alpha(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n) - \Sigma\mathfrak{E}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda \mathfrak{z}_1^{\lambda_1}\ldots\mathfrak{z}_m^{\lambda_m} = 0 \quad (\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m \leqq \mathfrak{r})$$

geht demnach durch die Substitution (17.) wirklich in die Differentialgleichung (12″.)

$$\mathfrak{D}_\alpha(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n) - \Sigma\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda \mathfrak{t}_1^{\lambda_1}\ldots\mathfrak{t}_m^{\lambda_m} = 0 \quad (\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m \leqq \mathfrak{r})$$

über.

die vorgeschriebenen positiven Werthe sind, während die Grössen

$$(\mathfrak{y}_\alpha)_{x^\lambda t_1^{\lambda_1}\dots t_m^{\lambda_m}} \qquad (\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\dots \geqq \mathfrak{r})$$

durch die Recursionsformel (21.) für $\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\dots > \mathfrak{r}$ bestimmt werden. Da die so abgeänderte Reihe (19.) aus der für hinreichend kleine Werthe von $|x|, |\mathfrak{z}_1|, \dots, |\mathfrak{z}_m|$ convergenten abgeänderten Reihe (14.) durch die Substitution (17.) hervorgeht, so ist sie für hinreichend kleine Werthe von $|x|, |t_1|, \dots, |t_m|$ convergent. Wenn wir $\mathfrak{r}$ so gross annehmen, dass für $\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\dots+\lambda_m\mathfrak{a}_m > \mathfrak{r}$ die sämmtlichen Zahlen

$$\lambda+\lambda_1(\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon)+\dots+\lambda_m(\mathfrak{a}_m-\nu_m\varepsilon)-(\mathfrak{a}_\alpha-\nu_\alpha\varepsilon)$$

positiv sind, und wenn wir die willkürlich zu wählenden Grössen $\mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m}$ $(\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\dots \leqq \mathfrak{r})$ positiv nehmen, so liefert die Recursionsformel (21.) für $\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\dots > \mathfrak{r}$ auch für sämmtliche Grössen $\mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m}$ $(\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\dots > \mathfrak{r})$ positive Werthe.

Um aus der Convergenz der so bestimmten Reihe $\Sigma\mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m}x^\lambda t_1^{\lambda_1}\dots t_m^{\lambda_m}$ auf diejenigen der Reihe $\Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m}x^\lambda t_1^{\lambda_1}\dots t_m^{\lambda_m}$ zu schliessen, vergleichen wir den Coefficienten von $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m}$ in der Recursionsformel (11.),

$$\lambda+\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_m a_m-a_\alpha,$$

mit

$$\lambda+\lambda_1(\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon)+\dots+\lambda_m(\mathfrak{a}_m-\nu_m\varepsilon)-(\mathfrak{a}_\alpha-\nu_\alpha\varepsilon),$$

dem Coefficienten von $\mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m}$ in der Recursionsformel (21.). Wir weisen nach, dass zwei positive Grössen $\mathfrak{r}$ und g in der Art vorhanden sind, dass für alle Werthsysteme $(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, für welche $\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\dots+\lambda_m\mathfrak{a}_m > \mathfrak{r}$ ist,

$$\left|\frac{\lambda+\lambda_1(\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon)+\dots+\lambda_m(\mathfrak{a}_m-\nu_m\varepsilon)-(\mathfrak{a}_\alpha-\nu_\alpha\varepsilon)}{\lambda+\lambda_1 a_1+\dots+\lambda_m a_m-a_\alpha}\right| < g$$

ist. Zur Abkürzung benutzen wir die Bezeichnung:

$$Q^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_m} = \frac{\lambda+\lambda_1(\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon)+\dots-(\mathfrak{a}_\alpha-\nu_\alpha\varepsilon)}{\lambda+\lambda_1 a_1+\dots-a_\alpha}.$$

Setzt man

$$a_\alpha = p_\alpha+q_\alpha\sqrt{-1}, \qquad (\alpha=1,\dots,n)$$

so ist

$$0 < \mathfrak{a}_i-\nu_i\varepsilon \leqq \mathfrak{a}_i \leqq p_i \qquad (i=1,\dots,m)$$

$$\mathfrak{a}_k = p_k \leqq 0. \qquad (k=m+1,\dots,n)$$

Für $k > m$ ist $\nu_k = 0$ und

$$\begin{aligned}\lambda+\lambda_1(\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon)+\cdots+\lambda_m(\mathfrak{a}_m-\nu_m\varepsilon)-\mathfrak{a}_k \\ \leqq \lambda+\lambda_1 p_1+\cdots+\lambda_m p_m-p_k \\ \leqq \sqrt{(\lambda+\lambda_1 p_1+\cdots+\lambda_m p_m-p_k)^2+(\lambda_1 q_1+\cdots+\lambda_m q_m-q_k)^2} \\ = |\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m-a_k|,\end{aligned}$$

also

$$|Q^{(k)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}| \leqq 1. \qquad (k=m+1, \ldots, n)$$

Ist $i \leqq m$, aber $\lambda_i > 0$, so ist der Zähler von $Q^{(i)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$

$$\begin{aligned}\lambda+\lambda_1(\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon)+\cdots+(\lambda_i-1)(\mathfrak{a}_i-\nu_i\varepsilon)+\cdots+\lambda_m(\mathfrak{a}_m-\nu_m\varepsilon) \\ \leqq \lambda+\lambda_1 p_1+\cdots+(\lambda_i-1)p_i+\cdots+\lambda_m p_m \\ \leqq |\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+(\lambda_i-1)a_i+\cdots+\lambda_m a_m|,\end{aligned}$$

also auch

$$|Q^{(i)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}| \leqq 1. \qquad (i=1, \ldots, m;\ \lambda_i > 0)$$

Es sei schliesslich $\lambda_i = 0$. Die Zahl $\mathfrak{r}$ nehmen wir so an, dass für $\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m > \mathfrak{r}$:

$$\lambda+\lambda_1(\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon)+\cdots+\lambda_m(\mathfrak{a}_m-\nu_m\varepsilon)-p_i > 0,$$

mithin auch wegen $\mathfrak{a}_i \leqq p_i$

$$\lambda+\lambda_1(\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon)+\cdots+\lambda_m(\mathfrak{a}_m-\nu_m\varepsilon)-(\mathfrak{a}_i-\nu_i\varepsilon) > 0$$

und wegen $\mathfrak{a}_1 \leqq p_1, \ldots, \mathfrak{a}_m \leqq p_m$

$$\lambda+\lambda_1 p_1+\cdots+\lambda_m p_m-p_i > 0$$

ist. Dann lässt sich eine positive Grösse f so angeben, dass für

$$\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m > \mathfrak{r}:$$

$$|\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m-a_i| > f$$

ist. Wir können schreiben:

$$Q^{(i)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} = \frac{\lambda+\lambda_1(\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon)+\cdots+\lambda_m(\mathfrak{a}_m-\nu_m\varepsilon)-p_i}{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m-a_i}+\frac{p_i-\mathfrak{a}_i+\nu_i\varepsilon}{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m-a_i};$$

der absolute Betrag des zweiten Bruches ist für $\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots > \mathfrak{r}$ kleiner als $\frac{p_i-\mathfrak{a}_i+\nu_i\varepsilon}{f}$; der Zähler des ersten Bruches ist nicht grösser als

$$\lambda+\lambda_1 p_1+\cdots+\lambda_m p_m-p_i,$$

d. h. nicht grösser als der reelle Theil und demnach auch nicht grösser als der absolute Betrag des Nenners, so dass der absolute Betrag des ersten

Bruches höchstens gleich 1 sein kann. Wenn man also

$$g > 1+\frac{p_i-\mathfrak{a}_i+\nu_i\varepsilon}{f}$$

annimmt, so ist

$$|Q^{(i)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}| < g, \qquad (\lambda_i=0,\ \lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m > \mathfrak{r})$$

w. z. b. w.

Wir setzen

$$\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m = \mathfrak{a},$$
$$\lambda_1\nu_1+\cdots+\lambda_m\nu_m = \nu,$$

wir bezeichnen die dem Indexsystem $(\lambda', \lambda'_1, \ldots, \lambda'_m)$ entsprechenden Grössen mit $\mathfrak{a}'$ und ν' und beweisen den Hülfssatz:

„Ist $\mathfrak{a} > \mathfrak{r}$ und

$$|C^{(a)}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}| < \mathfrak{S}^{(a)}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}\cdot g^{2\mathfrak{a}'-\nu'-1}$$

für $\mathfrak{a}' < \mathfrak{a}$, sowie für $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$ und $\nu' > \nu$, so ist auch

$$|C^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}| < \mathfrak{S}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}\cdot g^{2\mathfrak{a}-\nu-1}.$$"

Zum Beweise vergleichen wir die zur Bestimmung von $C^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ und $\mathfrak{S}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ dienenden Recursionsformeln (11.) und (21.). Auf Grund der gemachten Voraussetzung ist wegen

$$\lambda-\mu_h+(\lambda_1-\mu_{h1})\mathfrak{a}_1+\cdots = \mathfrak{a},$$
$$(\lambda_1-\mu_{h1})\nu_1+\cdots+(\lambda_h+1)\nu_h+\cdots = \nu+1:$$
$$|C^{(a)}_{\lambda-\mu_h,\lambda_1-\mu_{h1},\ldots,\lambda_h+1,\ldots}| < \mathfrak{S}^{(a)}_{\lambda-\mu_h,\lambda_1-\mu_{h1},\ldots,\lambda_h+1,\ldots}\cdot g^{2\mathfrak{a}-\nu-2};$$

ferner ist

$$|C^{(a')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}\,C^{(a'')}_{\lambda''\lambda''_1\ldots\lambda''_m}\ldots| < \mathfrak{S}^{(a')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}\,\mathfrak{S}^{(a'')}_{\lambda''\lambda''_1\ldots\lambda''_m}\ldots\times g^{2(\mathfrak{a}'+\mathfrak{a}''+\cdots)-(\nu'+\nu''+\cdots)-(k_1+\cdots+k_n)};$$

der Exponent von g ist gleich

$$2(\mathfrak{a}-k)-\nu-(k_1+\cdots+k_n) = 2\mathfrak{a}-\nu-(2k+k_1+\cdots+k_n) \leqq 2\mathfrak{a}-\nu-2,$$

da die Verbindung $k=0,\ k_1+\cdots+k_n=1$ ausgeschlossen ist. Die rechte Seite der Gleichung (11.) ist demnach dem absoluten Betrage nach kleiner als die rechte Seite der Gleichung (21.) multiplicirt mit $g^{2\mathfrak{a}-\nu-2}$. Folglich ist

$$|C^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}| < \mathfrak{S}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}\cdot g^{2\mathfrak{a}-\nu-2}\cdot\left|\frac{\lambda+\lambda_1(\mathfrak{a}_1-\nu_1\varepsilon)+\cdots}{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots}\right| < \mathfrak{S}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}\cdot g^{2\mathfrak{a}-\nu-1},$$

w. z. b. w.

Wenn man nun die willkürlich anzunehmenden positiven Grössen $\mathfrak{S}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ $(\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{r})$ so wählt, dass für $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{r}$

$$|C^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}| < \mathfrak{S}^{(a)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}\cdot g^{2\mathfrak{a}-\nu-1}$$

ist, so ist auf Grund des Hülfssatzes für alle Werthsysteme $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$|C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}| < \mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \cdot g^{2\mathfrak{a}-\nu+1} < \mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \cdot g^{2\mathfrak{a}} = \mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \cdot g^{2(\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m)}.$$

Wir nehmen an, die positiven Zahlen $r, r_1, \ldots, r_m$ seien so gewählt, dass die Reihe

$$\Sigma \mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda \mathfrak{t}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{t}_m^{\lambda_m}$$

für

$$|x| = r, \quad |\mathfrak{t}_1| = r_1, \quad \ldots, \quad |\mathfrak{t}_m| = r_m$$

convergirt. Dann ist, wenn man

$$|x| \leqq \frac{r}{g^2}, \quad |t_1| \leqq \frac{r_1}{g^{2\mathfrak{a}_1}}, \quad \ldots, \quad |t_m| \leqq \frac{r_m}{g^{2\mathfrak{a}_m}}$$

annimmt,

$$|C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda t_1^{\lambda_1} \ldots t_m^{\lambda_m}| < \mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \cdot g^{2(\lambda+\lambda_1\mathfrak{a}_1+\cdots+\lambda_m\mathfrak{a}_m)} \cdot \left(\frac{r}{g^2}\right)^\lambda \left(\frac{r_1}{g^{2\mathfrak{a}_1}}\right)^{\lambda_1} \cdots \left(\frac{r_m}{g^{2\mathfrak{a}_m}}\right)^{\lambda_m}$$
$$= \mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} r^\lambda r_1^{\lambda_1} \ldots r_m^{\lambda_m}.$$

Daraus, dass der absolute Betrag eines jeden Gliedes der Reihe (8.) kleiner ist als das entsprechende Glied der aus lauter positiven Gliedern bestehenden convergenten Reihe $\Sigma \mathfrak{G}^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} r^\lambda r_1^{\lambda_1} \ldots r_m^{\lambda_m}$, folgt die Convergenz der Reihe (8.) für den Fall, dass die absoluten Beträge von $x, t_1, \ldots, t_m$ die oben angegebenen Grenzen nicht überschreiten.

Bisher waren in dem Differentialgleichungssystem (1.) die Grössen $a_1, \ldots, a_m$ verschieden vorausgesetzt; es sei jetzt

$$a_{\alpha'} = a' \quad (\alpha' = \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{r'}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{\alpha^{(m)}} = a^{(m)} \quad (\alpha^{(m)} = \alpha^{(m)}_1, \ldots, \alpha^{(m)}_{r^{(m)}}),$$

die reellen Theile von $a', \ldots, a^{(m)}$ seien positiv, während diejenigen Grössen a_α, deren Index α keinen der angegebenen Werthe hat, negative oder verschwindende reelle Theile haben sollen. Die zwischen $a', \ldots, a^{(m)}$ bestehenden Relationen stellen wir ebenso dar, wie bisher die Beziehungen zwischen $a_1, \ldots, a_m$. Insbesondere sei

$$a^{(i)} = \mu_i + \mu_{i1} a' + \cdots + \mu_{i,i-1} a^{(i-1)},$$
$$\nu_i = 1 + \mu_{i1}\nu_1 + \cdots + \mu_{i,i-1}\nu_{i-1}.$$

Setzen wir

$$(7^a.) \qquad t_i = x^{a^{(i)}} (-\log x)^{\nu_i}, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

so wird das Differentialgleichungssystem (1.) durch ein System von Potenzreihen

$$(8^a.) \qquad y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^\lambda t_1^{\lambda_1} \ldots t_m^{\lambda_m} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

befriedigt, deren Coefficienten der Recursionsformel

$$(11^{a}.)\quad \begin{cases} (\lambda+\lambda_1 a'+\cdots+\lambda_m a^{(m)}-a_\alpha)C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \\ \qquad = \sum_{h=1}^{m}\nu_h(\lambda_h+1)C^{(\alpha)}_{\lambda-\mu_h,\lambda_1-\mu_{h1},\ldots,\lambda_h+1,\ldots}+\Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n}C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}C^{(\alpha'')}_{\lambda''\lambda''_1\ldots\lambda''_m}\cdots \end{cases}$$

genügen. Die Glieder vom Gewicht $a^{(i)}$ in der Reihe für $y_{\alpha^{(i)}}$ $(\alpha^{(i)}=\alpha^{(i)}_1,\ldots,\alpha^{(i)}_{r^{(i)}})$

$$y_{\alpha^{(i)}} = \sum_{k=0}^{\nu_i} c^{(\alpha^{(i)})}_k x^{a^{(i)}}(-\log x)^{\nu_i-k}+\cdots$$

genügen den Gleichungen

$$(11'^{a}.)\qquad 0=(\nu_i-k+1)c^{(\alpha^{(i)})}_{k-1}+G^{(\alpha^{(i)})}_k, \qquad (k=0,1,\ldots,\nu_i)$$

wo $G^{(\alpha^{(i)})}_k$ eine ganze Function von Grössen $C^{(\alpha)}_{\lambda'\lambda'_1\ldots\lambda'_m}$ bedeutet, deren Gewicht kleiner als $a^{(i)}$ ist. Die Grössen

$$c^{(\alpha^{(i)})}_{\nu_i}=(y_{\alpha^{(i)}})_{x^{a^{(i)}}}=C_{\alpha^{(i)}}$$

bleiben unbestimmt, und sämmtliche Grössen $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ erscheinen als ganze rationale Functionen der $r'+\cdots+r^{(m)}$ unbestimmten Grössen $C_{\alpha'},\ldots,C_{\alpha^{(m)}}$.

Dass die Reihen (8ª.) für hinreichend kleine Werthe von $|x|,|t_1|,\ldots,|t_m|$ convergent sind, wird wie oben bewiesen.

Die Hauptergebnisse des gegenwärtigen Paragraphen fassen wir in den folgenden Satz zusammen:

Die aus dem Differentialgleichungssystem

$$x\frac{dy_\alpha}{dx}=\sum_{\beta=1}^{n}a_{\alpha\beta}y_\beta+\Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n}x^k y_1^{k_1}\ldots y_n^{k_n} \qquad (\alpha=1,\ldots,n)$$

$$(k=1,\ k_1=\cdots=k_n=0;\ k+k_1+\cdots+k_n>1)$$

gebildete Determinante

$$\Delta(s)=|a_{\alpha\beta}-s\delta_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha,\beta=1,\ldots,n)$$

habe lauter einfache Elementartheiler $s-a_1,\ldots,s-a_n$. *Die Grössen*

$$a_{\alpha'}=a'\ (\alpha'=\alpha'_1,\ldots,\alpha'_{r'}),\quad\ldots,\quad a_{\alpha^{(m)}}=a^{(m)}\ (\alpha^{(m)}=\alpha^{(m)}_1,\ldots,\alpha^{(m)}_{r^{(m)}})$$

mögen positive, die übrigen Grössen a_α *negative oder verschwindende reelle Theile besitzen. Zwischen den Grössen* $a',\ldots,a^{(m)}$, *die so angeordnet seien, dass die reellen Theile eine nicht abnehmende Reihe bilden, dürfen beliebige Beziehungen*

$$(\varrho.)\qquad a^{(i)}=\varrho_i+\varrho_{i1}a'+\cdots+\varrho_{i,i-1}a^{(i-1)}$$

bestehen, worin $\varrho_i,\varrho_{i1},\ldots,\varrho_{i,i-1}$ *positive ganze Zahlen mit Einschluss der Null darstellen. Den Grössen* $a',\ldots,a^{(m)}$ *werden ganze positive Zahlen (ein-*

schliesslich Null) $\nu_1, \ldots, \nu_m$ ***zugeordnet. Kommt*** $a^{(i)}$ ***nicht auf der linken Seite einer der Gleichungen*** $(\varrho.)$ ***vor, so ist*** $\nu_i = 0$. ***Anderenfalls wird*** ν_i ***durch das folgende recurrirende Verfahren erhalten: man bildet aus jeder Gleichung*** $(\varrho.)$, ***auf deren linker Seite*** a_i ***steht, den Ausdruck*** $\varrho_{i1}\nu_1 + \cdots + \varrho_{i,i-1}\nu_{i-1}$ ***und nimmt*** ν_i ***um*** 1 ***grösser als den grössten dieser Ausdrücke. Dann wird das Differentialgleichungssystem durch ein System von Reihen***

$$y_\alpha = \sum_{(\lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_m > 0)} C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a'+\cdots+\lambda_m a^{(m)}} (-\log x)^{\lambda_1\nu_1+\cdots+\lambda_m\nu_m} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

befriedigt, welche von $r'+\cdots+r^{(m)}$ ***willkürlichen Constanten abhängen und für hinreichend kleine Werthe von*** $|x|$ ***convergiren.***

Man kann diejenigen Reihenglieder, für welche Gewicht und Rang

$$(\delta.) \qquad \begin{cases} \lambda+\lambda_1 a'+\cdots+\lambda_m a^{(m)} = a, \\ \lambda_1\nu_1+\cdots+\lambda_m\nu_m = \nu \end{cases}$$

übereinstimmen, in ein einziges Glied

$$C^{(\alpha)}_{a,\nu} x^a (-\log x)^\nu$$

zusammenfassen und erhält dann ein Reihensystem

$$(6^{\mathrm{b}}.) \qquad y_\alpha = \sum_{a,\nu} C^{(\alpha)}_{a,\nu} x^a (-\log x)^\nu, \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

wo die Summe über diejenigen verschiedenen Werthepaare a, ν zu erstrecken ist, welche die Gleichungen $(\delta.)$ ergeben, wenn man darin für $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ alle möglichen Systeme positiver oder verschwindender ganzer Zahlen (mit Ausschluss von $\lambda = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$) setzt. Auch die Reihe $(6^{\mathrm{b}}.)$ ist für hinreichend kleine Werthe von $|x|$ convergent.

Um eine Recursionsformel für $C^{(\alpha)}_{a,\nu}$ herzuleiten, setzen wir die Reihe $(6^{\mathrm{a}}.)$ für y_α sowie

$$x\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_{a,\nu} \left(a C^{(\alpha)}_{a,\nu} - (\nu+1) C^{(\alpha)}_{a,\nu+1}\right) x^a (-\log x)^\nu$$

in (1.) ein und erhalten durch Vergleichung der Coefficienten von $x^a(-\log x)^\nu$:

$$(11^{\mathrm{b}}.) \qquad (a-a_\alpha) C^{(\alpha)}_{a\nu} = (\nu+1) C^{(\alpha)}_{a,\nu+1} + \sum A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n} C^{(\bar{\alpha})}_{\bar{a},\bar{\nu}} C^{(\bar{\bar{\alpha}})}_{\bar{\bar{a}},\bar{\bar{\nu}}} \ldots,$$

wo die Zahl der Factoren $C^{(\bar{\alpha})}_{\bar{a},\bar{\nu}}$, $C^{(\bar{\bar{\alpha}})}_{\bar{\bar{a}},\bar{\bar{\nu}}}$, ... in einem Gliede der Summe auf der rechten Seite gleich $k_1+\cdots+k_n$ ist und die Indices die Bedingungen erfüllen:

$$\bar{a}+\bar{\bar{a}}+\cdots = a-k,$$
$$\bar{\nu}+\bar{\bar{\nu}}+\cdots = \nu.$$

Für $a = a_{\alpha^{(i)}} = a^{(i)}$ nimmt die Recursionsformel die Gestalt an:

$$(11^{b'}.) \qquad 0 = (\nu+1)C^{(\alpha^{(i)})}_{\alpha^{(i)},\nu+1} + \Sigma A^{(\alpha^{(i)})}_{kk_1\ldots k_n} C^{(\bar{\alpha})}_{\bar{\alpha},\nu} C^{(\bar{\bar{\alpha}})}_{\bar{\bar{\alpha}},\nu} \ldots,$$

wo für ν die Werthe $0, 1, \ldots, \nu_i - 1$ gesetzt werden können, während $C^{(\alpha^{(i)})}_{\alpha^{(i)},0}$ unbestimmt bleibt.

§ 3.

Einige Beispiele mögen zur Erläuterung des § 2 dienen. Es handelt sich um Differentialgleichungssysteme von der Form

$$x\frac{dy_\alpha}{dx} = a_\alpha y_\alpha + \Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1\ldots k_n} x^k y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n}, \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

zu deren Kennzeichnung wir nur die Zahl n und die Werthe der Grössen $a_1, \ldots, a_n$ bezw. die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen anzugeben brauchen.

I. Es sei $n = 3$; zwischen den Grössen a_1, a_2, a_3, deren reelle Theile positiv seien, bestehen die Beziehungen

$$a_2 = \mu_2 + a_1,$$
$$a_3 = \mu_3 + a_2 = \mu_3 + \mu_2 + a_1,$$

wo μ_2, μ_3 ganze positive Zahlen bedeuten. a_1 sei jedoch so gewählt, dass ausser den angegebenen nicht noch weitere Beziehungen stattfinden.

Dann ist $\nu_1 = 0$; $\mu_2 + a_1$ hat den Rang 0, folglich ist $\nu_2 = 1$; $\mu_3 + \mu_2 + a_1$ ist vom Rang 0, $\mu_3 + a_2$ vom Rang 1, also $\nu_2 = 2$. Setzt man

$$t_1 = x^{a_1},$$
$$t_2 = x^{a_2}(-\log x),$$
$$t_3 = x^{a_3}(-\log x)^2,$$

so wird das Differentialgleichungssystem durch ein System von Reihen

$$y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3} x^\lambda t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} t_3^{\lambda_3} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

befriedigt, für deren Coefficienten man mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$x\frac{dt_1}{dx} = a_1 t_1,$$
$$x\frac{dt_2}{dx} = a_2 t_2 - x^{\mu_2} t_1,$$
$$x\frac{dt_3}{dx} = a_3 t_3 - 2x^{\mu_3} t_2$$

die Recursionsformel erhält:

$$(\lambda+\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3-a_\alpha)C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$$
$$= (\lambda_2+1)C^{(\alpha)}_{\lambda-\mu_2,\lambda_1-1,\lambda_2+1,\lambda_3}+2(\lambda_3+1)C^{(\alpha)}_{\lambda-\mu_3,\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3+1}+\Sigma A^{(\alpha)}_{kk_1k_2k_3}C^{(\alpha')}_{\lambda'\lambda'_1\lambda'_2\lambda'_3}\cdots;$$

für

$$\alpha=1;\quad \lambda_1=1^*),$$
$$\alpha=2;\quad \lambda_2=1,$$
$$\alpha=3;\quad \lambda_3=1$$

nimmt dieselbe die Form $0=0$ an; in den Fällen

$$\alpha=2;\quad \lambda=\mu_2,\qquad \lambda_1=1,$$
$$\alpha=3;\quad \lambda=\mu_3,\qquad \lambda_2=1,$$
$$\lambda=\mu_3+\mu_2,\quad \lambda_1=1$$

erhält sie die Gestalt

$$0=(y_2)_{t_2}+\cdots,$$
$$0=2(y_3)_{t_3}+\cdots,$$
$$0=(y_3)_{x^{\mu_3}t_2}+\cdots;$$

hieraus berechnet man $(y_2)_{t_2}$, $(y_3)_{t_3}$, $(y_3)_{x^{\mu_3}t_2}$, während die drei Grössen

$$(y_1)_{t_1}=(y_1)_{x^{a_1}},\quad (y_2)_{x^{\mu_2}t_1}=(y_2)_{x^{a_2}},\quad (y_3)_{x^{\mu_3+\mu_2}t_1}=(y_3)_{x^{a_3}}$$

unbestimmt bleiben.

II. Es sei $n=3$; zwischen den Grössen a_1, a_2, a_3 mit positiven reellen Theilen bestehen die Beziehungen

$$a_2=3+2a_1,$$
$$a_3=2+3a_1+2a_2=5+5a_1+a_2=8+7a_1;$$

a_1 sei so gewählt, dass weitere Beziehungen nicht vorhanden sind.

Hier ist $\nu_1=0$; $3+2a_1$ ist vom Rang 0, also $\nu_2=1$; $8+7a_1$, $5+5a_1+a_2$, $2+3a_1+2a_2$ sind bezw. vom Rang 0, 1, 2, also $\nu_3=3$. Die Functionen

$$t_1=x^{a_1},$$
$$t_2=x^{a_2}(-\log x),$$
$$t_3=x^{a_3}(-\log x)^3$$

genügen den Differentialgleichungen

$$x\frac{dt_1}{dx}=a_1t_1,$$
$$x\frac{dt_2}{dx}=a_2t_2-x^3t_1^2,$$
$$x\frac{dt_3}{dx}=a_3t_3-3x^2t_1^3t_2^2;$$

*) Die nicht angegebenen Werthe λ, λ_1, λ_2, λ_3 sind immer gleich Null anzunehmen.

das Differentialgleichungssystem wird durch ein Reihensystem

$$y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3} x^\lambda t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} t_3^{\lambda_3} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

befriedigt, dessen Coefficienten vermittelst der Recursionsformel

$$(\lambda+\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3-a_\alpha) C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$$
$$= (\lambda_2+1) C^{(\alpha)}_{\lambda-3,\lambda_1-2,\lambda_2+1,\lambda_3} + 3(\lambda_3+1) C^{(\alpha)}_{\lambda-2,\lambda_1-3,\lambda_2-1,\lambda_3+1} + \cdots$$

berechnet werden; für $\alpha = 1$, $\lambda_1 = 1$; $\alpha = 2$, $\lambda_2 = 1$; $\alpha = 3$, $\lambda_3 = 1$ nimmt diese die Form $0 = 0$ an; für

$$\alpha = 2; \quad \lambda = 3, \quad \lambda_1 = 2,$$
$$\alpha = 3; \quad \lambda = 2, \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2,$$
$$\lambda = 5, \quad \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 1,$$
$$\lambda = 8, \quad \lambda_1 = 7$$

erhält sie die Gestalt

$$0 = (y_2)_{t_2} + \cdots,$$
$$0 = 3(y_3)_{t_3} + \cdots,$$
$$0 = 2(y_3)_{x^2 t_1^3 t_2^2} + \cdots,$$
$$0 = (y_3)_{x^5 t_1^5 t_2} + \cdots;$$

die drei Grössen

$$(y_1)_{t_1} = (y_1)_{x^{a_1}}, \quad (y_2)_{x^3 t_1^2} = (y_2)_{x^{a_2}}, \quad (y_3)_{x^8 t_1^7} = (y_3)_{x^{a_3}}$$

sind willkürlich zu wählen.

III. Es sei $n = 3$ und

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 4.$$

Hier finden die Beziehungen statt:

$$a_1 = 2,$$
$$a_2 = 1+a_1 = 3,$$
$$a_3 = 1+a_2 = 2+a_1 = 4,$$
$$= 2a_1;$$

wir haben $\nu_1 = 1$; die Verbindungen 3, $1+a_1$ sind bezw. vom Rang 0, 1, also ist $\nu_2 = 2$; 4 hat den Rang 0, $2+a_1$ den Rang 1, $1+a_2$ und $2a_1$ den Rang 2, also $\nu_3 = 3$. Für die Coefficienten des Reihensystems

$$y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3} x^\lambda t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} t_3^{\lambda_3}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

worin

$$t_1 = x^2(-\log x),$$
$$t_2 = x^3(-\log x)^2,$$
$$t_3 = x^4(-\log x)^3$$

ist, ergiebt sich mit Rücksicht auf die Differentialgleichungen

$$x\frac{dt_1}{dx} = a_1 t_1 - x^2,$$

$$x\frac{dt_2}{dx} = a_2 t_2 - 2x t_1,$$

$$x\frac{dt_3}{dx} = a_3 t_3 - 3x t_2$$

die Recursionsformel

$$(\lambda+\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3-a_\alpha) C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$$
$$= (\lambda_1+1) C^{(\alpha)}_{\lambda-2,\lambda_1+1,\lambda_2,\lambda_3} + 2(\lambda_2+1) C^{(\alpha)}_{\lambda-1,\lambda_1-1,\lambda_2+1,\lambda_3} + 3(\lambda_3+1) C^{(\alpha)}_{\lambda-1,\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3+1} + \cdots.$$

Da $1+a_2$ und $2a_1$ von gleichem Gewicht 4 und von gleichem Rang $\nu_2 = 2\nu_1 = 2$ sind, da also

$$x t_2 = t_1^2 = x^4(-\log x)^2$$

ist, so können wir annehmen, dass in der Reihe für y_3 das Glied mit t_1^2 fehlt, dass also $(y_3)_{t_1^2} = 0$ ist, und wir können auch bei der Herleitung der Recursionsformel für $\alpha = 3$ t_1^2 durch $x t_2$ ersetzen, so dass eine Recursionsformel für $\alpha = 3$; $\lambda_1 = 2$ überhaupt nicht erscheint. Oder, anders ausgedrückt, wir fassen in der Reihe für y_3 die Glieder vom Gewicht $a_3 = 4$ und vom Rang 2 in ein einziges zusammen und haben dann für die Coefficienten vom Gewicht a_i in der Reihe für y_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$y_1 = c_0^{(1)} x^2 + c_1^{(1)} x^2(-\log x) + \cdots,$$
$$y_2 = c_0^{(2)} x^3 + c_1^{(2)} x^3(-\log x) + c_2^{(2)} x^3(-\log x)^2 + \cdots,$$
$$y_3 = c_0^{(3)} x^4 + c_1^{(3)} x^4(-\log x) + c_2^{(3)} x^4(-\log x)^2 + c_3^{(3)} x^4(-\log x)^3 + \cdots$$

die Gleichungen

$$0 = (y_1)_{x^2(-\log x)} + \cdots,$$
$$0 = 2(y_2)_{x^3(-\log x)^2} + \cdots,$$
$$0 = (y_2)_{x^3(-\log x)} + \cdots,$$
$$0 = 3(y_3)_{x^4(-\log x)^3} + \cdots,$$
$$0 = 2(y_3)_{x^4(-\log x)^2} + \cdots,$$
$$0 = (y_3)_{x^4(-\log x)} + \cdots,$$

während

$$(y_1)_{x^2}, \quad (y_2)_{x^3}, \quad (y_4)_{x^4}$$

unbestimmt bleiben.

Bei zwei weiteren Beispielen sollen nur die zwischen $a_1, \ldots, a_m$ bestehenden Beziehungen aufgestellt und die Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_m$ bestimmt werden.

IV. Es sei $m = 4$ und

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 8, \quad a_4 = 13.$$

Dann bestehen die Relationen:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 2,\\
&a_2 = \quad 3a_1 = 2+2a_1 = \quad 4+a_1 = 6,\\
&a_3 = \quad a_1+a_2 = \quad 2+a_2 = 2+3a_1 = 4+2a_1 = \quad 6+a_1 = 8,\\
&\qquad\quad = \quad 4a_1\\
&a_4 = 1+2a_1+a_3 = \quad 3+a_1+a_3 = \qquad 5+a_3 = 5+a_1+a_2 = \quad 7+a_2 = 7+3a_1 = 9+2a_1 = 11+a_1 = 13,\\
&\quad = \qquad 1+2a_2 = 1+3a_1+a_2 = 3+2a_1+a_2 = \qquad 3+5a_1 = 5+4a_1\\
&\qquad\qquad = 1+6a_1.
\end{aligned}$$

Die in der Tabelle enthaltenen Verbindungen sind so in Kolonnen angeordnet, dass die Ausdrücke der letzten Kolonne den Rang 0, diejenigen der vorletzten den Rang 1 haben u. s. w. Es ist hier

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 4, \quad \nu_3 = 6, \quad \nu_4 = 9.$$

Der unmittelbar rechts von a_i stehende Ausdruck kann an Stelle der Verbindung $\mu_i + \mu_{i1}a_1 + \cdots + \mu_{i,i-1}a_{i-1}$ in § 2 gesetzt werden; die mit a_i in derselben Zeile stehenden ν_i Ausdrücke können die Stelle von $\mu_i^{(k)} + \mu_{i1}^{(k)}a_1 + \cdots + \mu_{i,i-1}^{(k)}a_{i-1}$ $(k = 1, \ldots, \nu_i)$ vertreten.

In dem folgenden Beispiele ist dieselbe Anordnung gewählt.

V. Es sei $m = 5$ und

$$a_1 = 1+i, \quad a_2 = 3+2i, \quad a_3 = 6+5i, \quad a_4 = 10+8i, \quad a_5 = 20+10i.$$

Die Gesammtheit der Beziehungen ist in der Tabelle enthalten:

$$\begin{aligned}
&a_2 = \quad 1+2a_1,\\
&a_3 = \quad 3a_1+a_2 = \quad 1+5a_1,\\
&a_4 = \quad a_1+a_2+a_3 = \quad 4a_1+2a_2 = 1+6a_1+a_2 = \quad 2+8a_1,\\
&a_5 = 7+a_2+a_4 = \qquad 8+2a_1+a_4 = \quad 8+3a_1+a_3 = \quad 9+5a_1+a_3 = 9+8a_1+a_2 = 10+10a_1,\\
&\quad = \quad 5+5a_2 = \qquad\quad 8+2a_3 = 7+4a_1+3a_2 = 8+6a_1+2a_2\\
&\qquad = 7+a_1+2a_2+a_3\\
&\qquad = 6+2a_1+4a_2;
\end{aligned}$$

die Rangzahlen sind hier:

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_2 = 1, \quad \nu_3 = 2, \quad \nu_4 = 4, \quad \nu_5 = 6.$$

§ 4.

Es soll noch in Kürze der Zusammenhang der hergeleiteten Reihenentwickelungen mit den bekannten Reihenentwickelungen für Systeme linearer Differentialgleichungen untersucht werden.

In dem System (1.), § 1 und § 2 sei die rechte Seite einer jeden Differentialgleichung eine lineare homogene Function von $y_1, \ldots, y_n$, es habe also $A^{(\alpha)}_{kk_1 \ldots kn}$ nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn $k_1 + \cdots + k_n = 1$ ist. Wir geben dem Differentialgleichungssystem die Form

$$(1.) \qquad x \frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)}_{\alpha\beta} x^k . y_\beta . \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

Es sei $a^{(0)}_{\alpha\alpha} = a_\alpha$ und $a^{(0)}_{\alpha\beta} = 0$ $(\beta \gtrless \alpha)$. Die reellen Theile der Grössen $a_1, \ldots, a_m$, welche verschieden sein mögen, seien positiv, diejenigen von $a_{m+1}, \ldots, a_n$ negativ oder Null.

Es sollen zunächst wie in § 1 keine Beziehungen zwischen $a_1, \ldots, a_m$ bestehen. Die Recursionsformel (5.), § 1 schreibt sich jetzt:

$$(2.) \qquad (\lambda + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m - a_\alpha) C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1 \ldots \lambda_m} = \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{k=1}^{\lambda} a^{(k)}_{\alpha\beta} C^{(\beta)}_{\lambda-k,\lambda_1 \ldots \lambda_m};$$

es wird also $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1 \ldots \lambda_m}$ eine lineare homogene Function von $C^{(\beta)}_{0,\lambda_1 \ldots \lambda_m}$, $C^{(\beta)}_{1,\lambda_1 \ldots \lambda_m}$, $\ldots$, $C^{(\beta)}_{\lambda-1,\lambda_1 \ldots \lambda_m}$; für $\lambda = 0$ lautet die Formel (2.)

$$(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m - a_\alpha) C^{(\alpha)}_{0,\lambda_1 \ldots \lambda_m} = 0,$$

aus welcher sich

$$C^{(\alpha)}_{0,\lambda_1 \ldots \lambda_m} = 0$$

ergiebt, wenn nicht $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$ ist. Mithin kann auch $C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1 \ldots \lambda_m}$ nur für $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$ einen von Null verschiedenen Werth haben. Man bekommt demnach eine Reihe von der Form

$$(3.) \qquad y_\alpha = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{P}_{\alpha i}(x) . x^{a_i}. \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

Es mögen nun wie in § 2 zwischen $a_1, \ldots, a_m$ beliebige Beziehungen bestehen. Die zur Bestimmung der Coefficienten der Reihe (6^b.), § 2

$$y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{a,\nu} x^a (-\log x)^\nu$$

dienende Recursionsformel (11^b.) bezw. ($11^{b'}$.), § 2 wird hier

$$(4.) \qquad (a - a_\alpha) C^{(\alpha)}_{a,\nu} = (\nu + 1) C^{(\alpha)}_{a,\nu+1} + \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{k>0} a^{(k)}_{\alpha\beta} C^{(\beta)}_{a-k,\nu}$$

bezw.

$$(4'.) \qquad 0 = (\nu+1)C^{(i)}_{a_i,\nu+1} + \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{k>0} a^{(k)}_{\alpha\beta} C^{(\beta)}_{a_i-k,\nu}.$$

Es gilt nun der Satz:

„$C^{(a)}_{a,\nu}$ ist gleich Null, wenn in der Reihe a, $a-1$, $a-2$, ... nicht mindestens $\nu+1$ der Grössen $a_1, \ldots, a_m$ enthalten sind."

Wir zeigen zunächst Folgendes:

Gilt der ausgesprochene Satz für die Gewichte $a-1$, $a-2$, ..., sowie für das Gewicht a und die Ränge $\nu+1$, $\nu+2$, ..., so gilt er auch für das Gewicht a und den Rang ν.

Denn ist a nicht gleich a_α, so ist nach (4.) $C^{(a)}_{a,\nu}$ eine lineare homogene Function von $C^{(a)}_{a,\nu+1}$ und verschiedenen Grössen $C^{(\beta)}_{a-k,\nu}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Wenn die Reihe a, $a-1$, $a-2$, ... nicht mindestens $\nu+2$ der Grössen $a_1, \ldots, a_m$ enthält, ist $C^{(a)}_{a,\nu+1} = 0$; wenn die Reihe a, $a-1$, $a-2$, ... weniger als $\nu+1$ der Grössen $a_1, \ldots, a_m$ enthält, so gilt dasselbe auch für die Reihe $a-k$, $a-k-1$, ..., und demnach ist $C^{(a)}_{a-k,\nu} = 0$. Dann ist aber nach Gleichung (4.) $C^{(a)}_{a,\nu} = 0$. — Ist nun $a = a_i$, so stellt sich nach (4'.) $C^{(i)}_{a_i,\nu}$ als lineare homogene Function verschiedener Grössen $C^{(\beta)}_{a_i-k,\nu-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ dar. Wenn die Reihe a_i, a_i-1, a_i-2, ... weniger als $\nu+1$ der Grössen $a_1, \ldots, a_m$ enthält, so kommen in der Reihe a_i-k, a_i-k-1, ... $(k>0)$, in welcher jedenfalls a_i fehlt, weniger als ν der Grössen $a_1, \ldots, a_m$ vor; dann ist der Voraussetzung nach $C^{(\beta)}_{a_i-k,\nu-1} = 0$, so dass sich aus Gleichung (4'.) $C^{(i)}_{a_i,\nu} = 0$ ergiebt.

Wenn jetzt noch gezeigt wird, dass der ausgesprochene Satz für das Gewicht a gültig ist, wenn die Zahl a so beschaffen ist, dass die Zahlen $a-1$, $a-2$, ... nicht als Gewichte auftreten können (d. h. nicht in der Form $\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m$ darstellbar sind), so ist seine allgemeine Gültigkeit bewiesen. In diesem Falle schreibt sich die Formel (4'.), wenn man für ν der Reihe nach die mit dem Gewicht a vereinbaren Rangzahlen $\bar{\nu}$, $\bar{\nu}-1$, ... einsetzt:

$$\begin{aligned}
(a-a_\alpha)C^{(a)}_{a,\bar{\nu}} &= 0,\\
(a-a_\alpha)C^{(a)}_{a,\bar{\nu}-1} &= \bar{\nu}C^{(a)}_{a,\bar{\nu}},\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &,
\end{aligned}$$

und hieraus ergiebt sich, wenn a von a_α verschieden ist:

$$C^{(a)}_{a,\bar{\nu}} = 0, \quad C^{(a)}_{a,\bar{\nu}-1} = 0, \quad \ldots, \quad C^{(a)}_{a,0} = 0.$$

Für $a = a_i$ wird die Formel (4'.) für $\nu = \nu_i, \nu_i - 1, \ldots, 1$:

$$\begin{aligned} \nu_i C^{(i)}_{a_i,\nu_i} &= 0, \\ (\nu_i - 1) C^{(i)}_{a_i,\nu_i - 1} &= 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ C^{(i)}_{a_i,1} &= 0, \end{aligned}$$

während $C^{(i)}_{a_i,0}$ unbestimmt bleibt. Unter der jetzigen Voraussetzung reducirt sich die Reihe $a, a-1, a-2, \ldots$ auf die Zahl a, und es verschwindet $C^{(a)}_{a,\nu}$ für $\nu > 0$ oder für beliebiges ν, je nachdem a gleich einer der Grössen a_i ist oder nicht.

Ebenso gestaltet sich die Betrachtung, wenn diejenigen Grössen $a_1, \ldots, a_n$, deren reelle Theile positiv sind, nicht sämmtlich verschieden sind. Das Auftreten von Logarithmen wird bei Systemen linearer Differentialgleichungen nur durch Beziehungen von der Form $a^{(i)} = \mu + a^{(h)}$ bedingt, und es ergiebt sich als Specialfall unserer jetzigen Sätze die Form der Reihenentwickelungen, wie ich sie in Bd. 39 der Math. Ann. für den Fall einfacher Elementartheiler der Determinante (δ.) des Differentialgleichungssystems (D.) der Einleitung angegeben habe, so weit die Grössen $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Theile besitzen.

§ 5.

An Stelle des bisher betrachteten Systems von n Differentialgleichungen erster Ordnung setzen wir jetzt die Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$(1.) \qquad x^n \frac{d^n y}{dx^n} = G\Big(x,\ y,\ x\frac{dy}{dx},\ \ldots,\ x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big),$$

worin G eine gewöhnliche Potenzreihe der beigefügten $n+1$ Grössen bedeutet, welche verschwindet, wenn diese Grössen sämmtlich den Werth Null haben. Es sei

$$(2.) \quad \begin{cases} G = c_1 x^{n-1}\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + c_{n-1} x \dfrac{dy}{dx} + c_n y \\ \qquad + \sum A_{k k_1 \ldots k_n} x^k y^{k_1} \Big(x\dfrac{dy}{dx}\Big)^{k_2} \cdots \Big(x^{n-1}\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big)^{k_n}. \\ \qquad\qquad (k = 1,\ k_1 = \cdots = k_n = 0;\ k + k_1 + \cdots + k_n > 1) \end{cases}$$

Die n Functionen

$$y_1 = y, \quad y_2 = x\frac{dy}{dx}, \quad y_3 = x^2\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots, \quad y_n = x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

genügen dem System der Differentialgleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} x\frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ x\frac{dy_2}{dx} = y_2+y_3, \\ x\frac{dy_3}{dx} = 2y_3+y_4, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x\frac{dy_n}{dx} = (n-1)y_n+G(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Die Determinante $\Delta(s)$ wird hier

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} -s & 1 & & & \\ & 1-s & 1 & & \\ & & 2-s & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_1+n-1-s \end{vmatrix};$$

die Gleichung $\Delta(s)=0$ oder

$$(4.)\quad s(s-1)\ldots(s-n+1) = c_1 s(s-1)\ldots(s-n+2)+\cdots+c_{n-1}s+c_n$$

habe die Wurzeln $a_1, \ldots, a_n$; die reellen Theile von $a_1, \ldots, a_m$ seien positiv, diejenigen von $a_{m+1}, \ldots, a_n$ negativ oder Null. Einer σ-fachen Wurzel a_α der Gleichung (4.) entspricht nothwendig ein σ-facher Elementartheiler $(s-a_\alpha)^\sigma$ der Determinante $\Delta(s)$, denn es können nicht sämmtliche Unterdeterminanten von $\Delta(s)$ für $s=a_\alpha$ verschwinden, da die Unterdeterminante von c_n den Werth ± 1 hat.

Der Fall einfacher Elementartheiler der Determinante $\Delta(s)$, auf welchen wir uns vorläufig beschränken, deckt sich hier also mit dem Fall einfacher Wurzeln der Gleichung (4.). Falls zwischen $a_1, \ldots, a_m$ keine Relation von der Form

$$a_i = \varrho_i+\varrho_{i1}a_1+\cdots+\varrho_{i,i-1}a_{i-1}$$

besteht, worin $\varrho_i, \varrho_{i1}, \ldots, \varrho_{i,i-1}$ ganze positive Zahlen bedeuten, wird die Differentialgleichung (1.) nach § 1 durch eine Reihe

$$(5.)\quad y = \sum_{(\lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_m>0)} C_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m}$$

befriedigt, welche für hinreichend kleine Werthe von $|x|$ convergirt. Wir wollen nun die Berechnung der Coefficienten der Reihe (5.) unmittelbar an

der Differentialgleichung (1.) vornehmen. Durch ϱ-malige Differentiation der Reihe (5.) unter Einführung der Bezeichnung

$$f_\varrho(a) = a(a-1)\ldots(a-\varrho+1); \quad f_0(a) = 1$$

erhalten wir

$$x^\varrho \frac{d^\varrho y}{dx^\varrho} = \Sigma f_\varrho(\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m) C_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m},$$

und durch Einsetzen der Reihe (5.) in die Differentialgleichung (1.) ergiebt sich, wenn man die Bezeichnung benutzt

$$\Delta(a) = f_n(a) - \sum_{\varrho=1}^{n} c_{n-\varrho} f_\varrho(a),$$

die Recursionsformel

$$(6.) \quad \begin{cases} \Delta(\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m).C_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} \\ = \Sigma A_{kk_1\ldots k_n} f_{\varrho'}(\lambda'+\lambda_1' a_1+\cdots+\lambda_m' a_m) f_{\varrho''}(\lambda''+\lambda_1'' a_1+\cdots+\lambda_m'' a_m)\ldots C_{\lambda'\lambda_1'\ldots\lambda_m'} C_{\lambda''\lambda_1''\ldots\lambda_m''}; \end{cases}$$

die Zahl der Factoren f und C in jedem Glied der Summe auf der rechten Seite ist $k_1+\cdots+k_n$, es ist

$$\begin{aligned} \lambda' +\lambda''+\cdots &= \lambda-k, \\ \lambda_1'+\lambda_1''+\cdots &= \lambda_1, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot &\quad\cdot \\ \lambda_m'+\lambda_m''+\cdots &= \lambda_m, \end{aligned}$$

die Indices ϱ', ϱ'', ... sind die Zahlen 0, 1, ..., $n-1$ bezw. k_1-, ..., k_n-mal in irgend einer Anordnung. Die Gleichung $\Delta(a)=0$ hat die Wurzeln a_i $(i=1, \ldots, m)$; wegen $\Delta(a_i)=0$ bleiben die m Coefficienten

$$C_i = (y)_{x^{\sigma_i}} \qquad (i=1, \ldots, m)$$

unbestimmt, während man aus (6.) für alle übrigen Coefficienten $C_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m}$ ganze rationale Functionen von $C_1, \ldots, C_m$ erhält.

Wir nehmen nun an, dass zwischen $a_1, \ldots, a_m$ beliebige Beziehungen

$$a_i = \varrho_i+\varrho_{i1} a_1+\cdots+\varrho_{i,i-1} a_{i-1}$$

bestehen, und führen dieselben Bezeichnungen und Definitionen ein wie in § 2. Nach § 2 wird der Differentialgleichung durch eine von m willkürlichen Constanten abhängige Reihe

$$(7.) \qquad y = \sum_{(\lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_m>0)} C_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m} (-\log x)^{\lambda_1\nu_1+\cdots+\lambda_m\nu_m}$$

genügt, welche für hinreichend kleine Werthe von $|x|$ convergirt. Indem

wir, wie am Schluss von § 2, sämmtliche Glieder von gleichem Gewicht a und Rang ν

$$(8.)\qquad \begin{cases} a = \lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m, \\ \nu = \lambda_1\nu_1+\cdots+\lambda_m\nu_m \end{cases}$$

in ein einziges Glied zusammenfassen, schreiben wir die Reihe (7.) in der Form

$$(9.)\qquad y = \sum_{a,\nu} C_{a,\nu}x^a(-\log x)^\nu,$$

wo für a, ν alle diejenigen Werthepaare zu setzen sind, welche sich aus den Gleichungen (8.) ergeben, wenn man für $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ positive oder verschwindende ganze Zahlen (unter Ausschluss des Werthsystems $\lambda = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$) setzt. Durch einmalige Differentiation der Reihe (9.) erhält man

$$x\frac{dy}{dx} = \sum_{a,\nu}(aC_{a,\nu}-(\nu+1)C_{a,\nu+1})x^a(-\log x)^\nu,$$

durch ϱ-malige Differentiation

$$(\alpha.)\qquad x^\varrho\frac{d^\varrho y}{dx^\varrho} = \sum_{a,\nu}\sum_{k=0}^{\varrho}(-1)^k f_\varrho^{(k)}(a)f_k(\nu+k)C_{a,\nu+k}x^a(-\log x)^\nu,$$

wobei die Bezeichnung angewandt ist:

$$f_\varrho^{(k)}(a) = \frac{1}{k!}\frac{d^k f_\varrho(a)}{da^k}.$$

Für $\varrho = 1$ ist die Gleichung ($\alpha.$) richtig, denn es ist $f_1(a)f_0(\nu) = a$, $f_1'(a)f_1(\nu+1) = \nu+1$. Durch Differentiation von ($\alpha.$) erhält man

$$x^{\varrho+1}\frac{d^{\varrho+1}y}{dx^{\varrho+1}} = \sum_{a,\nu}\sum_{k=0}^{\varrho}(-1)^k(a-\varrho)f_\varrho^{(k)}(a)f_k(\nu+k)C_{a,\nu+k}x^a(-\log x)^\nu$$

$$+\sum_{a,\nu}\sum_{k=0}^{\varrho}(-1)^{k+1}\nu f_\varrho^{(k)}(a)f_k(\nu+k)C_{a,\nu+k}x^a(-\log x)^{\nu-1}$$

oder, wenn man in der letzten Zeile $k-1$ für k und $\nu+1$ für ν schreibt und die Gleichung

$$(\nu+1)f_{k-1}(\nu+k) = f_k(\nu+k)$$

beachtet,

$$x^{\varrho+1}\frac{d^{\varrho+1}y}{dx^{\varrho+1}} = \sum_{a,\nu}\sum_{k=0}^{\varrho+1}(-1)^k[(a-\varrho)f_\varrho^{(k)}(a)-f_\varrho^{(k-1)}(a)]f_k(\nu+k)C_{a,\nu+k}x^a(-\log x)^\nu;$$

nun ist aber

$$f_{\varrho+1}(a) = (a-\varrho)f_\varrho(a),$$

und hieraus ergiebt sich durch k-malige Differentiation

$$f_{\varrho+1}^{(k)}(a) = (a-\varrho)f_\varrho^{(k)}(a)-f_\varrho^{(k-1)}(a);$$

folglich besteht die Gleichung

$$x^{\varrho+1}\frac{d^{\varrho+1}y}{dx^{\varrho+1}} = \sum_{a,\nu}\sum_{k=0}^{\varrho+1}(-1)^k f^{(k)}_{\varrho+1}(a) f_k(\nu+k) C_{a,\nu+k} x^a (-\log x)^\nu,$$

welche aus (α.) dadurch hervorgeht, dass man ϱ durch $\varrho+1$ ersetzt.

Durch Einsetzen der Reihe (9.) und ihrer Ableitungen (α.) in die Differentialgleichung (1.) erhält man die Recursionsformel

$$(10.)\quad \begin{cases} \Delta(a) C_{a,\nu} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Delta^{(k)}(a) f_k(\nu+k) C_{a,\nu+k} \\ \qquad\qquad + \Sigma A_{kk_1\dots k_n} f_{\varrho'}(a') f_{\varrho''}(a'')\dots C_{a',\nu'} C_{a'',\nu''}\dots; \end{cases}$$

in einem Glied der zweiten Summe ist die Zahl der Factoren f, sowie diejenige der Factoren C gleich $k_1+\dots+k_n$, die Zahlen ϱ', ϱ'', ... haben dieselbe Bedeutung wie in der Formel (6.), und die Indices a', ν' u. s. w. erfüllen die Bedingungen

$$a'+a''+\dots = a-k,$$
$$\nu'+\nu''+\dots = \nu;$$

ausserdem ist die Bezeichnung benutzt:

$$\Delta^{(k)}(a) = \frac{1}{k!}\frac{d^k\Delta(a)}{da^k}.$$

Der Coefficient $\Delta(a)$ von $C_{a,\nu}$ verschwindet für $a = a_i$ $(i = 1, \dots, m)$; da aber der Voraussetzung nach a_i eine einfache Wurzel der Gleichung $\Delta(a) = 0$ ist, so ist $\Delta'(a_i)$ von Null verschieden, durch die Recursionsformel (10.) wird $C_{a,\nu}$ durch Grössen $C_{a,\nu+k}$ von gleichem Gewicht und höherem Rang und durch Grössen $C_{a',\nu'}$ von geringerem Gewicht ausgedrückt, vorausgesetzt, dass a nicht gleich einer der Grössen a_i $(i = 1, \dots, m)$ ist. Für $a = a_i$ erhält die Formel (10.) die Gestalt

$$(10'.)\qquad 0 = \Delta'(a_i)(\nu+1) C_{a_i,\nu+1}+\dots; \qquad (\nu = \nu_i-1, \dots, 1, 0)$$

man berechnet hieraus $C_{a_i,\nu_i}, \dots, C_{a_i,1}$, während

$$C_{a_i,0} = (y)_{x^{a_i}} = C_i \qquad (i = 1, \dots, m)$$

willkürlich anzunehmen ist. Demnach erhält man sämmtliche Grössen $C_{a,\nu}$ als ganze rationale Functionen der m willkürlichen Constanten $C_1, \dots, C_m$.

Die aus der Differentialgleichung

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} = c_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+c_{n-1}x\frac{dy}{dx}+c_ny$$
$$+\Sigma A_{kk_1\dots k_n}x^k y^{k_1}\dots\left(x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)^{k_n}$$
$$(k = 1,\ k_1 = \dots = k_n = 0;\ \ k+k_1+\dots+k_n > 1)$$

gebildete Gleichung nten Grades in s

$$s(s-1)\ldots(s-n+1) = c_1 s(s-1)\ldots(s-n+2)+\cdots+c_{n-1}s+c_n$$

habe n einfache Wurzeln $a_1, \ldots, a_n$. *Die reellen Theile von* $a_1, \ldots, a_m$ *seien positiv, diejenigen von* $a_{m+1}, \ldots, a_n$ *negativ oder Null. Wenn zwischen* $a_1, \ldots, a_m$ *keine Beziehung*

$$(\varrho.) \qquad a_i = \varrho + \varrho_{i'} a_{i'} + \varrho_{i''} a_{i''} + \cdots$$

besteht, worin $\varrho, \varrho_{i'}, \varrho_{i''}, \ldots$ *positive ganze Zahlen bedeuten, so wird die Differentialgleichung durch eine für hinreichend kleine Werthe von* $|x|$ *convergente, m willkürliche Grössen enthaltende Reihe*

$$y = \sum_{(\lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_m > 0)} C_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m}$$

befriedigt. Sind jedoch Beziehungen von der Form $(\varrho.)$ *vorhanden, so werden den Grössen* $a_1, \ldots, a_m$ *wie in § 2 ganze positive Zahlen (einschliesslich Null)* $\nu_1, \ldots, \nu_m$ *zugeordnet, und der Differentialgleichung wird durch eine Reihe*

$$y = \sum_{(\lambda+\lambda_1+\cdots+\lambda_m > 0)} C_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m} (-\log x)^{\lambda_1\nu_1+\cdots+\lambda_m\nu_m}$$

genügt, welche von m willkürlichen Constanten abhängt und für hinreichend kleine Werthe von $|x|$ *convergirt.*

Für den Fall einer linearen Differentialgleichung *n*ter Ordnung findet dieselbe Vereinfachung der Reihenentwickelungen statt wie in § 4 für ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

Charlottenburg, 7. Juli 1895.

Ueber indefinite ternäre quadratische Formen.

(Fortsetzung der Arbeit aus Bd. 115 Heft II S. 150—182 dieses Journals.)

(Von Herrn *A. Meyer* in Zürich.)

---

§ 6.

Untersuchung der Aequivalenz der Formen f_1 der Invarianten $\theta^{\varkappa+1}\Omega$, $\theta\Delta$.

36. Handelt es sich um die Entscheidung der Aequivalenz der Formen f_1 der Invarianten $\theta^{\varkappa+1}\Omega$, $\theta\Delta$, welche derselben Form f der Invarianten $\theta^{\varkappa}\Omega$, $\theta\Delta$ entstammen (wo $\Omega\Delta$ prim zu θ), so kommen, wenn $\varkappa > 0$ ist, nach Art. 2, 1) nur Formen f_B in Betracht, und für die Aequivalenz zweier Formen f_B und $f_B^{(1)}$ ist dann nach Art. 4 nothwendig und hinreichend, dass es eine Transformation von f in sich selbst giebt, für welche die Congruenz stattfindet:

$$\lambda' - \alpha'\lambda + \alpha_1'\mu' \equiv 0 \pmod{\theta}.$$

Die Existenz einer solchen Transformation lässt sich nun (für $\varkappa > 0$) immer nachweisen, und zwar genügt es, in den Formeln des Art. 5 $\varepsilon = 1$ anzunehmen. Die vorige Congruenz geht dann über in $2apq'' \equiv \alpha' - \alpha_1'$ und es ist also eine Auflösung der Gleichung

$$(\text{II.}) \qquad p^2 - \theta^{\varkappa}\Omega F(q,\ q',\ q'') = 1$$

zu suchen, welche dieser Congruenz genügt, oder, wenn man $p \equiv 1 \pmod{\theta}$ wählt, der Congruenz

$$(1.) \qquad 2aq'' \equiv \alpha' - \alpha_1' \pmod{\theta}.$$

Sind Ω_2^2, Δ_2^2 die grössten quadratischen Theiler von Ω, Δ; $\Omega = \Omega_1\Omega_2^2$, $\Delta = \Delta_1\Delta_2^2$, E der grösste gemeinschaftliche Theiler von Ω_1 und Δ_1; $\Omega_1 = E\Omega_0$, $\Delta_1 = E\Delta_0$, so sind Ω_0, Δ_0, E relativ prim. Setzt man nun

$$\Omega_2 E q = q_1, \quad q'' = \Delta_2 q_1'', \quad A = \theta^{\varkappa+1}\Omega\Delta A_1, \quad A' = \theta\Delta A_1',$$

so geht (II.) über in

$$(\text{II}'.) \qquad p^2 - \theta^{\varkappa}\Omega_2^2\Delta_2^2\Omega_0 E F_1(q_1,\ q',\ q_1'') = 1,$$

wo

$$F_1(q_1,\ q',\ q_1'') = \theta^{\varkappa+1}\Omega_0\Delta_0 A_1 q_1^2+\theta\Delta_0 E A_1' q'^2+A'' q_1''^2+\cdots$$

eine eigentlich primitive Form der Invarianten $\theta\Delta_0$, $\theta^\varkappa\Omega_0 E$ ist, und es ist jetzt die Gleichung (II'.) so aufzulösen, dass

$$(2.)\qquad q_1 \equiv 0 \pmod{\Omega_2 E},\quad 2a\Delta_2 q_1'' \equiv \alpha'-\alpha_1' \pmod{\theta}$$

wird. Setzt man noch

$$p = 1+\theta^\varkappa\Omega_2^2\Delta_2^2\Omega_0 E z,$$

so ist z der Gleichung gemäss zu bestimmen:

$$(2+\theta^\varkappa\Omega_2^2\Delta_2^2\Omega_0 E z)z = F_1(q_1,\ q',\ q_1'').$$

Ist $\varkappa$ *gerade*, so setze man noch $q' = \theta^{\frac{1}{2}\varkappa}q_1'$. Dann wird

$$F_1(q_1,\ q',\ q_1'') = \theta^{\varkappa+1}\Omega_0\Delta_0 A_1 q_1^2+\theta^{\varkappa+1}\Delta_0 E A_1' q_1'^2+A'' q_1''^2+\cdots = F_2(q_1,\ q_1',\ q_1''),$$

wo nun F_2 die theilerfremden Invarianten $\theta^{\varkappa+1}\Delta_0$, $\Omega_0 E$ hat. Die Zahl

$$m = (2+\theta^\varkappa\Omega_2^2\Delta_2^2\Omega_0 E z)z$$

ist daher immer durch F_2 darstellbar, wenn m prim zu $\theta\Omega\Delta$ und $\Omega_0 E m \equiv 2$, 3, 5, 6, 7 (mod.8) ist und

$$\left(\frac{m}{\theta}\right) = \left(\frac{A''}{\theta}\right),\quad \left(\frac{m}{\delta_0}\right) = \left(\frac{A''}{\delta_0}\right)$$

in Bezug auf jeden Primfactor δ_0 von Δ_0. Es ist aber immer möglich z diesen Bedingungen entsprechend zu wählen, ausgenommen, wenn $\delta_0 = 3$, $\Omega_2\Delta_2$ nicht durch 3 theilbar und $\Omega_0 E \equiv A''$ (mod.3). Indessen kann man dann z und q_1'' durch 3 theilbar machen und setzen $z = 3z_1$, $q_1'' = 3q_2''$, worauf $\frac{1}{3}m$ durch die Form darzustellen ist

$$\tfrac{1}{3}\theta^{\varkappa+1}\Omega_0\Delta_0 A_1 q_1^2+\tfrac{1}{3}\theta^{\varkappa+1}\Delta_0 E A_1' q_1'^2+3A'' q_1''^2+\cdots,$$

deren Invarianten $\frac{1}{3}\theta^{\varkappa+1}\Delta_0$, $3\Omega_0 E$ ebenfalls relativ prim sind. Die Bedingung in Bezug auf den Primfactor 3 fällt jetzt weg (man hätte auch von vorneherein $q'' = \Delta_0\Delta_2 q_1''$ setzen können).

Da m prim ist zu θ, so ist es auch q_1''; ausserdem kann man z positiv annehmen. Ist $q_1 = \mathfrak{q}_1$, $q' = \mathfrak{q}'$, $q_1'' = \mathfrak{q}_1''$, $p = \mathfrak{p}$ eine solche Auflösung von (II'.), so kann den Bedingungen (2.) nachträglich folgendermassen genügt werden:

Setzt man

$$\theta^\varkappa\Omega_2^2\Delta_2^2\Omega_0 E F_1(\mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}',\ \mathfrak{q}_1'') = D,$$

so ist $T = \mathfrak{p}$, $U = 1$ die Fundamentalauflösung der Gleichung $t^2-Du^2 = 1$ und jede Auflösung t, u derselben liefert eine Auflösung von (II'.), wenn man setzt:

$$(3.)\qquad p = t,\quad q_1 = \mathfrak{q}_1 u,\quad q' = \mathfrak{q}' u,\quad q_1'' = \mathfrak{q}_1'' u.$$

Da nun $D \equiv 0 \pmod{\theta\Omega_0 E}$, kann man nach Art. 12 u so bestimmen, dass

$$\mathfrak{q}_1 u \equiv 0 \pmod{\Omega_0 E}, \quad 2a\Delta_2 \mathfrak{q}_1'' u \equiv \alpha' - \alpha_1' \pmod{\theta}$$

wird, und dann erfüllt das System (3.) alle Bedingungen. Hieraus folgt:

Ist $\varkappa$ gerade, so sind die Formen f_B und $f_B^{(1)}$ äquivalent.

37. Ist $\varkappa$ *ungerade,* so gelangt man zu demselben Resultate wie in Art. 36; doch ist der Beweis umständlicher. Für $\varkappa = 1$ ergiebt sich derselbe zwar noch wie vorhin mittelst der Sätze in Art. 33 und 34. Für $\varkappa > 2$ sind unter der Voraussetzung, dass $\Omega\Delta\theta$ keinen quadratischen Theiler besitzt, durch den Schluss von $\varkappa$ auf $\varkappa+1$ zunächst die Sätze zu beweisen:

1) Die Formen $f^{[\varkappa]}$ desselben Geschlechts der Invarianten $\theta^\varkappa\Omega$, $\theta\Delta$ bilden nur eine Klasse, ausgenommen, wenn

$$\theta \equiv 1 \pmod{8}, \quad \theta R \Omega\Delta, \quad \left(\frac{f^{[\varkappa]}}{\theta}\right) = +1, \quad \left(\frac{F^{[\varkappa]}}{\theta}\right) = +1$$

ist, in welchem Falle sie zwei Klassen bilden; und zwar, wenn die Klassen des entsprechenden Geschlechts der Invarianten $\theta\Omega$, $\theta\Delta$ wie in Art. 20 repräsentirt werden durch

$$f_1^{[1]} = \begin{pmatrix} a, & \theta^2 a', & a'' \\ \theta b, & b', & \theta b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1, & a_1', & a_1'' \\ b_1, & b_1', & b_1'' \end{pmatrix}, \quad \text{wo} \quad |a'|_\theta = 0, \quad |a''|_\theta = 1,$$

$$f_2^{[1]} = \begin{pmatrix} a+2b''\alpha'+a'\alpha'^2, & \theta^2 a', & a'' \\ \theta b, & b'+b\alpha', & \theta(b''+a'\alpha') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2, a_2', a_2'' \\ b_2, b_2', b_2'' \end{pmatrix}, \text{ wo } \left(1+\sqrt{\frac{a}{a+a'\alpha'^2}}\right) N\theta,$$

so werden die beiden Klassen der Invarianten $\theta^\varkappa\Omega$, $\theta\Delta$ repräsentirt durch

$$f_k^{[\varkappa]} = \begin{pmatrix} a_k, & \theta^{\varkappa-2} a_k', & \theta^\varkappa a_k'' \\ \theta^{\varkappa-1} b_k, & \theta^{\frac{1}{2}\varkappa} b_k', & \theta^{\frac{1}{2}\varkappa-1} b_k'' \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad f_k^{[\varkappa]} = \begin{pmatrix} a_k, & \theta^{\varkappa-1} a_k', & \theta^{\varkappa-1} a_k'' \\ \theta^{\varkappa-1} b_k, & \theta^{\frac{\varkappa-1}{2}} b_k', & \theta^{\frac{\varkappa-1}{2}} b_k'' \end{pmatrix},$$

je nachdem $\varkappa$ gerade oder ungerade ist ($k = 1$ oder 2).

2) Soll eine primitive Form $\varphi = (m, n'', m')$ der Determinante $\theta^\varkappa\Omega M''$, in welcher der Factor M'' prim zu $\theta\Omega\Delta$ und nicht durch 4 theilbar ist, durch $f_k^{[\varkappa]}$ eigentlich dargestellt werden, so muss sein

$$(\varphi.) \quad \left(\frac{M''}{\theta}\right) = +1, \ \left(\frac{M''}{\delta}\right) = \left(\frac{F_k^{[\varkappa]}}{\delta}\right), \ \left(\frac{\varphi}{\theta}\right) = +1, \ \left(\frac{\varphi}{\mu''}\right) = \left(\frac{\theta\Delta}{\mu''}\right), \ \left(\frac{\varphi}{\omega}\right) = \left(\frac{f_k^{[\varkappa]}}{\omega}\right)$$

in Bezug auf jeden ungeraden Primfactor μ'', ω, δ von M'', Ω, Δ. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist φ sowohl durch $f_1^{[\varkappa]}$ als durch $f_2^{[\varkappa]}$ darstellbar, wenn M'' wenigstens einen Primfactor, welcher $N\theta$ ist, in ungerader Potenz enthält. Sind dagegen alle Primfactoren, welche in M'' in ungerader Potenz aufgehen, quadratische Reste von θ, so lässt sich die eine Hälfte der Klassen des Geschlechts, zu welchem φ gehört, durch $f_1^{[\varkappa]}$, die andere durch $f_2^{[\varkappa]}$ darstellen.

3) Soll die primitive Form $\Phi = (M', N, M'')$ der Determinante $\Delta\theta m$, in welcher m prim ist zu $\theta\Omega\Delta$ und durch 4 nicht theilbar, durch $F_k^{[\varkappa]}$ darstellbar sein, so muss

$$\left(\frac{m}{\theta}\right) = +1, \quad \left(\frac{m}{\omega}\right) = \left(\frac{f_k^{[\varkappa]}}{\omega}\right), \quad \left(\frac{\Phi}{\theta}\right) = +1, \quad \left(\frac{\Phi}{\mu}\right) = \left(\frac{\theta^{\varkappa}\Omega}{\mu}\right), \quad \left(\frac{\Phi}{\delta}\right) = \left(\frac{F_k^{[\varkappa]}}{\delta}\right)$$

sein, für jeden ungeraden Primfactor μ, δ, ω von m, Δ, Ω. Unter diesen Bedingungen ist Φ sowohl durch $F_1^{[\varkappa]}$ als durch $F_2^{[\varkappa]}$ darstellbar, ausgenommen, wenn alle in ungerader Potenz in m aufgehenden Primzahlen quadratische Reste von θ sind, in welchem Falle nur die Hälfte der Klassen des Geschlechts, zu welchem Φ gehört, durch $F_1^{[\varkappa]}$, die andere durch $F_2^{[\varkappa]}$ darstellbar ist.

Hieraus folgt dann sofort, dass wenn $M''m$ prim ist zu $\theta\Omega\Delta$ und

$$\left(\frac{m}{\theta}\right) = +1, \quad \Delta m \equiv 2, 3, 5, 6, 7 \pmod 8, \quad \left(\frac{m}{\omega}\right) = \left(\frac{f_k^{[\varkappa]}}{\omega}\right),$$

$$\left(\frac{M''}{\theta}\right) = +1, \quad \Omega M'' \equiv 2, 3, 5, 6, 7 \pmod 8, \quad \left(\frac{M''}{\delta}\right) = \left(\frac{F_k^{[\varkappa]}}{\delta}\right),$$

für jeden Primfactor ω von Ω, δ von Δ, die Zahl m sowohl durch $f_1^{[\varkappa]}$ als durch $f_2^{[\varkappa]}$, ebenso M'' sowohl durch $F_1^{[\varkappa]}$ als durch $F_2^{[\varkappa]}$ darstellbar ist. Daraus aber ergiebt sich die Aequivalenz von f_B und $f_B^{(1)}$ für beliebige mit 2θ theilerfremde Werthe von $\Omega\Delta$ wie im Art. 36, indem man für ungerades $\varkappa$ setzt: $q' = \theta^{\frac{1}{2}(\varkappa-1)} q_1'$.

38. Für $\varkappa = 1$ sind die Sätze des vorigen Artikels bereits bewiesen (Art. 20 u. 32). Gelten sie aber für $\varkappa \leqq \lambda$, so ergeben sie sich für $\varkappa = \lambda+1$ wie folgt:

Der Beweis von 1) ist derselbe wie in Art. 36 für gerades $\varkappa$, nur dass die Substitution $q' = \theta^{\frac{1}{2}\varkappa} q_1'$ jetzt wegfällt wegen der eben ausgesprochenen Folgerung für die Darstellbarkeit von Zahlen durch $f_k^{[\lambda]}$ oder $F_k^{[\lambda]}$.

Zum Beweise von 2) transformire man die Form $\varphi = (m, n'', m')$ der Determinante $\theta^{\lambda+1}\Omega M''$, für welche die Bedingungen (φ.) erfüllt sind, vorerst so, dass m prim wird zu $\theta\Omega\Delta$ und nicht durch 4 theilbar, $n'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\lambda+2}}$ und bilde nach den Vorschriften des Art. 21 die ternäre Form

$$g^{[\lambda+1]} = \begin{pmatrix} m, & m', & m'' \\ n, & n', & n'' \end{pmatrix} \quad \text{der Invarianten} \quad \theta^{\lambda+1}\Omega, \ \theta\Delta,$$

wo $|m'|_\theta = \lambda+1$, $|m''|_\theta = \lambda+2$, $n \equiv n' \equiv 0 \pmod{\theta^{\lambda+1}}$, $N \equiv N' \equiv 0 \pmod{\theta^{\lambda+1}}$ und hieraus die Form

$$g^{[\lambda]} = \begin{pmatrix} m, & m', & \theta^{-2}m'' \\ \theta^{-1}n, & \theta^{-1}n', & n'' \end{pmatrix} \quad \text{der Invarianten} \quad \theta^{\lambda}\Omega, \ \theta\Delta,$$

welche mit $f_k^{[\lambda]}$ in dasselbe Geschlecht gehört, daher mit $f_1^{[\lambda]}$ oder $f_2^{[\lambda]}$ äquivalent sein muss; dann ist $g^{[\lambda+1]}$ bezw. äquivalent mit $f_1^{[\lambda+1]}$ oder $f_2^{[\lambda+1]}$. Denn nach 1) muss $g^{[\lambda+1]}$ mit einer dieser Formen, $f_k^{[\lambda+1]}$, äquivalent sein. Geht dann $f_k^{[\lambda+1]}$ in $g^{[\lambda+1]}$ über durch die Substitution $\begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{pmatrix}$ der Determinante 1, so geht $f_k^{[\lambda]}$ in $g^{[\lambda]}$ über durch

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta & \theta^{-1}\zeta \\ \xi' & \eta' & \theta^{-1}\zeta' \\ \theta\xi'' & \theta\eta'' & \zeta'' \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \xi & \theta^{-1}\eta & \zeta \\ \theta\xi' & \eta' & \theta\zeta' \\ \xi'' & \theta^{-1}\eta'' & \zeta'' \end{pmatrix},$$

je nachdem λ ungerade oder gerade ist. Aus den Transformationsgleichungen folgt aber wie in Art. 4, dass die Coefficienten dieser Substitutionen ganzzahlig sind. Sind also $f_k^{[\lambda+1]}$ und $g^{[\lambda+1]}$ äquivalent, so sind es auch $f_{k_i}^{[\lambda]}$ und $g^{[\lambda]}$, und umgekehrt, u. s. w. Sind alle in M'' in ungerader Potenz aufgehenden Primzahlen quadratische Reste von θ, so ist die durch $f_k^{[\lambda]}$ darbare Hälfte der Klassen des Geschlechts, zu welchem φ gehört, auch durch $f_k^{[\lambda+1]}$ darstellbar.

Um 3) zu beweisen hat man ebenso Φ so zu transformiren, dass M'' prim zu $\theta\Omega\Delta$ und nicht durch 4 theilbar, $N \equiv 0 \pmod{\theta}$, also $|M'| = 1$ wird, und sodann die ternäre Form

$$G^{[\lambda+1]} = \begin{pmatrix} M, & M', & M'' \\ N, & N', & N'' \end{pmatrix} \text{ der Invarianten } \theta\Delta,\ \theta^{\lambda+1}\Omega$$

herzustellen, so dass $|M| = \lambda+2$, $|N''| > 1$ ist. Dann ist

$$G^{[\lambda]} = \begin{pmatrix} \theta^{-1}M, & \theta^{-1}M', & \theta M'' \\ N, & N', & \theta^{-1}N'' \end{pmatrix}$$

eine primitive Form der Invarianten $\theta\Delta$, $\theta^{\lambda}\Omega$, welche mit $F_k^{[\lambda]}$ in dasselbe Geschlecht gehört, daher einer dieser Formen äquivalent ist und die Form $(\theta^{-1}M', N, \theta M'')$ darstellt, welche aus Φ und $(\theta, 0, -\Delta m)$ zusammengesetzt ist. Und wieder ist $G^{[\lambda+1]}$ mit $F_1^{[\lambda+1]}$ oder $F_2^{[\lambda+1]}$ äquivalent, je nachdem $G^{[\lambda]}$ mit $F_1^{[\lambda]}$ oder $F_2^{[\lambda]}$ äquivalent ist, u. s. w. Sind alle Primzahlen, welche in m in ungerader Potenz aufgehen, quadratische Reste von θ, so ist die durch $F_k^{[\lambda-1]}$ darstellbare Hälfte der Klassen des Geschlechts, zu dem Φ gehört, auch durch $F_k^{[\lambda+1]}$ darstellbar.

39. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich also, dass die Klassenanzahl sich beim Uebergange von den Invarianten $\theta\Omega$, $\theta\Delta$ zu $\theta^k\Omega$, $\theta\Delta$ $(k > 1)$

nicht ändert. Sind Ω, Δ Invarianten ohne kubische Theiler und bezeichnet Ω' (Δ') das Product der Primzahlen, welche in Ω (Δ) in zweiter und in Δ (Ω) in erster Potenz enthalten sind, ist ferner $\Omega = \Omega'\Omega''$, $\Delta = \Delta'\Delta''$, so sind Ω'', Δ'' Invarianten, wie sie in § 3 betrachtet werden; Ω' und Δ' sind theilerfremd und gehen in Ω'' und Δ'' auf, und wenn man

$$\Omega'' = \Omega'\Delta'\Omega_{11}, \quad \Delta'' = \Omega'\Delta'\Delta_{11}$$

setzt, so ist $\Omega'\Delta'$ prim zu $\Omega_{11}\Delta_{11}$. Beim Uebergange von Ω'', Δ'' zu Ω, Δ ändert sich die Klassenzahl nicht, wie man sofort erkennt, wenn man das soeben gefundene Resultat (für $k = 2$) bezüglich der Primfactoren von Ω' (Δ') successive auf die Formen f (F) anwendet.

Ist

$$f = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} \quad \text{mit der adjungirten} \quad F = \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix}$$

Hauptrepräsentante einer Klasse der Invarianten Ω'', Δ'', also $|a| = 0$, $|a'| = |\Omega''|$, $|a''| = |\Omega''\Delta''|$, u. s. w. in Bezug auf jeden Primfactor von $\Omega''\Delta''$, so ist

$$f_1 = \begin{pmatrix} a\Delta', & a'\Omega'^2\Delta'^{-1}, & a''\Delta' \\ b\Omega', & b'\Delta', & b''\Omega' \end{pmatrix}$$

eine Repräsentante der entsprechenden Klasse der Invarianten Ω, Δ, mit der adjungirten

$$F_1 = \begin{pmatrix} A\Omega', & A'\Delta'^2\Omega'^{-1}, & A''\Omega' \\ B\Delta', & B'\Omega', & B''\Delta' \end{pmatrix}$$

und zwischen den quadratischen Charakteren dieser Formen bestehen die Relationen

$$\left(\frac{f_1}{\omega'}\right) = \left(\frac{\Delta' f}{\omega'}\right), \quad \left(\frac{f_1}{\omega_{11}}\right) = \left(\frac{\Delta' f}{\omega_{11}}\right), \quad \left(\frac{f_1}{\delta'}\right) = \left(\frac{\Delta'^{-1}a'}{\delta'}\right)$$

in Bezug auf jeden Primfactor ω', ω_{11}, δ' von Ω', Ω_{11}, Δ'. Da $b''^2 - aa' = \Omega''A''$, ist $-aa'\Delta'^{-1} \equiv A''\Omega'\Omega_{11} \pmod{\delta'}$; daher

$$\left(\frac{f_1}{\delta'}\right) = \left(\frac{-\Omega'\Omega_{11} f F}{\delta'}\right);$$

ebenso

$$\left(\frac{F_1}{\delta'}\right) = \left(\frac{\Omega' F}{\delta'}\right), \quad \left(\frac{F_1}{\delta_{11}}\right) = \left(\frac{\Omega' F}{\delta_{11}}\right), \quad \left(\frac{F_1}{\omega'}\right) = \left(\frac{-\Delta'\Delta_{11} f F}{\omega'}\right).$$

Diese Relationen lassen sich noch umformen:

Sind Ω_2^2, Δ_2^2, $\Omega_2''^2$, $\Delta_2''^2$ die grössten in Ω, Δ, Ω'', Δ'' aufgehenden Quadrate und $\Omega = \Omega_1\Omega_2^2$, $\Delta = \Delta_1\Delta_2^2$, $\Omega'' = \Omega_1''\Omega_2''^2$, $\Delta'' = \Delta_1''\Delta_2''^2$, so ist $\Omega_1'' = \Omega'\Omega_1$, $\Delta_1'' = \Delta'\Delta_1$ und Ω' Theiler von Ω_2, Δ_1, Ω_1'', Δ_1'' und prim zu $\Omega_1\Delta_2\Omega_2''\Delta_2''$,

ebenso Δ' Theiler von Δ_2, Ω_1, Ω_1'', Δ_1'' und prim zu $\Delta_1\Omega_2\Omega_2''\Delta_2''$; daher

$$\left(\frac{-\Delta_1\omega'^{-1}f_1}{\omega'}\right)=\left(\frac{-\Delta_1''\omega'^{-1}f}{\omega'}\right),\ \left(\frac{-\Delta_1\omega_{11}^{-1}f_1}{\omega_{11}}\right)=\left(\frac{-\Delta_1''\omega_{11}^{-1}f}{\omega_{11}}\right)\text{ oder }\left(\frac{-\Delta_1 f_1}{\omega_{11}}\right)=\left(\frac{-\Delta_1''f}{\omega_{11}}\right),$$

je nachdem ω_{11} in Δ_1 aufgeht oder nicht; ferner ist

$$\left(\frac{-\Delta_1 f_1}{\delta'}\right)=\left(\frac{\Delta_1\Omega'\Omega_{11}fF}{\delta'}\right)=\left(\frac{\Delta'^{-2}\Omega_1''\Delta_1''fF}{\delta'}\right)=\left(\frac{\delta'^{-2}\Omega_1''\Delta_1''fF}{\delta'}\right)$$

oder

$$\left(\frac{-\Delta_1 f_1}{\delta'}\right)=\left(\frac{-\Delta_1''\delta'^{-1}f}{\delta'}\right)\left(\frac{-\Omega_1''\delta'^{-1}F}{\delta'}\right).$$

Ebenso

$$\left(\frac{-\Omega_1\delta'^{-1}F_1}{\delta'}\right)=\left(\frac{-\Omega_1''\delta'^{-1}F}{\delta'}\right),\ \left(\frac{-\Omega_1\delta_{11}^{-1}F_1}{\delta_{11}}\right)=\left(\frac{-\Omega_1''\delta_{11}^{-1}F}{\delta_{11}}\right)\text{oder}\left(\frac{-\Omega_1 F_1}{\delta_{11}}\right)=\left(\frac{-\Omega_1''F}{\delta_{11}}\right),$$

je nachdem δ_{11} in Ω_1 aufgeht oder nicht, und

$$\left(\frac{-\Omega_1 F_1}{\omega'}\right)=\left(\frac{-\Delta_1''\omega'^{-1}f}{\omega'}\right)\left(\frac{-\Omega_1''\omega'^{-1}F}{\omega'}\right).$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die Grundfactoren des Geschlechts, zu welchem f gehört, übereinstimmen mit denjenigen des Geschlechts von f_1; und da auch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von Ω_1 und Δ_1 mit demjenigen von Ω_1'' und Δ_1'' übereinstimmt, gilt für die Klassenanzahl eines Geschlechts der Invarianten Ω, Δ genau dieselbe Regel wie für ein Geschlecht der Invarianten Ω'', Δ''.

§ 7.

Untersuchung der Aequivalenz der Formen f_C der Invarianten $\theta^\omega\Omega$, $\theta^{\delta+2}\Delta$, wenn $\delta>0$, $\Omega\Delta$ durch die Primzahl θ nicht theilbar ist. — Klassenanzahl für beliebige ungerade Invarianten.

40. Beim Uebergange von den Invarianten Ω, Δ zu Ω, $\Delta\theta^2$ kommen nach Art. 2, wenn $|\Delta|_\theta>0$, nur die Formen $f_1=f_C$ in Betracht und es ist für die Aequivalenz zweier Formen f_C und $f_C^{(1)}$, die derselben Form f entstammen, nach Art. 4 nothwendig und hinreichend, dass es eine Transformation Δ von f in sich selbst giebt, für welche die Congruenzen (C.) bestehen. Im Folgenden setze ich die höchsten in Ω und Δ aufgehenden Potenzen θ^ω und θ^δ von θ in Evidenz und bezeichne demgemäss die Invarianten von f mit $\theta^\omega\Omega$, $\theta^\delta\Delta$, wo nun $\Omega\Delta$ durch θ nicht theilbar ist. Die Fälle $\omega>0$ und $\omega=0$ behandle ich gesondert. Es sei

1) $\omega>0$.

Aus den Transformationsgleichungen und den Voraussetzungen des

Art. 2 über die Coefficienten von f ergeben sich die Congruenzen

$$a \equiv a\lambda^2 \pmod{\theta}, \quad 0 \equiv a\nu^2 + a'\nu'^2 \pmod{\theta^{\omega+1}}, \quad 0 \equiv \lambda\nu \equiv \lambda\mu \pmod{\theta^\omega},$$

aus denen sofort folgt

$$\lambda \equiv \pm 1 \pmod{\theta}, \quad \mu \equiv \nu \equiv 0 \pmod{\theta^\omega}, \quad \nu' \equiv 0 \pmod{\theta}.$$

Daher reduciren sich im vorliegenden Falle die Congruenzen (C.) auf

$$\alpha''\lambda + \beta''\lambda' - \lambda'' - \alpha_1''\nu'' \equiv 0, \quad \beta''\mu' - \mu'' - \beta_1''\nu'' \equiv 0 \pmod{\theta}.$$

Wählt man in den Formeln des Art. 5 $\varepsilon = 1$, so gehen diese Congruenzen, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\text{(II.)} \qquad p^2 - \theta^\omega \Omega F(q, q', q'') = 1,$$

über in

$$\pm(\alpha'' - \alpha_1'') + 2a\beta''q'' + 2aq' \equiv 0, \quad \beta'' \equiv \beta_1'' \pmod{\theta},$$

wenn $p \equiv \pm 1 \pmod{\theta}$. Ist die zweite Congruenz erfüllt, so lässt sich die Gleichung (II.) immer so auflösen, dass auch der ersten genügt wird.

Um dies nachzuweisen führe ich wieder die Bezeichnungen des Art. 36 ein, wodurch die Bedingungen übergehen in:

$$\text{(II}_1\text{.)} \qquad (2 + \theta^\omega \Omega_2^2 \Delta_2^2 \Omega_0 E z)z = F_1(q_1, q', q_1''),$$

wo $F_1(q_1, q', q_1'') = \theta^{\omega+\delta}\Omega_0\Delta_0 A_1 q_1^2 + \theta^\delta \Delta_0 E A_1' q'^2 + A'' q_1''^2 + \cdots$

$$\text{(1.)} \qquad \pm 2a(q' + \beta''q'') \equiv \alpha_1'' - \alpha'' \pmod{\theta}.$$

Ist δ *gerade*, so setze ich $z = \theta^\delta z_1$, $q_1'' = \theta^{\frac{1}{2}\delta} q_2''$. Dadurch geht (II$_1$.) über in

$$\text{(II}_2\text{.)} \qquad (2 + \theta^{\omega+\delta}\Omega\Delta_2^2 z_1)z_1 = F_2(q_1, q', q_2''),$$

wo $F_2(q_1, q', q_2'') = \theta^\omega \Omega_0 \Delta_0 A_1 q_1^2 + \Delta_0 E A_1' q'^2 + A'' q_2''^2 + \cdots$ eine primitive Form der theilerfremden Invarianten Δ_0, $\theta^\omega \Omega_0 E$ ist und

$$\text{(1'.)} \qquad \pm 2aq' \equiv \alpha_1'' - \alpha'' \pmod{\theta}, \quad q_1 \equiv 0 \pmod{\Omega_2 E}$$

sein muss. Wählt man z_1 prim zu $2\theta\Omega_0\Delta_0 E$ und so, dass

$$\left(\frac{2z_1 + \theta^{\omega+\delta}\Omega\Delta_2^2 z_1^2}{\delta_0}\right) = \left(\frac{A''}{\delta_0}\right), \quad \left(\frac{2z_1}{\theta}\right) = -\left(\frac{A''}{\theta}\right)$$

in Bezug auf jeden Primfactor δ_0 von Δ_0, so ist (II$_2$.) immer, aber nur so auflösbar, dass q' nicht durch θ theilbar ist und den Bedingungen (1'.) kann nun wie in Art. 36 nachträglich mittelst der *Pell*schen Gleichung genügt werden.

Ist δ *ungerade*, so setze ich $z = \theta^\delta z_1$, $q_1'' = \theta^{\frac{1}{2}(\delta+1)} q_2''$. Dadurch geht (II$_1$.) über in

$$\text{(II}_3\text{.)} \qquad (2 + \theta^{\omega+\delta}\Omega\Delta_2^2 z_1)z_1 = F_3(q_1, q', q_2''),$$

wo $F_3(q_1, q', q'') = \theta^\omega \Omega_0 \Delta_0 A_1 q_1^2 + \Delta_0 E A_1' q'^2 + \theta A'' q_2''^2 + \cdots$ eine primitive Form der Invarianten $\theta\Delta_0$, $\theta^{\omega-1}\Omega_0 E$ ist, und die Gleichung (II_3.) ist nach Art. 37 lösbar, wenn man z_1 prim zu $2\theta\Omega_0\Delta_0 E$ und so wählt, dass

$$\left(\frac{2z_1 + \theta^{\omega+\delta}\Omega\Delta_2^2 z_1^2}{\delta_0}\right) = \left(\frac{\theta A''}{\delta_0}\right), \quad \left(\frac{2z_1}{\theta}\right) = \left(\frac{\Delta_0 E A_1'}{\theta}\right)$$

wird, worauf man wie vorhin noch die *Pell*sche Gleichung zu benutzen hat.

Also gilt der Satz:

Ist $\omega > 0$, $\delta > 0$, $\beta'' = \beta_1''$, ***so sind die Formen*** f_C ***und*** $f_C^{(1)}$ ***äquivalent.***

41. Um den Fall zu behandeln, in welchem β'' und β_1'' verschieden, also nicht congruent, mod.θ, sind, bedarf es einer anderen Annahme für ε. Ich setze dann $\varepsilon = \theta^{2\omega}$, also mit Rücksicht auf Art. 7

$$p = \theta^\omega p_1, \quad q' = \theta^\omega q_1', \quad q'' = \theta^\omega q_1'', \quad |q|_\theta = 0,$$

so dass

$$\text{(II.)} \qquad p_1^2 - \Omega(\theta^\delta \Omega \Delta A_1 q^2 + \theta^{\omega+\delta} \Delta A_1' q_1'^2 + \theta^\omega A'' q_1''^2 + \cdots) = 1$$

sein muss und, wenn man $p_1 \equiv 1 \pmod{\theta}$ wählt:

$$\lambda \equiv \mu' \equiv \nu'' \equiv 1, \quad \mu'' \equiv 2a_0' q \pmod{\theta}.$$

Da, wie vorhin bewiesen, α'' und α_1'' ohne Einfluss auf die Klassen der Formen f_C und $f_C^{(1)}$ sind, kann man sich dieselben immer so gewählt denken, dass die erste der Congruenzen (C.) erfüllt ist. Es bleibt dann nur noch die zweite, welche lautet: $2a_0' q \equiv \beta'' - \beta_1'' \pmod{\theta}$. Die weitere Untersuchung übergehe ich, da sie derjenigen des vorigen Artikels ganz analog ist und zu demselben Resultate führt, so dass der Satz gilt:

Ist $\omega > 0$, $\delta > 0$, ***so sind die Formen*** f_C ***sämmtlich äquivalent.***

42. Es sei jetzt

2) $\omega = 0$.

Aus den Transformationsgleichungen (vgl. Art. 4, 1)) folgt sofort

$$\nu \equiv \nu' \equiv 0 \pmod{\theta}.$$

Die Congruenzen (C.) reduciren sich demnach auf

$$\alpha''\lambda + \beta''\lambda' - \lambda'' - \alpha_1''\nu'' \equiv 0, \quad \alpha''\mu + \beta''\mu' - \mu'' - \beta_1''\nu'' \equiv 0 \pmod{\theta}.$$

Für $\varepsilon = 1$, $q'' \equiv 0 \pmod{\theta}$ erhält man aus Art. 5:

$$p \equiv \pm 1, \ \lambda \equiv \mu' \equiv \nu'' \equiv 1, \ \lambda' \equiv \mu \equiv 0, \ \lambda'' \equiv \mp 2aq', \ \mu'' \equiv \pm 2a'q \pmod{\theta},$$

somit nebst der Gleichung (II.) die Congruenzen:

$$\text{(1.)} \qquad \pm 2aq' \equiv \alpha_1'' - \alpha'', \quad \pm 2a'q \equiv \beta'' - \beta_1'' \pmod{\theta}.$$

Ist $\beta'' = \beta_1''$, so muss $q \equiv 0 \pmod{\theta}$ sein. Man setze daher unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen

$$\Omega_2 E q = \theta q_1, \quad q'' = \theta^{\frac{\delta+\delta'}{2}} \Delta_2 q_1'', \quad p = 1+\theta^\delta \Omega \Delta_2^2 z,$$

wo $\delta' = 0$ oder 1 ist, je nachdem δ gerade oder ungerade. Hierdurch geht (II.) über in

(II'.) $$(2+\theta^\delta \Omega \Delta_2^2 z) z = \theta^2 \Omega_0 \Delta_0 A_1 q_1^2 + \Delta_0 E A_1' q'^2 + \theta^{\delta'} A'' q_1''^2 + \cdots,$$

wo die Form rechts die Invarianten $\theta^{\delta'} \Delta_0$, $\theta^{2-\delta'} \Omega_0 E$ hat und $\theta \Omega_0 \Delta_0 E$ keinen quadratischen Theiler besitzt. Da diese Gleichung so lösbar ist, dass q' nicht durch θ theilbar ist, so können auch noch die Bedingungen

$$2aq' \equiv \alpha_1'' - \alpha'' \pmod{\theta}, \quad q_1 \equiv 0 \pmod{\Omega_2 E}$$

mittelst der *Pell*schen Gleichung befriedigt werden. Demnach sind wieder f_C und $f_C^{(1)}$ äquivalent.

Ist $\beta'' \gtrless \beta_1''$, so braucht man, weil es auf den Werth von α'' nicht ankommt, nur die zweite Congruenz (1.) zu berücksichtigen. Dann darf q nicht durch θ theilbar sein. Setzt man demnach

$$\Omega_2 E q = q_1, \quad q'' = \theta^{\frac{1}{2}(\delta+\delta')} \Delta_2 q_1'', \quad p = 1+\theta^\delta \Omega \Delta_2^2 z,$$

so erkennt man wie vorhin die Aequivalenz der Formen f_C und $f_C^{(1)}$.

Daher gilt allgemein der Satz:

Ist $\delta > 0$, so sind die Formen f_C sämmtlich äquivalent.

43. Sind f und g zwei nichtäquivalente Formen desselben Geschlechts der Invarianten Ω, Δ und $|\Omega|_\theta \geqq 0$, $|\Delta|_\theta > 0$, so sind auch die Formen f_C und g_C der Invarianten Ω, $\Delta\theta^2$, welche jenen entstammen, nicht äquivalent. Dies ergiebt sich folgendermassen:

Da alle f_C und ebenso alle g_C unter sich äquivalent sind, würde aus der Aequivalenz von f_C und g_C auch diejenige der Formen $f_C^{(0)}$ und $g_C^{(0)}$ folgen, welche der Annahme $\alpha'' = \beta'' = 0$ entsprechen. Ginge nun $f_C^{(0)}$ in $g_C^{(0)}$ über durch die Substitution $\begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{pmatrix}$, so ginge f in g über durch $\begin{pmatrix} \xi & \eta & \theta^{-1}\zeta \\ \xi'' & \eta' & \theta^{-1}\zeta' \\ \theta\xi'' & \theta\eta'' & \zeta'' \end{pmatrix}$.

Setzt man aber, wie immer, die Formen in der im Art. 2 angegebenen Weise präparirt voraus, so folgt aus den Transformationsgleichungen, dass $\zeta \equiv \zeta' \equiv 0 \pmod{\theta}$ und f mit g äquivalent wäre, gegen die Voraussetzung. Somit enthält das Geschlecht von f_C genau so viele Klassen wie das entsprechende Geschlecht von f und es gilt der Satz:

Beim Uebergange von den Invarianten Ω, Δ zu Ω, $\Delta\theta^2$ bleibt, wenn Δ durch θ theilbar ist, die Klassenanzahl in jedem Geschlechte unverändert.

Durch successive Anwendung dieses Satzes gelangt man offenbar zu folgendem Resultate:

Stellt man Ω und Δ als Producte von Potenzen verschiedener Primzahlen dar, reducirt in dieser Zerlegung jeden Exponenten auf 2 oder 1, je nachdem er gerade oder ungerade ist, und erhält so aus Ω, Δ bezw. Ω_I, Δ_I, so enthält jedes Geschlecht der Invarianten Ω, Δ gleich viele Klassen wie das entsprechende Geschlecht der Invarianten Ω_I, Δ_I.

Die Bestimmung der Klassenanzahl ist somit auf den Fall zurückgeführt, in welchem die Invarianten keine kubischen Theiler besitzen.

Setzt man $\Omega = \Omega_I \Omega_{II}^2$, $\Delta = \Delta_I \Delta_{II}^2$, so erhält man aus jeder Klassenrepräsentanten $\left(\begin{smallmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{smallmatrix}\right)$ der Invarianten Ω_I, Δ_I, deren Coefficienten in Bezug auf jeden Primfactor von $\Omega\Delta$ den Bedingungen genügen

$$|a| = 0, \quad |a'| = |\Omega_I|, \quad |a''| = |\Omega_I \Delta_I|,$$
$$|b| > |\Omega_I \Delta_I \Delta_{II}|, \quad |b'| > |\Omega_{II} \Omega_I \Delta_{II} \Delta_I|, \quad |b''| > |\Omega_{II} \Omega_I \Delta|,$$

eine Repräsentante der entsprechenden Klasse der Invarianten Ω, Δ in der Form

$$\begin{pmatrix} a, & \Omega_{II}^2 a', & \Omega_{II}^2 \Delta_{II}^2 a'' \\ \Omega_{II}^2 \Delta_{II} b, & \Omega_{II} \Delta_{II} b', & \Omega_{II} b'' \end{pmatrix}.$$

Hieraus und aus dem Schlusssatze von § 6 ergiebt sich zur Bestimmung der Klassenanzahl eines vorgeschriebenen Geschlechtes G der Invarianten Ω, Δ die Regel*):

Ist Θ der grösste gemeinschaftliche Theiler von Ω und Δ und sind Ω_2^2, Δ_2^2 die grössten in Ω, Δ aufgehenden Quadrate, $\Omega = \Omega' \Omega_2^2$, $\Delta = \Delta' \Delta_2^2$; M das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von Ω' und Δ'; $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ diejenigen verschiedenen Primfactoren von Θ, für welche

$$\left(\frac{-\Delta_k' f}{\theta_k}\right) = \left(\frac{-\Omega_k' F}{\theta_k}\right) = +1$$

ist, wo $\Delta_k' = \Delta' \theta^{-1}$ oder $= \Delta'$ ($\Omega_k' = \Omega' \theta_k^{-1}$ oder $= \Omega'$) ist, je nachdem θ_k in Δ' (Ω') aufgeht oder nicht; ist endlich 2^n die Anzahl der verschiedenen unter den Totalcharakteren

$$\left(\frac{d_1}{\theta_1}\right), \quad \left(\frac{d_2}{\theta_2}\right), \quad \ldots, \quad \left(\frac{d_m}{\theta_m}\right)$$

---

*) Vgl. die Note, dieses Journal Bd. 112, S. 87. Auf S. 88 Z. 4 v. o. ist die Clausel (> 3) wegzulassen (nach Art. 19).

aller positiven und negativen Theiler d von $2M$, (wo $d_k = d\theta_k^{-1}$ oder $= d$, je nachdem θ_k in d aufgeht oder nicht), so ist die Klassenanzahl des Geschlechts G gleich 2^{m-n}.

§ 8.

Erweiterung der Untersuchungen in § 3—5. Beweis des Satzes $\mathfrak{A}$.

44. Die bisherigen Untersuchungen reichten zwar hin, um die Klassenanzahl für beliebige ungerade Invarianten zu ermitteln; dagegen bedürfen sie noch einer Erweiterung, wenn es sich um den allgemeinen Beweis des Satzes $\mathfrak{A}$ in Art. 16 handelt. Von den Voraussetzungen in § 3—5 über die Invarianten $\Omega\Theta$, $\Delta\Theta$ soll jetzt die erste, dass dieselben keinen kubischen Theiler besitzen, noch beibehalten, die zweite aber, dass ihr grösster gemeinschaftlicher Theiler Θ prim sei zu $\Omega\Delta$, fallen gelassen werden. Die Untersuchung gestaltet sich dann derjenigen in § 3—5 ganz ähnlich und führt zu analogen Ergebnissen, weswegen es genügen mag, hier die Hauptmomente derselben mitzutheilen.

Es seien wieder Ω_2^2, Δ_2^2, Θ_2^2 die grössten in Ω, Δ, Θ aufgehenden Quadrate, $\Omega = \Omega_1\Omega_2^2$, $\Delta = \Delta_1\Delta_2^2$, $\Theta = \Theta_1\Theta_2^2$, $\overline{\Omega}_1$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von Ω_1 und Θ_1, $\overline{\Delta}_1$ derjenige von Δ_1 und Θ_1, endlich

$$\Omega_1 = \overline{\Omega}_1\dot{\Omega}_1, \quad \Delta_1 = \overline{\Delta}_1\dot{\Delta}_1, \quad \Theta_1 = \overline{\Omega}_1\overline{\Delta}_1\overline{\Theta}_1.$$

Dann enthält das Product $\overline{\Omega}_1\dot{\Omega}_1\Omega_2\overline{\Delta}_1\dot{\Delta}_1\Delta_2\overline{\Theta}_1\Theta_2$ keinen quadratischen Theiler und die Invarianten lauten

$$\Omega\Theta = \dot{\Omega}_1\overline{\Omega}_1^2\Omega_2^2\overline{\Delta}_1\overline{\Theta}_1\Theta_2^2, \quad \Delta\Theta = \dot{\Delta}_1\overline{\Delta}_1^2\Delta_2^2\overline{\Omega}_1\overline{\Theta}_1\Theta_2^2.$$

Nun gilt der Satz:

Jede primitive Form der Invarianten $\Omega\Theta$, $\Delta\Theta$ lässt sich aus einer primitiven Form der Invarianten $\Omega^* = \dot{\Omega}_1\Omega_2^2\overline{\Delta}_1\Theta_2^2$, $\Delta^* = \dot{\Delta}_1\Delta_2^2\overline{\Omega}_1\overline{\Theta}_1$ durch eine Substitution der Determinante $\overline{\Omega}_1^2\overline{\Delta}_1\overline{\Theta}_1\Theta_2$ ableiten, und zwar erhält man alle primitiven Klassen (jede im allgemeinen mehrmals) der Invarianten $\Omega\Theta$, $\Delta\Theta$, wenn man auf jede Form eines vollständigen Systems nicht äquivalenter primitiver Formen der Invarianten Ω^*, Δ^* alle eingerichteten Substitutionen der Determinante $\overline{\Omega}_1^2\overline{\Delta}_1\overline{\Theta}_1\Theta_2$ anwendet; d. h. alle Substitutionen der Form

$$T = \begin{pmatrix} \Omega_{11}\Theta_{11} & 0 & 0 \\ \Omega_{11}\Theta_{11}\alpha' & \Omega_{12}\Delta_{11}\Theta_{12}\Theta_{21} & 0 \\ \Omega_{11}\Theta_{11}\alpha'' & \Omega_{12}\Delta_{11}\Theta_{12}\Theta_{21}\beta'' & \overline{\Omega}_1\Delta_{12}\Theta_{22} \end{pmatrix},$$

wo $\Omega_{11}\Omega_{12} = \overline{\Omega}_1$, $\Delta_{11}\Delta_{12} = \overline{\Delta}_1$, $\Theta_{11}\Theta_{12} = \overline{\Theta}_1$, $\Theta_{21}\Theta_{22} = \Theta_2$ ist und α', α'', β'' diejenigen Zahlen vollständiger Restsysteme nach den Moduln $\Omega_{12}\Delta_{11}\Theta_{12}\Theta_{21}$, $\Omega_{12}\Delta_{12}\Theta_{22}$, $\Omega_{11}\Delta_{12}\Theta_{22}$ bezw. durchlaufen, für welche $a+a'\alpha'^2$ prim wird zu $\Omega_{12}\Theta_{12}$, $\Delta_{12}^{-1}\Theta_{22}^{-2}(a'+a''\beta''^2)$ prim zu $\Delta_{12}\Theta_{22}$.

Weiter ergiebt sich:

Alle derselben Form der Invarianten Ω^*, Δ^* entstammenden Formen, welche denselben Zerlegungen von $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Delta}_1$, $\overline{\Theta}_1$, Θ_2, ausserdem mod. $\Omega_{12}\Theta_{12}$ congruenten Werthen von α' und mod. $\Delta_{12}\Theta_{22}$ congruenten Werthen von β'' entsprechen, sind äquivalent.

Sind die soeben genannten Bedingungen für zwei Formen f_k $(k = 1, 2)$, welche derselben Form f der Invarianten Ω^*, Δ^* durch zwei eingerichtete Substitutionen

$$T_1 = \begin{pmatrix} \Omega_{11}\Theta_{11} & 0 & 0 \\ \Omega_{11}\Theta_{11}\alpha_1' & \Omega_{12}\Delta_{11}\Theta_{12}\Theta_{21} & 0 \\ \Omega_{11}\Theta_{11}\alpha_1'' & \Omega_{12}\Delta_{11}\Theta_{12}\Theta_{21}\beta_1'' & \overline{\Omega}_1\Delta_{12}\Theta_{22} \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} \Omega_{11}'\Theta_{11}' & & \\ \Omega_{11}'\Theta_{11}'\alpha_2' & \Omega_{12}'\Delta_{11}'\Theta_{12}'\Theta_{21}' & \\ \Omega_{11}'\Theta_{11}'\alpha_2'' & \Omega_{12}'\Delta_{11}'\Theta_{12}'\Theta_{21}'\beta_2'' & \overline{\Omega}_1\Delta_{12}'\Theta_{22}' \end{pmatrix}$$

entstammen, nicht erfüllt, so ist der Satz in Anwendung zu bringen:

Damit die Formen f_1 und f_2 äquivalent sind, ist nothwendig und hinreichend, dass es eine (ganzzahlige) automorphe Substitution

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{pmatrix}$$

von f giebt, deren Coefficienten den Congruenzen (10.) und (11.) des Art. 13 genügen, für welche die Moduln jetzt aber bezw. $\overline{\Omega}_1\overline{\Theta}_1$ und $\overline{\Delta}_1\Theta_2$ sind und in welchen α_k, β_k, γ_k, δ_k wieder durch die Congruenzen (α), (β) bestimmt sind, deren Moduln

$$\vartheta_{1k} \qquad \vartheta_{1k}' \qquad \vartheta_{2k} \qquad \vartheta_{2k}'$$

nunmehr die grössten gemeinschaftlichen Theiler von

$\Omega_{1k}\Theta_{1k}$ und $\Omega_{1k}'\Theta_{1k}'$; $\Omega_{1k}\Theta_{1k}$ und $\Omega_{1l}'\Theta_{1l}'$; $\Delta_{1k}\Theta_{2k}$ und $\Delta_{1k}'\Theta_{2k}'$; $\Delta_{1k}\Theta_{2k}$ und $\Delta_{1l}'\Theta_{2l}'$ $(k \gtrless l)$ bezw. bedeuten.

45. Die Discussion der Congruenzen (10.) und (11.) zeigt nun wieder, dass sie sich für zwei demselben Geschlechte G angehörige Formen

f_1 und f_2 stets erfüllen lassen, ausgenommen für diejenigen Primfactoren θ_1 von $\overline{\Omega}_1\overline{\Theta}_1$, für welche zugleich

$$(\theta_1.) \qquad \left(\frac{-\Delta_1'\theta_1^{-1}f_1}{\theta_1}\right)=+1, \quad \left(\frac{-\Omega_1'\overline{\Theta}_1\theta_1^{-\varrho_1}F_1}{\theta_1}\right)=+1$$

und für diejenigen Primfactoren θ_2 von $\overline{\Delta}_1\Theta_2$, für welche zugleich

$$(\theta_2.) \qquad \left(\frac{-\Delta_1'f_1}{\theta_2}\right)=+1, \quad \left(\frac{-\Omega_1'\overline{\Theta}_1\theta_2^{-\varrho_2}F_1}{\theta_2}\right)=+1$$

ist, wo $\Omega_1'=\dot{\Omega}_1\overline{\Delta}_1$, $\Delta_1'=\dot{\Delta}_1\overline{\Omega}_1\overline{\Theta}_1$, ϱ_1 $(\varrho_2)=1$ oder 0 ist, je nachdem θ_1 (θ_2) in $\overline{\Theta}_1$ $(\overline{\Delta}_1)$ aufgeht oder nicht.

Für den Beweis der Auflösbarkeit der Gleichung (II.) unter den angegebenen Bedingungen bedarf es jetzt des früher angewandten Inductionsverfahrens nicht mehr, da an Stelle der Form F_2 des Art. 35 eine Form tritt, deren Invarianten den Voraussetzungen des § 3 entsprechen, unter welchen die Richtigkeit des Satzes $\mathfrak{A}$ bereits nachgewiesen ist.

Werden die Producte der Primzahlen θ_1 und θ_2, welche den Bedingungen (θ_1) und (θ_2) genügen, bezw. mit Γ_1 und Γ_2 bezeichnet, so ist wieder $\Gamma=\Gamma_1\Gamma_2$ die Grundzahl des Geschlechtes G, die Zahlen χ bestimmen sich durch die Congruenzen (19.) und (20.) des Art. 16, und die Gleichung (21.), in welcher jetzt d einen positiven oder negativen Theiler von $2\dot{\Omega}_1\dot{\Delta}_1\Theta_1$ (dem verdoppelten kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen von Ω_1', Δ_1') bedeutet, d. h. der Satz $\mathfrak{B}$, giebt auch hier das Kriterium für die Aequivalenz der Formen f_1 und f_2. Um über die Aequivalenz zweier beliebigen Formen desselben Geschlechts der Invarianten $\Omega\Theta$, $\Delta\Theta$ zu entscheiden, hat man aus den ihnen äquivalenten Hauptrepräsentanten $\mathfrak{f}_k=\begin{pmatrix}\mathfrak{a}_k, & \mathfrak{a}_k', & \mathfrak{a}_k''\\ \mathfrak{b}_k, & \mathfrak{b}_k', & \mathfrak{b}_k''\end{pmatrix}$, $(k=1,2)$ die Formen $\mathfrak{g}_k=\begin{pmatrix}\mathfrak{a}_k, & \overline{\Omega}_1^{-2}\mathfrak{a}_k', & (\Theta_1\Theta_2)^{-2}\mathfrak{a}_k''\\ (\overline{\Omega}_1\Theta_1\Theta_2)^{-1}\mathfrak{b}_k, & (\Theta_1\Theta_2)^{-1}\mathfrak{b}_k', & \overline{\Omega}_1^{-1}\mathfrak{b}_k''\end{pmatrix}$ zu bilden, welche äquivalent sind und aus derselben Hauptrepräsentanten f durch die Substitutionen S_k hervorgehen mögen. Bezeichnet dann S die Substitution $x=y$, $x'=\overline{\Omega}_1y'$, $x''=\Theta_1\Theta_2y''$, so geht $\mathfrak{f}_k$ aus f hervor durch die Substitution SS_k, welche in eine eingerichtete und eine nachfolgende unimodulare zu zerlegen ist, u. s. w. wie früher (Art. 17). (1.)

46. Auch bei der Erweiterung der Untersuchung in § 4 über die Darstellung einer binären Form durch eine ternäre erhält man den früheren völlig analoge Resultate; insbesondere bleiben die Sätze $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ ihrem

Wortlaute nach gänzlich unverändert*), wenn man den Zahlen d, I_1, I_2 die im vorigen Artikel angegebene erweiterte Bedeutung beilegt.

Aus dem Satze $\mathfrak{G}$ ergiebt sich sodann wie in Art. 34 der Satz $\mathfrak{A}$ für solche ungerade Invarianten, welche keinen kubischen Theiler besitzen. Endlich erkennt man aus dem in Art. 43 angegebenen Uebergang von diesen Invarianten zu beliebigen ungeraden Invarianten sofort die allgemeine Gültigkeit des Theorems $\mathfrak{A}$.

§ 9.

Beweis der Auflösbarkeit der Gleichung $p^2-\Omega F(q, q', q'') = \varepsilon$ unter den in § 2 aufgestellten Bedingungen.

47. Wie zuerst Herr *Hermite* bemerkt hat**), reproducirt sich die quaternäre Form $p^2-\Omega F(q, q', q'')$ durch Multiplication. Nennt man zur Abkürzung eine den Bedingungen des § 2 entsprechende Auflösung der Gleichung (II.) *brauchbar,* so gilt der Satz:

Sind ε und ε_1 relativ prim, so folgt aus zwei brauchbaren Auflösungen der Gleichungen

$$p^2-\Omega F(q,\ q',\ q'') = \varepsilon, \quad p_1^2-\Omega F(q_1,\ q_1',\ q_1'') = \varepsilon_1$$

auch eine brauchbare Auflösung der Gleichung

$$p_2^2-\Omega F(q_2,\ q_2',\ q_2'') = \varepsilon_2 = \varepsilon\varepsilon_1$$

mit Hülfe der Formeln:

$$(1.)\quad \begin{cases} p_2 = pp_1+\Omega\{(Aq+B''q'+B'q'')q_1+(B''q+A'q'+Bq'')q_1'+(B'q+Bq'+A''q'')q_1''\}, \\ q_2 = pq_1+qp_1 + a(q'q_1''-q''q_1')+b''(q''q_1-qq_1'')+b'(qq_1'-q'q_1), \\ q_2' = pq_1'+q'p_1+b''(q'q_1''-q''q_1')+a'(q''q_1-qq_1'')+ b(qq_1'-q'q_1), \\ q_2'' = pq_1''+q''p_1+ b'(q'q_1''-q''q_1')+ b(q''q_1-qq_1'')+a''(qq_1'-q'q_1). \end{cases}$$

Um die Brauchbarkeit dieser Auflösung nachzuweisen, hat man zu zeigen, dass die Bedingungen des § 2 in Bezug auf jeden Primfactor θ von $\Omega\Delta$ und in Bezug auf den Modul 2 erfüllt sind. Da ε und ε_1 relativ prim sind, kann θ nicht in beiden zugleich aufgehen; es sei daher

$$|\varepsilon_1|_\theta = \eta_1 = 0; \quad \text{also} \quad \eta_2 = \eta.$$

Ist $\eta = 0$, $\omega > 0$, so ist nach § 2 (Bd. 113 S. 199) $\varepsilon R\theta$ und $\varepsilon_1 R\theta$; also auch

$$\eta_2 = 0, \quad \varepsilon_2 R\theta.$$

---

*) In $\mathfrak{F}$ (Art. 32) ist statt „Gruppen“ zu lesen „Systeme von Totalcharakteren“.

**) Dieses Journal, Bd. 47, S. 324; vgl. auch *Bachmann*, ib. Bd. 71, S. 299.

In den übrigen Fällen ist $\eta > 0$ und man überzeugt sich mittelst der Formeln (1.) sehr leicht, dass die für p, q, q', q'', ε_0 aufgestellten Bedingungen in gleicher Weise auch für p_2, q_2, q_2', q_2'', $(\varepsilon_2)_0$ gelten. Ist insbesondere $\varepsilon \equiv 0 \pmod 4$, ε_1 ungerade, so sind nach Voraussetzung a, a', a'', A, A', A'' ungerade, b, b', b'', B, B', B'' gerade, p, q, q', q'' ungerade und aus den Formeln (1.) folgt sofort

$$p_2 \equiv q_2 \equiv q_2' \equiv q_2'' \equiv p_1+q_1+q_1'+q_1'' \pmod 2,$$

aus der Gleichung $p_1^2-\Omega F(q_1, q_1', q_1'') = \varepsilon_1$ aber $p_1+q_1+q_1'+q_1'' \equiv 1 \pmod 2$; somit sind p_2, q_2, q_2', q_2'' ebenfalls ungerade.

48. Die Auflösbarkeit der Gleichung (II.) unter den Bedingungen (Voraussetzungen und Forderungen) des § 2 bleibt jetzt nur noch für den Fall zu beweisen, dass $\varepsilon = -1$, 2, 4 oder Potenz einer ungeraden Primzahl θ ist.

1) $\varepsilon = -1$.

Es muss $-1R\Omega$ sein, was in § 2 durch die Bedingung ausgedrückt ist, dass $\varepsilon R\theta$ sein muss, wenn $\eta = 0$, $\omega > 0$ ist. Ist dann $\mathfrak{p}$ eine Wurzel der Congruenz $p^2 \equiv -1 \pmod \Omega$, so setze man $p = \mathfrak{p}+\Omega z$. Dadurch geht die Gleichung (II.) über in

$$(\text{II}'.) \qquad \frac{p^2+1}{\Omega} = \frac{\mathfrak{p}^2+1}{\Omega} + 2\mathfrak{p}z + \Omega z^2 = F(q, q', q'').$$

Nach Satz 21 ist diese Gleichung auflösbar, wenn $\frac{p^2+1}{\Omega}$ prim ist zu $\Omega\Delta$, $\frac{p^2+1}{\Omega} FR\theta$ in Bezug auf jeden Primfactor θ von Δ und wenn p^2+1 einer der Zahlen 2, 3, 5, 6, 7 congruent ist (mod. 8). Letzteres ist der Fall, sobald p nicht durch 4 theilbar ist, was für z drei zulässige Werthe (mod. 4) giebt. Was die zweite Bedingung anbetrifft, so ist zu unterscheiden, ob θ in Ω aufgeht oder nicht. Im ersten Falle muss, wenn $\frac{p^2+1}{\Omega} = \mathfrak{p}_1$ gesetzt wird,

$$\left(\frac{2\mathfrak{p}z+\mathfrak{p}_1}{\theta}\right) = \left(\frac{F}{\theta}\right)$$

sein, und da jetzt θ nicht in $\mathfrak{p}$ aufgeht, lässt sich z (mod. θ) immer dieser Bedingung gemäss bestimmen. Geht θ in Ω nicht auf, so muss

$$\left(\frac{p^2+1}{\theta}\right) = \left(\frac{\Omega F}{\theta}\right)$$

werden; auch diese Bedingung ist bekanntlich durch einen oder mehrere Werthe (mod. θ) von p und somit von z erfüllbar. Endlich muss und kann

z in Bezug auf jede in Ω, aber nicht in Δ aufgehende Primzahl als Modul so bestimmt werden, dass dieselbe in $2\mathfrak{p}z+\mathfrak{p}_1$ nicht aufgeht. Bestimmt man nun z so, dass es nach dem Modul 4 und den verschiedenen Primfactoren von Ω und Δ je einem der gefundenen Werthe congruent wird, so sind alle Bedingungen des Satzes $\mathfrak{A}$ erfüllt.

2) $\varepsilon = 2$.

Dieser Fall ist dem vorigen ganz analog.

3) $\varepsilon = 4$.

Setzt man $p = 2+\Omega z$, so geht (II.) über in

$$4z+\Omega z^2 = F.$$

Der Bedingung des Satzes $\mathfrak{A}$ für den Modul 8 wird durch jedes ungerade z genügt; sodann muss

$$\left(\frac{4z+\Omega z^2}{\theta}\right) = \left(\frac{F}{\theta}\right)$$

sein in Bezug auf jeden Primfactor θ von Δ; also, wenn θ in Ω aufgeht:

$$\left(\frac{z}{\theta}\right) = \left(\frac{F}{\theta}\right).$$

Wenn θ in Ω nicht aufgeht, führe man z' an Stelle von z ein durch die Congruenz $zz' \equiv 1 \pmod{\theta}$. Man erhält die Bedingung

$$\left(\frac{4z'+\Omega}{\theta}\right) = \left(\frac{F}{\theta}\right).$$

Diese Bedingungen sind im allgemeinen alle zugleich erfüllbar. Nur wenn $\theta = 3$, $|\Omega|_3 = 0$ und $\Omega FR3$, kann der letzteren nicht genügt werden, da z' nicht durch 3 theilbar sein darf. Doch kann man dann F durch 3 theilbar machen, indem man $|\Delta|_3 = \mu$, $q'' = 3^\mu q_1''$, $z = 3^\mu z_1$ setzt. Hierdurch geht (II.) über in

$$4z_1+3^\mu\Omega z_1^2 = 3^{-\mu}Aq^2+3^{-\mu}A'q'^2+3^\mu A''q_1''^2+\cdots,$$

wo nun die erste Invariante der Form rechts den Factor 3 nicht mehr enthält und die Schwierigkeit beseitigt ist. Endlich kann noch gezeigt werden, dass auch q, q', q'' ungerade werden, wenn, wie vorausgesetzt, a, a', a'' ungerade, b, b', b'' gerade, ΩA, $\Omega A'$, $\Omega A''$ sämmtlich von der Form $4n+3$ sind, also $a \equiv a' \equiv a'' \pmod{4}$. Dann folgt nämlich aus der Gleichung (II.) die Congruenz $q^2+q'^2+q''^2 \equiv 3 \pmod{4}$, welche nur möglich ist, wenn $q \equiv q' \equiv q'' \equiv 1 \pmod{2}$ ist.

4) $\varepsilon = \theta^\eta$.

Auch die verschiedenen hier zu unterscheidenden Fälle bieten keine

Schwierigkeiten. Im Falle $\omega > 0$, $\delta > 0$, a) z. B. wird man setzen können

$$p = \theta^{\frac{1}{2}\eta}(1+\Omega_0\theta^{2\omega+\delta-\eta}z), \quad q' = \theta^{\omega}q_1', \quad q'' = \theta^{\omega}q_1''.$$

Hierdurch geht die Gleichung (II.) in

$$2z+\Omega_0\theta^{2\omega+\delta-\eta}z^2 = A_0q^2+A_0'\theta^{\omega}q_1'^2+A''\theta^{\omega+\delta}q_1''^2+\cdots = F_0(q,\ q_1',\ q_1'')$$

über, wo F_0 eine primitive Form der Invarianten $\Delta_0\theta^{\omega}$, $\Omega_0\theta^{\delta}$ ist und z durch θ nicht theilbar und so gewählt werden muss, dass

$$\left(\frac{2z}{\theta}\right) = \left(\frac{A_0}{\theta}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{2z+\Omega_0\theta^{2\omega+\delta-\eta}z^2}{\theta'}\right) = \left(\frac{F_0}{\theta'}\right)$$

wird für jeden Primfactor θ' von Δ_0. Damit wird die Behandlung dieses Falles derjenigen für $\varepsilon = 4$ analog; er möge daher, wie auch alle übrigen, übergangen werden.

Nach dem vorigen Artikel folgt aus der Auflösbarkeit der Gleichung (II.) für die hier aufgezählten Specialfälle nun auch diejenige für den Fall, dass ε verschiedene Primfactoren enthält; daher gilt der Satz:

Die Gleichung $p^2-\Omega F(q, q', q'') = \varepsilon$ *ist unter den in* § 2 *aufgestellten Bedingungen stets auflösbar.*

Zürich, September 1894.

Nachtrag.

Von indefiniten Formen gerader Determinante möge hier noch der Specialfall erwähnt werden, in welchem die Invarianten Potenzen von 2 sind: $\Omega = 2^{\omega}$, $\Delta = 2^{\delta}$. Diese Formen sind sämmtlich Nullformen.

Ist $\omega > 2$, $\delta > 2$, so existiren zu gegebenen Invarianten 12 oder 8 Geschlechter eigentlich primitiver Formen, je nachdem ω, δ gleichzeitig gerade sind oder nicht, und zwar sind es diejenigen, welche mit dem Satze verträglich sind:

Die Relation $(-1)^{\frac{f-1}{2}} = (-1)^{\frac{F-1}{2}} = -1$ ist nothwendig oder unmöglich, je nachdem $(-1)^{\omega\frac{f^2-1}{8}+\delta\frac{F^2-1}{8}} = -1$ oder $+1$ ist.

Ist $\omega > 4$, $\delta > 4$, so enthält jedes existirende Geschlecht zwei Klassen oder nur eine Klasse, je nachdem die Bedingungen

$$(-1)^{\frac{f^2-1}{8}} = +1, \quad (-1)^{\frac{F^2-1}{8}} = +1$$

gleichzeitig erfüllt sind oder nicht.

In den übrigen Fällen kommen zwei Klassen nur noch vor für

$$\left.\begin{array}{lll} \omega = 3,\ \delta = 3 & \text{im Geschlechte} & (-1)^{\frac{f-1}{2}} = +1,\ (-1)^{\frac{F-1}{2}} = +1 \\ \omega = 3,\ \delta > 4 & \text{in den Geschl.} & (-1)^{\frac{f-1}{2}} = \pm 1,\ (-1)^{\frac{F-1}{2}} = +1 \\ \omega > 4,\ \delta = 3 & \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} & (-1)^{\frac{f-1}{2}} = +1,\ (-1)^{\frac{F-1}{2}} = \pm 1 \end{array}\right\},\ (-1)^{\frac{f^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{F^2-1}{8}} = +1.$$

Für $\omega > 4$, $\delta > 4$ enthält folgende Tafel ein vollständiges System nichtäquivalenter primitiver Formen der Invarianten 2^ω, 2^δ:

I. $\omega = 2m,\ \delta = 2n.$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2^{2m}a_0', & 0 \\ 2^{2m+n}, & 0, & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a, & 2^{2m-2}, & 0 \\ 0, & 2^{m+n+1}, & 2^{m-1} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a, & 2^{2m}, & 0 \\ 0, & 2^{m+n}, & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a, & 2^{2m}, & 0 \\ 0, & 2^{m+n}, & 2^{m+1} \end{pmatrix}.$$

$a_0' = -1, 3, 7,\quad a = -3, 13,\quad a = \pm 1, \pm 3, \pm 63,\quad a = 1, 3, 5, 7.$

II. $\omega = 2m+1,\ \delta = 2n.$ III. $\omega = 2m,\ \delta = 2n+1.$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2^{2m+1}a_0', & 0 \\ 2^{2m+n+1}, & 0, & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a, & 2^{2m}, & 0 \\ 0, & 2^{m+n+1}, & 2^m \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} a, & 2^{2m+2n+1}, & 0 \\ 0, & 2^m, & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a, & 2^{2m+1}, & 0 \\ 0, & 2^{m+n}, & 2^m \end{pmatrix}$$

$a_0' = \pm 1, \pm 3, \pm 7,\quad a = -1, 3, -5, 7, 15,\quad a = \pm 1, \pm 3, \pm 7,\quad a = \pm 1, \pm 3, -7.$

IV. $\omega = 2m+1,\ \delta = 2n+1.$

$$\begin{pmatrix} a, & 2^{2m+1}, & 0 \\ 0, & 2^{m+n+1}, & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a, & 2^{2m+1}, & 0 \\ 0, & 2^{m+n+1}, & 2^{m+1} \end{pmatrix}.$$

$a = \pm 1, \pm 3, \pm 7,\quad a = \pm 1, \pm 3, -7.$

Während des Druckes des letzten Bogens der gegenwärtigen Arbeit ist bei der Redaction die schmerzliche Nachricht aus Zürich eingetroffen, dass der Verfasser, Dr. *A. Meyer,* Professor an der Universität Zürich, am 7. Juli d. J. aus dem Leben geschieden ist. Er hatte trotz seines schweren Leidens mit Ausnahme der beiden letzten Bogen noch die Correcturen seiner Arbeit gelesen, welche den Abschluss einer Reihe von Abhandlungen bildet, die er in unserem Journal vom 98. Bande an veröffentlicht hat.

F.

Relations différentielles entre les périodes des fonctions hyperelliptiques $p = 2$.

(Extrait d'une lettre de M. *F. Brioschi* à M. *L. Fuchs*.)

1. L'étude de vos intéressantes communications à l'Académie de Berlin „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen“ (Sitzungsberichte 1888, 1889, 1890) m'a reconduit à la considération des relations différentielles existantes entre les périodes des fonctions hyperelliptiques $p = 2$. Je m'étais déjà occupé de ces relations, mais d'un point de vue un peu différent, dans une communication à l'Académie des Lincei (Décembre 1888), mais les propriétés caractéristiques, et selon moi d'une grande importance, de votre équation différentielle du cinquième ordre (S. 23 (1.)) m'a montré que par cette voie on serait arrivé à de nouveaux résultats.

Vous savez que si un système fondamentale d'intégrales y_1, y_2, y_3 d'une équation différentielle du troisième ordre est lié par une relation quadratique, l'*invariant* de l'équation est nul, et l'équation est équivalente à son adjointe*).

M. *Darboux* a dédié un chapitre (le 5ième — livre IV) de sont excellent traité „Sur la théorie générale des surfaces“ aux équations différentielles linéaires d'ordre *impair* équivalentes à leur adjointe. Votre équation du 5ième ordre jouit de cette propriété: ses deux invariants des degrés impairs sont nuls et en conséquence elle est équivalente à son adjointe.

En indiquant par

$$\omega_{1m},\quad \omega_{2m};\quad \eta_{1m},\quad \eta_{2m} \qquad (m = 1, 2, 3, 4)$$

les périodes de première et de seconde espèce; et par $f(x)$ une forme du

*) *Fuchs:* Ueber lineare homogene Differentialgleichungen etc., Acta Mathematica vol. I pag. 332. *Wallenberg*: Anwendung der Theorie der Differentialinvarianten etc. Dieses Journal Bd. 113 S. 36.

sixième ordre, je pose avec M. *Wiltheiss* *):

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \qquad \omega_2 = -\frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}},$$

$$\eta_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{g_1(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}\int \frac{g_2(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx$$

étant:

$$g_1(x) = 2[3f_2(x) - xf_3(x)], \quad g_2(x) = 2f_3(x)$$

et

$$f_1(x) = \frac{1}{6}f'(x), \quad f_2(x) = \frac{1}{5.6}f''(x), \quad \ldots$$

Soit x une racine quelconque de l'équation $f(x) = 0$, et f_1, f_2, f_3 etc. les valeurs de $f_1(x)$, $f_2(x)$ etc. en substituant, au lieu de x, cette racine. On obtient ces premières équations différentielles:

$$3.4.f_1\frac{d\omega_1}{dx} = -\eta_1 + x\eta_2 + 2f_3\omega_2 - 2(3f_2 - xf_3)\omega_1,$$

$$\frac{d\omega_2}{dx} = -\tfrac{1}{2}\omega_1 - x\frac{d\omega_1}{dx},$$

$$\frac{d\eta_1}{dx} = \tfrac{1}{2}\eta_2 + \tfrac{3}{10}(5f_4 - 2xf_5)\omega_2 - \tfrac{1}{5}(20f_3 - 15xf_4 + 3x^2f_5)\omega_1 - 2(3f_2 - xf_3)\frac{d\omega_1}{dx},$$

$$\frac{d\eta_2}{dx} = -\tfrac{3}{5}f_5\omega_2 + \tfrac{3}{10}(5f_4 - 2xf_5)\omega_1 + 2f_3\frac{d\omega_1}{dx}.$$

2. Soient:

$$p_{rs} = \omega_{1r}\omega_{2s} - \omega_{1s}\omega_{2r}, \quad q_{rs} = \eta_{1r}\eta_{2s} - \eta_{1s}\eta_{2r}, \quad t_{rs} = \omega_{1r}\eta_{2s} - \omega_{1s}\eta_{2r},$$

$$u_{rs} = \omega_{1r}\eta_{1s} - \omega_{1s}\eta_{1r} + \omega_{2s}\eta_{2r} - \omega_{2r}\eta_{2s}, \qquad v_{rs} = \eta_{1r}\omega_{2s} - \eta_{1s}\omega_{2r};$$

les relations connues entre les périodes conduisent aux suivantes:

$$p_{13} + p_{24} = 0, \quad q_{13} + q_{24} = 0, \quad t_{13} + t_{24} = 0, \quad u_{13} + u_{24} = 0, \quad v_{13} + v_{24} = 0$$

et en posant:

$$p_1 = p_{12}, \quad p_5 = p_{34}, \quad p_3 = p_{13} = p_{42}, \quad p_2 = p_{14}, \quad p_4 = p_{23}$$

et analoguement pour les q_{rs}, t_{rs} etc. on a les relations identiques:

$$(1.) \quad \begin{cases} (p_1p_5) = 0, \ (q_1q_5) = 0, \ (t_1t_5) = 0, \ (v_1v_5) = 0, \ (u_1u_5) = C, \\ (p_1t_5) = 0, \ (p_1u_5) = 0, \ (p_1v_5) = 0, \ (q_1t_5) = 0, \ (q_1u_5) = 0, \ (q_1v_5) = 0, \\ (t_1u_5) = 0, \ (v_1u_5) = 0, \ (p_1q_5) = C, \ (t_1v_5) = -C \end{cases}$$

---

*) Partielle Differentialgleichungen der hyperelliptischen etc. Mathematische Annalen Bd. 31 S. 136.

étant C une constante relativement aux racines de l'équation $f(x) = 0$, limites des intégrales $\omega_1, \omega_2, \ldots$; comme nous allons démontrer. Nous avons écrit:

$$(p_1 q_5) = p_1 q_5 + p_5 q_1 + 2p_3 q_3 + p_2 q_4 + p_4 q_2.$$

Si l'on désigne par $p, q, t, \ldots$ l'une quelconque des quantités $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$; et par $p', q', t', \ldots$ leurs dérivées relatives à la racine x, on déduit des équations supérieures les suivantes:

$$(2.)\quad \begin{cases} 3.4.f_1 p' &= -x^2 t + xu - v - 6f_2 p, \\ 3.4.f_1 t' &= -q - 2(3f_2 - 2xf_3)t - 2f_3 u + Lp, \\ 3.2.f_1 u' &= -xq + 2(3f_1 - 3xf_2 + x^2 f_3)t - 2f_3 v + Mp, \\ 3.4.f_1 v' &= -x^2 q + 2(3f_1 - 3xf_2 + x^2 f_3)u + 2(3f_2 - 2xf_3)v + Np, \\ 3.4.f_1 q' &= Nt - Mu + Lv + 6f_2 q \end{cases}$$

ayant posé:

$$L = \tfrac{4}{5}(5f_3^2 - 9f_1 f_5), \quad Lx - M = 6(2f_2 f_3 - 3f_1 f_4),$$
$$Lx^2 - 2Mx + N = 3.4(3f_2^2 - 4f_1 f_3).$$

Ces quantités L, M, N sont liées à la forme $f(x)$ du sixième ordre d'une manière remarquable. En effet, en indiquant par k le covariant biquadratique de cette forme:

$$k = \tfrac{1}{2}(ff)_4 = (k_0, k_1, \ldots, k_4)(x, 1)^4$$

et par A l'invariant quadratique, on trouve que

$$L = 3.4(k_0 x^2 + 2k_1 x + k_2) + \tfrac{6}{5}A,$$
$$M = -3.4(k_1 x^2 + 2k_2 x + k_3) + \tfrac{6}{5}Ax,$$
$$N = 3.4(k_2 x^2 + 2k_3 x + k_4) + \tfrac{6}{5}Ax^2,$$

et en conséquence:

$$Lx^2 - 2Mx + N = 3.4.k,$$
$$LN - M^2 = 3^2.8(\tfrac{1}{5}Ak + 2i),$$

et i l'autre covariant biquadratique $= \tfrac{1}{2}(kk)_2$.

La prémière et la dernière des équations (2.) donnent à cause des identités (1.) que

$$(p_1' q_5) + (q_1' p_5) = 0$$

ainsi

$$(p_1 q_5) = C,$$

constante comme on a annoncé.

La première des équations (2.) peut s'écrire:

$$-x^2 t + xu - v = 3.4.f_1 p' + 6f_2 p,$$

et des trois suivantes l'on déduit que

$$(3.) \qquad -x^2t'+xu'-v' = xt-\tfrac{1}{2}u+6f_2p'+4f_3p,$$

et encore de la seconde et de la troisième:

$$(4.) \qquad \tfrac{1}{2}u'-xt' = \tfrac{1}{2}t+2f_3p'+\tfrac{3}{2}f_4p.$$

Enfin vu que la seconde donne:

$$q = -3.4.f_1t'-6f_2t-4f_3(\tfrac{1}{2}u-xt)+Lp,$$

on obtient la valeur de q exprimée par une fonction de p et de ses dérivées. On a en effet:

$$(5.) \quad \begin{cases} q = 2.3^2.4^2\Big[f_1^2p^{IV}+8f_1f_2p'''+\Big(\dfrac{2.31}{3}f_1f_3+\dfrac{5}{2}f_2^2\Big)p'' \\ \qquad +\Big(19f_1f_4+\dfrac{2.5}{3}f_2f_3\Big)p'+\Big(\dfrac{3^3}{8}f_1f_5-\dfrac{11}{2.3^2.4}f_3^2+\dfrac{17}{4^2}f_1f_4\Big)p\Big]. \end{cases}$$

Observons qu' étant:

$$(p_1p_5) = 0 \quad \text{et en conséquence} \quad (p_1p_5') = 0,$$

les relations (3.), (4.), (5.) donnent:

$$(6.) \qquad (p_1p_5'') = 0, \quad (p_1p_5''') = 0, \quad (p_1p_5^{IV}) = \frac{C}{2.3^2.4^2.f_1^2},$$

et en conséquence:

$$(p_1'p_5') = 0, \quad (p_1'p_5'') = 0, \quad (p_1'p_5''') = -\frac{C}{2.3^2.4^2.f_1^2}$$

et encore:

$$(p_1''p_5'') = \frac{C}{2.3^2.4^2.f_1^2}.$$

Ces relations sont caractéristiques, comme l'a démontré M. *Darboux*, pour l'équation différentielle du 5ième ordre équivalente à son adjointe. Mais on arrive facilement à calculer cette équation en observant que la dernière des équations (2.) peut s'écrire:

$$3.4.f_1q'-6f_2q = L(x^2t-xu+v)-2(Lx-M)(xt-\tfrac{1}{2}u)+(Lx^2-2Mx+N)t$$

et en conséquence q' peut s'exprimer en fonction de p et de ses dérivées jusqu'à la quatrième.

L'on obtient ainsi l'équation différentielle du 5ième ordre dont les intégrales sont $p_1, p_2, \ldots, p_5$. En posant $y = f_1p$ cette équation prend la forme:

$$(7.) \qquad y^V+10my'''+15m'y''+(5J+9m''+16m^2)y'+(\tfrac{5}{2}J'+2m'''+16mm')y = 0$$

dans laquelle J est l'invariant du quatrième degré de l'équation différentielle;

et m, J ont les valeurs suivantes:

$$m = \frac{5}{8}\frac{1}{f_1^2}(3f_2^2-4f_1f_3),$$

$$5J = 4m^2+\frac{7}{8f_1^2}(-6f_1f_5+15f_2f_4-10f_3^2)$$

exprimables par le covariant k et l'invariant A de la forme $f(x)$:

$$m=\frac{5}{8}\frac{k}{f_1^2}, \quad 5J=4m^2+\frac{7A}{8f_1^2}.$$

L'équation (7.) est, dans une forme différente, celle que vous avez donnée dans les communications à l'Académie de Berlin. L'équation même a la forme générale des équations différentielles du 5ième ordre pour lesquelles sont nuls les deux invariants du troisième et du cinquième degré et J représente l'invariant du quatrième degré. Mais dans le cas actuel on doit observer que:

$$5J = \frac{7}{3.4}m''+\frac{1}{3^2}m^2+\frac{5.7}{3.4}\frac{f_2}{f_1}m'+\frac{5.7}{3^2}\frac{f_3}{f_1}m.$$

Enfin si l'on veut réduire l'équation (7.) à la forme normale de M. *Darboux:*

$$y^V+(A_1y')''+(A_1y'')'+(A_2y)'+A_2y' = 0$$

on n'a qu'à poser:

$$A_1=5m, \quad A_2=\tfrac{5}{2}J+2m''+8m,$$

et son intégrale du seconde degré est:

$$yy^{IV}-y'y'''+\tfrac{1}{2}y''^2+2A_1(yy''-\tfrac{1}{2}y'^2)+A_1'yy'+A_2y^2 = \text{const.}$$

1. Juin 1896.

Ueber Fundamentalsysteme und bilineare Formen.

(Von Herrn *Georg Landsberg* in Heidelberg.)

Wenn zwei Schaaren bilinearer Formen die gleichen Elementartheiler besitzen, so lassen sie sich *auf rationalem Wege* in einander durch lineare Substitutionen überführen. Dieser Satz wurde zuerst von Herrn *Frobenius* in seiner Abhandlung: Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten (dieses Journal Bd. 86, S. 146—209) bewiesen. Eine andere Methode, welche in den Vorlesungen über Determinantentheorie ihre Stelle finden wird, gab *Kronecker;* dieselbe beruhte auf einer Verallgemeinerung des bekannten *Weierstrass*schen Verfahrens der Partialbruchzerlegung. Die Methode des Herrn *Frobenius* ist von dieser wesentlich verschieden und besteht in zwei auf einander folgenden Schritten: es werden zuerst die beiden Schaaren bilinearer Formen auf rationalem Wege durch eine Substitution in einander übergeführt, deren Coefficienten nicht, wie erforderlich, Constante, sondern ganze Functionen des Parameters der Schaar sind, und es wird sodann die Substitution in der Weise reducirt, dass sie von dem Parameter der Schaar unabhängig wird. An diese Methode schliesst die nachfolgende Arbeit an, aber indem sie die vorliegende Aufgabe mit der Frage der „Fundamentalsysteme für ganze Functionen“ in Verbindung bringt, führt sie zu einer Vereinfachung der nothwendigen Operationen; sie zeigt nämlich, dass der erste der beiden Schritte, angemessen interpretirt, bereits den zweiten in sich enthält und dass es also ganz ausschliesslich die in der Reduction auf das Diagonalsystem enthaltenen Operationen sind, durch welche das Problem gelöst wird. Auch die Aufgabe, *alle* überführenden Substitutionen zu finden, über welche zuerst Herr *Frobenius* einige Sätze ohne Beweis publicirt hat (dieses Journal Bd. 84, S. 28 f.), und welche sodann von den Herren *Maurer* (Inauguraldissertation, Strassburg 1887) und *Voss* (Sitzungsberichte der math. phys. Klasse der Kgl. bayrischen Akademie 1889,

S. 283—300) behandelt worden ist, findet auf dem angegebenen Wege eine vollständige und rationale Lösung. —

Im Folgenden mache ich durchweg von der Symbolik des Herrn *Frobenius* Gebrauch und bezeichne also mit AB dasjenige quadratische System, welches aus den Systemen A und B entsteht, indem die Horizontalreihen des ersten mit den Verticalreihen des zweiten componirt werden. Das Symbol δ_{ik} steht, wie üblich, für Null oder Eins, je nachdem die Indices i und k verschieden oder gleich sind.

I.

Fundamentalsysteme.

Wenn in einem Systeme von n ganzen Functionen niedrigeren als $n$ten Grades:

$$u_i = h_{i1} + h_{i2} z + h_{i3} z^2 + \cdots + h_{in} z^{n-1} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{1.}$$

die Determinante

$$H = |h_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

von Null verschieden ist, so kann jede ganze Function u, deren Grad kleiner als n ist, auf eine und nur auf eine Weise in die Form gesetzt werden:

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n,$$

worin die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *von z unabhängig* sind. Daher kann unter dieser Voraussetzung das System (1.) ein *„Fundamentalsystem für ganze Functionen $(n-1)$-ten Grades“* genannt werden. Hat man überdies eine ganze Function des Grades n, deren höchster Coefficient gleich Eins angenommen sein mag:

$$F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + c_3 z^{n-3} + \cdots + c_n, \tag{2.}$$

so hat jede ganze Function beliebigen Grades mod. $F(z)$ einen Rest von niedrigerem als dem $n$ten Grade. Daher bilden die n Functionen (1.) auch ein *„Fundamentalsystem für den Modul $F(z)$“*; d. h. jede ganze Function u lässt sich mod. $F(z)$ auf eine und nur auf eine Weise in die Form setzen:

$$u \equiv x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n \pmod{F(z)},$$

worin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von z unabhängige Grössen sind. Umgekehrt kann man aus jedem Fundamentalsystem für den Modul $F(z)$, indem man jede Function durch ihren Rest mod. $F(z)$ ersetzt, ein Fundamentalsystem für ganze Functionen $(n-1)$-ten Grades ableiten. Beide Begriffe, der des Fundamentalsystems für ganze Functionen $(n-1)$-ten Grades und der des Fundamentalsystems für den Modul $F(z)$ sind also nicht wesentlich von einander unterschieden.

Unter den unendlich vielen Fundamentalsystemen, welche für einen gegebenen Modul $F(z)$ existiren, sind drei von Alters her ausgezeichnet. Das erste derselben:

$$(1^{a}.) \qquad u_1 = 1, \quad u_2 = z, \quad u_3 = z^2, \quad \ldots, \quad u_n = z^{n-1}$$

hat das Einheitssystem (δ_{ik}) zum Coefficientensystem, das zweite und dritte setzt eine Zerlegung der ganzen Function $F(z)$ in Linearfactoren voraus und wird durch die *Lagrange*sche, bezw. die *Newton*sche Interpolationsformel geliefert. Ist nämlich

$$F(z) = (z-\zeta_1)^{a_1}(z-\zeta_2)^{a_2}\ldots(z-\zeta_\nu)^{a_\nu},$$

worin die Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\nu$ als von einander verschieden vorausgesetzt werden, so bilden die n Functionen:

$$(1^{b}.) \qquad \begin{cases} \dfrac{F(z)}{z-\zeta_1}, & \dfrac{F(z)}{(z-\zeta_1)^2}, & \ldots, & \dfrac{F(z)}{(z-\zeta_1)^{a_1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{F(z)}{z-\zeta_\nu}, & \dfrac{F(z)}{(z-\zeta_\nu)^2}, & \ldots, & \dfrac{F(z)}{(z-\zeta_\nu)^{a_\nu}} \end{cases}$$

ein Fundamentalsystem. Andererseits bilden, wenn:

$$F(z) = (z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\ldots(z-\zeta_n)$$

gesetzt wird, gleichviel ob die Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ sämmtlich verschieden sind oder nicht, die n Functionen:

$$(1^{c}.) \quad u_1 = 1, \; u_2 = z-\zeta_1, \; u_3 = (z-\zeta_1)(z-\zeta_2), \; \ldots, \; u_n = (z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\ldots(z-\zeta_{n-1})$$

ein Fundamentalsystem. Die letzten beiden Systeme lassen sich leicht für den Fall verallgemeinern, dass an die Stelle der Zerlegung in Linearfactoren beliebige Zerlegungen der Function $F(z)$ treten. Ist nämlich:

$$F(z) = P_1(z)P_2(z)\ldots P_\nu(z),$$

worin die Functionen $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_\nu(z)$ zunächst jede zu jeder relativ prim sein mögen, und hat man für die Function $P_g(z)$ $(g = 1, 2, \ldots, \nu)$ des Grades α_g das Fundamentalsystem:

$$v_1^{(g)}, \quad v_2^{(g)}, \quad \ldots, \quad v_{\alpha_g}^{(g)},$$

so ergiebt sich für den Modul $F(z)$ das Fundamentalsystem:

$$(1^{d}.) \qquad \begin{cases} v_1^{(1)}\dfrac{F(z)}{P_1(z)}, & v_2^{(1)}\dfrac{F(z)}{P_1(z)}, & \ldots, & v_{a_1}^{(1)}\dfrac{F(z)}{P_1(z)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_1^{(\nu)}\dfrac{F(z)}{P_\nu(z)}, & v_2^{(\nu)}\dfrac{F(z)}{P_\nu(z)}, & \ldots, & v_{a_\nu}^{(\nu)}\dfrac{F(z)}{P_\nu(z)}. \end{cases}$$

Macht man aber keinerlei Voraussetzung über die in der letzten Gleichung auftretenden Functionen $P_g(z)$, so bilden die Functionen

$$(1^e.)\quad \left\{\begin{array}{cccc} v_1^{(1)}, & v_2^{(1)}, & \ldots, & v_{a_1}^{(1)}, \\ P_1(z)v_1^{(2)}, & P_1(z)v_2^{(2)}, & \ldots & P_1(z)v_{a_2}^{(2)}, \\ P_1(z)P_2(z)v_1^{(3)}, & P_1(z)P_2(z)v_2^{(3)}, & \ldots, & P_1(z)P_2(z)v_{a_3}^{(3)} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ P_1(z)P_2(z)\ldots P_{\nu-1}(z)v_1^{(\nu)}, & P_1(z)\ldots P_{\nu-1}(z)v_2^{(\nu)}, & \ldots, & P_1(z)P_2(z)\ldots P_{\nu-1}(z)v_{a_\nu}^{(\nu)} \end{array}\right.$$

immer ein Fundamentalsystem.

Aus diesen Sätzen ergiebt sich sogleich eine wichtige Folgerung. Es seien $P(z)$ und $Q(z)$ ganze Functionen resp. des Grades n und m und:

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n \quad \text{bezw.} \quad v_1,\quad v_2,\quad \ldots,\quad v_m$$

zwei Fundamentalsysteme für diese Moduln. Dann bilden nach dem Vorhergehenden für den Modul $P(z)Q(z)$ die Functionen

$$(3.)\quad u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad P(z)v_1,\quad P(z)v_2,\quad \ldots,\quad P(z)v_m$$

stets ein Fundamentalsystem, die Functionen

$$(4.)\quad Q(z)u_1,\ Q(z)u_2,\ \ldots,\ Q(z)u_n,\quad P(z)v_1,\ P(z)v_2,\ \ldots,\ P(z)v_m$$

jedoch dann und nur dann, wenn $P(z)$ und $Q(z)$ keinen gemeinsamen Theiler haben. Stellt man daher die Functionen der Reihe (4.) linear und homogen durch die Functionen der Reihe (3.) dar, so ist die Determinante dieses Gleichungssystemes entscheidend für die Existenz eines gemeinsamen Theilers der Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ und darf daher als Resultante der beiden Functionen *definirt* werden. Da nun die letzten n Elemente der Reihen (3.) und (4.) identisch sind, so ist die soeben definirte Resultante nichts anderes als die Determinante $|p_{ik}|$ des Gleichungssystems:

$$(5.)\qquad Q(z)u_i \equiv \sum_{k=1}^{n} p_{ik}u_k \ (\text{mod.}P(z)) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

und also ganz unabhängig von der Wahl des Fundamentalsystems $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Die Determinante $|p_{ik}|$ ist aber auch unabhängig von der Wahl des Fundamentalsystems $u_1, u_2, \ldots, u_n$; denn führt man an seiner Stelle ein anderes durch die Gleichungen:

$$u_i = \sum_k r_{ik}u_k' \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n)$$

ein, so tritt an die Stelle des Coefficientensystems $P=(p_{ik})$ das System:

$$R^{-1}PR,$$

dessen Determinante ebenfalls gleich $|p_{ik}|$ ist. Die gewöhnlichen Definitionen

der Resultante erhält man aus der hier gegebenen allgemeineren durch Auswahl specieller Fundamentalsysteme. Legt man nämlich das System (1ª.) zu Grunde und setzt also:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = z, \quad \ldots, \quad u_n = z^{n-1}; \quad v_1 = 1, \quad v_2 = z, \quad \ldots, \quad v_m = z^{m-1},$$

so hat man die Functionen der Reihe:

$$Q(z), \quad Q(z)z, \quad \ldots, \quad Q(z)z^{n-1}, \quad P(z), \quad P(z)z, \quad \ldots, \quad P(z)z^{m-1}$$

linear und homogen durch die Functionen der Reihe

$$1, \quad z, \quad \ldots, \quad z^{n-1}, \quad P(z), \quad P(z)z, \quad \ldots, \quad P(z)z^{m-1}$$

oder auch durch die Functionen der Reihe

$$1, \quad z, \quad \ldots, \quad z^{n-1}, \quad z^n, \quad z^{n+1}, \quad \ldots, \quad z^{n+m-1}$$

auszudrücken, welche mit den vorigen durch eine Substitution der Determinante 1 zusammenhängen, wenn der Coefficient der höchsten Potenz in $P(z)$ gleich der Einheit angenommen wird. Thut man dies, so gelangt man zu der bekannten *Euler*schen Darstellung der Resultante als einer Determinante der Ordnung $n+m$. Nimmt man aber in dem Congruenzensystem (5.) für $u_1, u_2, \ldots, u_n$ das Fundamentalsystem (1ᶜ.), so erhält man unmittelbar:

$$|p_{ik}| = Q(\zeta_1)Q(\zeta_2)\ldots Q(\zeta_n),$$

also die Darstellung der Resultante als symmetrische Function der Wurzeln von $P(z)$. Zusammenfassend haben wir den Satz:

Bilden die n Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ein Fundamentalsystem für den Modul $P(z)$ und stellt man die Producte dieser Functionen mit der ganzen Function $Q(z)$ linear und homogen durch das Fundamentalsystem dar

$$Q(z).u_i \equiv \sum_k p_{ik}u_k \ (mod.P(z)), \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

so ist die Determinante $|p_{ik}|$ gleich der Resultante der beiden Functionen $Q(z)$ und $P(z)$.

Dieser Satz kann ohne Schwierigkeit dahin verallgemeinert werden, dass die beiden Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ einen grössten gemeinsamen Theiler des Grades $n-\nu$ haben, wenn das Coefficientensystem (p_{ik}) den Rang ν hat; doch soll hierauf an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

II.

Zusammenhang mit den bilinearen Formen.

Gehen wir jetzt von einem beliebigen Fundamentalsystem $u_1, u_2, \ldots, u_n$ für den Modul $F(z)$ aus, so können die Producte dieser Functionen mit der

Variablen z mod.$F(z)$ in eindeutig bestimmter Weise als lineare homogene Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_n$ mit constanten Coefficienten dargestellt werden:

$$(6.) \qquad z u_i \equiv \sum_k \alpha_{ik} u_k \ (\text{mod.} F(z)). \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

Die Elemente des Systemes (α_{ik}) verbinden wir durch Unbestimmte zu der bilinearen Form:

$$A = \sum_{ik} \alpha_{ik} x_i y_k, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

so entspricht jedem Fundamentalsystem für den Modul $F(z)$ eine und nur eine bilineare Form A. Dieser bilinearen Form kommen, wenn wir das System

$$(z\delta_{ik} - \alpha_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

das *charakteristische System* und seine Determinante die *charakteristische Function der Form A* nennen, die folgenden beiden Eigenschaften zu:

1. *Die charakteristische Function ist gleich* $F(z)$.
2. *Die ersten Unterdeterminanten des charakteristischen Systems haben keinen gemeinsamen Theiler.*

Denn setzt man die Congruenzen (6.) in das Gleichungssystem um:

$$(6^a.) \qquad \sum_k (z\delta_{ik} - \alpha_{ik}) u_k = F(z).w_i, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

in welchem $w_1, w_2, \ldots, w_n$ *ganze* Functionen von z bedeuten, so erhält man, wenn man die Adjuncte des Elementes $(z\delta_{ik} - \alpha_{ik})$ mit $F_{ki}(z)$ bezeichnet:

$$|z\delta_{ik} - \alpha_{ik}|.u_g = F(z).\sum_h F_{gh}(z).w_h. \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

Da aber $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ein Fundamentalsystem mod.$F(z)$ bilden und folglich keinen, auch in $F(z)$ enthaltenen, Theiler besitzen, so ist die Determinante $|z\delta_{ik} - \alpha_{ik}|$ durch $F(z)$ theilbar, und da beide Functionen gleichen Grad und gleichen höchsten Coefficienten haben, so sind sie identisch. Daher ist

$$(7.) \qquad u_g = \sum_h F_{gh}(z).w_h, \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

und folglich haben die Functionen $F_{gh}(z)$ keinen gemeinsamen Theiler; denn ein solcher wäre sowohl in $F(z)$ als auch in $u_1, u_2, \ldots, u_n$ enthalten, was unmöglich ist.

Bilineare Formen, welche die Eigenschaft haben, dass die ersten Unterdeterminanten des charakteristischen Systems ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, mögen im Folgenden als *Elementarformen* bezeichnet werden, weil jede beliebige Form additiv aus Elementarformen zusammengesetzt werden kann, welche kein Variablenpaar gemein haben. Hiernach ist jedem

Fundamentalsystem $u_1, u_2, \ldots, u_n$ für den Modul $F(z)$ eine Elementarform mit der charakteristischen Function $F(z)$ zugeordnet, und wenn wir zu einem anderen Fundamentalsystem $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ durch die Substitution

$$u_i = \sum_{k=1}^{n} r_{ik} u_k' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

übergehen, so entspricht diesem die bilineare Form:

$$A_1 = R^{-1} A R;$$

der Gesammtheit der Fundamentalsysteme für den Modul $F(z)$ entspricht also die Gesammtheit der bilinearen Formen, welche aus der Elementarform A durch contragrediente Substitutionen hervorgehen. Die so erzeugte Correspondenz ist aber um so wichtiger, weil auch umgekehrt jeder Elementarform mit der charakteristischen Function $F(z)$ eine ***Mannigfaltigkeit von Fundamentalsystemen*** für diesen Modul entspricht, welche auf rationalem Wege ermittelt werden können. Zu diesem Zwecke hat man offenbar alle diejenigen Lösungen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des Congruenzensystemes (6.) aufzusuchen, welche zugleich ein Fundamentalsystem für den Modul $F(z)$ bilden.

Diese Aufgabe können wir in der Weise behandeln, dass wir zunächst die bilineare Form

$$\sum_{i,k} F_{ik}(z) x_i y_k, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

welche die Adjungirte der Form:

$$zE - A = \sum_{ik} (z\delta_{ik} - \alpha_{ik}) x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, mod. $F(z)$ als Product zweier Linearformen darstellen was unter den angegebenen Voraussetzungen stets möglich ist. Denken wir uns nämlich die ganze Function $F(z)$ in Primfunctionen*) des zu Grunde gelegten Rationalitätsbereiches zerlegt:

$$F(z) = P_1^{a_1}(z) P_2^{a_2}(z) \ldots P_\nu^{a_\nu}(z),$$

so giebt es zu jeder Primfunction $P_\varrho(z)$ mindestens eine Unterdeterminante $F_{gh}(z)$, welche zu ihr relativ prim ist. Nun aber ist:

$$F_{gh}(z) . \sum_{ik} F_{ik}(z) x_i y_k \equiv \sum_{i} F_{ih}(z) x_i . \sum_{k} F_{gk}(z) . y_k \pmod{P_\varrho^{a_\varrho}(z)}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und wenn wir diese Congruenz mit einer ganzen Function $V_{gh}(z)$ multi-

*) Man erkennt übrigens leicht, dass zur wirklichen Ausführung der Rechnung nur erforderlich ist, die Function $F(z)$ in solche Factoren zu zerlegen, welche zu mindestens einer Unterdeterminante $F_{gh}(z)$ relativ prim sind, wozu die Anwendung des Theilerverfahrens schon völlig ausreicht.

pliciren, welche die Bedingung:

$$F_{gh}(z)\,V_{gh}(z) \equiv 1 \pmod{P_\varrho^{a_\varrho}(z)}$$

erfüllt, so erhalten wir eine Relation der Form:

$$(8.) \qquad \sum_{ik} F_{ik}(z)x_i y_k \equiv \sum_i A_i^{(\varrho)} x_i \cdot \sum_k B_k^{(\varrho)} y_k \pmod{P_\varrho^{a_\varrho}(z)}, \qquad (i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

worin $A_i^{(\varrho)}$ und $B_k^{(\varrho)}$ ganze Functionen von z sind. Bilden wir die Congruenz (8.) für alle Werthe des Index ϱ von 1 bis ν und bestimmen alsdann die ganze Function A_i durch die Bedingungen:

$$A_i \equiv A_i^{(1)} \pmod{P_1^{a_1}(z)},\ A_i \equiv A_i^{(2)} \pmod{P_2^{a_2}(z)},\ \ldots,\ A_i \equiv A_i^{(\varrho)} \pmod{P_\varrho^{a_\varrho}(z)},$$

die Function B_k durch die Bedingungen

$$B_k \equiv B_k^{(1)} \pmod{P_1^{a_1}(z)},\ B_k \equiv B_k^{(2)} \pmod{P_2^{a_2}(z)},\ \ldots,\ B_k \equiv B_k^{(\varrho)} \pmod{P_\varrho^{a_\varrho}(z)},$$

so erhält man die gesuchte Zerlegung:

$$(9.) \qquad \sum_{ik} F_{ik}(z)x_i y_k \equiv \sum_i A_i x_i \cdot \sum_k B_k y_k \pmod{F(z)}.$$

In der so erhaltenen Congruenz (9.) müssen nun nothwendiger Weise sowohl die n Functionen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ als auch die n Functionen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ein Fundamentalsystem für den Modul $F(z)$ bilden. Wäre das nämlich z. B. für die Functionen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ nicht der Fall, so könnte man den Unbestimmten y_k solche von z unabhängige Werthe β_k beilegen, welche nicht alle verschwinden und für welche

$$\sum_{k=1}^{n} B_k \beta_k \equiv 0 \pmod{F(z)}$$

ist. Dann wäre aber, weil die x_i unbestimmt geblieben sind, zufolge der Congruenz (9.) auch

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ik}(z)\beta_k \equiv 0 \pmod{F(z)}$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$, und diese Congruenzen können, da die $F_{ik}(z)$ Functionen des Grades $n-1$, die β_k aber Constanten sind und $F(z)$ den Grad n besitzt, nur in der Weise erfüllt sein, dass:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ik}(z)\beta_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Das ist aber unmöglich, weil die Determinante

$$|F_{ik}(z)| = F(z)^{n-1} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

von Null verschieden ist. Ganz analog gestaltet sich der Beweis dafür, dass $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein Fundamentalsystem bilden.

Nach diesen Vorbemerkungen ergiebt sich die vollständige Lösung der gestellten Aufgabe ohne weiteres. Die Congruenzen (6.), welche zu befriedigen sind, sind nämlich völlig äquivalent dem Gleichungensystem (6ª.), und dessen Lösung wird durch die Gleichungen (7.) gegeben, in welchen die Grössen w_h beliebige ganze Functionen von z bedeuten. Macht man aber jetzt von der Congruenz (9.) Gebrauch, so erhalten die Gleichungen (7.) die Form

$$(10.) \qquad u_g \equiv A_g \sum_h B_h w_h \pmod{F(z)}. \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n)$$

Der Factor $\sum_h B_h w_h$, mit welchem hier die A_g multiplicirt erscheinen, nimmt, da $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ein Fundamentalsystem bilden, bereits dann alle möglichen nach dem Modul $F(z)$ incongruenten Werthe an, wenn $w_1, w_2, \ldots, w_n$ von z unabhängig gewählt werden, und ist daher eine völlig willkürliche ganze Function v. Mit Einführung derselben erhält man also die allgemeinste Lösung der Congruenzen (6.) in der Form

$$(10ª.) \quad u_1 \equiv vA_1, \quad u_2 \equiv vA_2, \quad \ldots, \quad u_n \equiv vA_n \pmod{F(z)},$$

und unter diesen sind nach dem Früheren alle diejenigen Lösungen zugleich Fundamentalsysteme für den Modul $F(z)$, für welche die Function v zu $F(z)$ relativ prim ist. Jedem derartigen Fundamentalsysteme ist umgekehrt die gegebene bilineare Form A in der am Anfange des Abschnittes angegebenen Weise zugeordnet.

Haben wir jetzt zwei Elementarformen $A = \Sigma \alpha_{ik} x_i y_k$ und $B = \Sigma \beta_{ik} x_i y_k$ mit der gleichen charakteristischen Function $F(z)$, so ist es leicht, dieselben auf rationalem Wege durch contragrediente Substitutionen in einander überzuführen und auch *alle* Substitutionen zu finden, welche dies zu leisten im Stande sind. Sind nämlich $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ zwei auf dem angegebenen Wege gefundene Fundamentalsysteme für den Modul $F(z)$ derart, dass dem ersten die Form A, dem zweiten die Form B zugeordnet ist, so ist:

$$(11.) \qquad zu_i \equiv \sum_k \alpha_{ik} u_k \quad \text{und} \quad zv_i \equiv \sum_k \beta_{ik} v_k \pmod{F(z)}. \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

Als Fundamentalsysteme stehen aber die u_i und v_i in dem Zusammenhange:

$$(12.) \qquad u_i = \sum_k p_{ik} v_k, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

worin die von z unabhängigen Coefficienten p_{ik} wiederum rational ermittelt werden können und eine von Null verschiedene Determinante besitzen. Dann führt dieselbe Substitution auch die beiden Bilinearformen in einander

über, denn aus (11.) und (12.) folgt zunächst:

$$z\sum_k p_{ik}v_k \equiv \sum_{kl} \alpha_{ik}p_{kl}v_l \pmod{F(z)} \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

und sodann mit Hülfe des zweiten Congruenzensystemes (11.):

$$\sum_{kl} p_{ik}\beta_{kl}v_l \equiv \sum_{kl} \alpha_{ik}p_{kl}v_l \pmod{F(z)}. \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

Diese Relationen können aber, weil $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ein Fundamentalsystem bilden, nur dann bestehen, wenn für jedes i und l:

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ik}\beta_{kl} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}p_{kl}$$

ist. Also ist in der That:

$$PB = AP \quad \text{oder} \quad B = P^{-1}AP \tag{13.}$$

d. h. die Formen A und B sind durch contragrediente Substitutionen in einander transformirbar.

Um jetzt *alle* Systeme X zu finden, für welche die Gleichung:

$$AX = XB \tag{14.}$$

besteht, haben wir nur den umgekehrten Weg einzuschlagen. Ist $X = (x_{ik})$ und ist $v_1, v_2, \ldots, v_n$ wie vorher ein Fundamentalsystem für den Modul $F(z)$, welchem die Form B zugeordnet ist, so folgt zunächst, dass

$$\sum_{kl} x_{ik}\beta_{kl}v_l \equiv \sum_{kl} \alpha_{ik}x_{kl}v_l \pmod{F(z)}, \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

also, weil $\sum_l \beta_{kl}v_l \equiv z v_k$ ist, dass

$$z\sum_k x_{ik}v_k \equiv \sum_k \alpha_{ik}\sum_l x_{kl}v_l \pmod{F(z)} \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Setzt man also

$$\xi_i \equiv \sum_{k=1}^{n} x_{ik}v_k \pmod{F(z)}, \tag{15.}$$

so ist $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ eine Lösung des Congruenzensystems

$$\sum_{k=1}^{n} (z\delta_{ik} - \alpha_{ik})\xi_k \equiv 0 \pmod{F(z)}, \tag{16.}$$

und jede Lösung dieses Systems liefert, linear und homogen durch das Fundamentalsystem $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dargestellt, ein System X. Die allgemeinste Lösung des Systemes (16.) erhält man aber, wie vorher bewiesen, aus dem Fundamentalsystem $u_1, u_2, \ldots, u_n$, welches zu der Form A gehört, durch Multiplication mit einer beliebigen ganzen Function $\varphi(z)$, so dass

$$\xi_1 \equiv \varphi(z).u_1, \quad \xi_2 \equiv \varphi(z).u_2, \quad \ldots, \quad \xi_n \equiv \varphi(z).u_n$$

ist. Stellt man diese Functionen linear und homogen durch die v_k dar, so

erhält man offenbar nach (12.) für das Coefficientensystem x_{ik} dasjenige System, welches durch Zusammensetzung von P mit einem zweiten System entsteht, durch welches die Functionen $\varphi(z)v_k$ als lineare und homogene Verbindungen der v_k dargestellt werden. Ist also:

$$\varphi(z)v_i \equiv \sum_k \varphi_{ik} v_k \pmod{F(z)} \qquad (17.)$$

$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$

und $\Phi = (\varphi_{ik})$, so ist $X = P\Phi$ die allgemeinste Lösung der Gleichung (14). Unter diesen Lösungen haben nach dem Schlusssatze des ersten Paragraphen diejenigen Systeme X eine von Null verschiedene Determinante, für welche die Function $\varphi(z)$ zu $F(z)$ theilerfremd ist.

Dieses letzte Resultat kann aber noch in anderer Form ausgesprochen werden. Denken wir uns die Gleichung (17.), in welcher $F(z)$ und das Fundamentalsystem $v_1, v_2, \ldots, v_n$ fest gewählt sein mögen, für alle möglichen ganzen Functionen $\varphi(z)$ gebildet, so können wir jeder Function $\varphi(z)$ ein und nur ein System Φ zuordnen. Haben wir jetzt zwei Functionen $\varphi(z)$ und $\varphi^{(1)}(z)$, denen die Systeme Φ und $\Phi^{(1)}$ zugeordnet sind, so ist offenbar der Summe $\varphi(z)+\varphi^{(1)}(z)$ das System $\Phi+\Phi^{(1)}$, dem Product $\varphi(z)\varphi^{(1)}(z)$ das System $\Phi\Phi^{(1)}$ zugeordnet. Da aber der Function $\varphi(z) = z$ das System B nach (11.) zugeordnet ist, so folgt jetzt, dass das System Φ in Gleichung gleich $\varphi(B)$ ist. Daher gilt der Satz:

Man erhält alle Lösungen der Gleichung $AX = XB$ aus einer (P), deren Determinante von Null verschieden ist, indem man dieselbe mit einer beliebigen ganzen Function von B zusammensetzt.

Nimmt man $B = A$ an, so darf man $P = E$ setzen und man erhält den Satz, den Herr *Frobenius* ohne Beweis in diesem Journal Bd. 84 S. 28, XIII angegeben hat:

Eine Elementarform A ist nur mit solchen Formen vertauschbar, welche ganze Functionen von A sind.

Der Gesammtheit der ganzen Functionen $\varphi(z)$ entspricht vermöge der Congruenz (17.) die Gesammtheit der bilinearen Formen $\varphi(B)$, welche ganze Functionen von B sind. Ist $\varphi(z)$ durch $F(z)$ theilbar, so ist $\Phi = (\varphi_{ik}) = 0$, und umgekehrt damit $\Phi = 0$ werde, muss, weil $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ein Fundamentalsystem bilden, $\varphi(z)$ durch $F(z)$ theilbar sein. Daher genügt die Elementarform B der Gleichung des Grades n, $F(B) = 0$, und es giebt auch keine Gleichung niedrigeren Grades, welche durch B befriedigt würde (*Frobenius* l. c. S. 12). Jede ganze Function $\varphi(B)$ von B kann

ebenso wie die Function $\varphi(z)$ in (17.) unter den $n$ten Grad erniedrigt werden und die Gesammtheit der Formen $\varphi(B)$ kann daher als ein ***Gattungsbereich*** von Formen bezeichnet werden. Jedem Fundamentalsystem für den Modul $F(z)$ $v_h = \psi_h(z)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ entspricht ein Fundamentalsystem $V_h = \psi_h(B)$ von Formen, durch welches alle Formen des Gattungsbereiches linear und homogen dargestellt werden können. Nach dem letzten Satze gehört eine Form dann und nur dann zu dem durch die Elementarform B gebildeten Gattungsbereiche, wenn sie mit B vertauschbar ist.

Da zwei Elementarformen durch contragrediente Substitutionen in einander übergeführt werden können, falls nur ihre charakteristischen Functionen $F(z)$ identisch sind, und da jedem Fundamentalsystem für den Modul $F(z)$ eine bestimmte Elementarform entspricht, so erhält man je nach der Wahl des Fundamentalsystems verschiedene Normalformen für bilineare Elementarformen mit der charakteristischen Function $F(z)$. Nimmt man die Fundamentalsysteme (1ª.), (1ᵇ.), (1ᶜ.) des ersten Paragraphen, so erhält man unter Anwendung der dort eingeführten Bezeichnungen die Normalformen:

$$(\mathrm{I}^{\mathrm{a}}.) \qquad x_1y_2+x_2y_3+\cdots+x_{n-1}y_n+x_n(c_1y_n-c_2y_{n-1}+c_3y_{n-2}-\cdots\pm c_ny_1),$$

$$(\mathrm{I}^{\mathrm{b}}.) \qquad \sum_{\varrho=1}^{\nu}\{\zeta_\varrho(x_1^{(\varrho)}y_1^{(\varrho)}+\cdots+x_{\alpha_\varrho}^{(\varrho)}y_{\alpha_\varrho}^{(\varrho)})+x_2^{(\varrho)}y_1^{(\varrho)}+x_3^{(\varrho)}y_2^{(\varrho)}+\cdots+x_{\alpha_\varrho}^{(\varrho)}y_{\alpha_{\varrho-1}}^{(\varrho)}\},$$

$$(\mathrm{I}^{\mathrm{c}}.) \qquad \zeta_1x_1y_1+\zeta_2x_2y_2+\cdots+\zeta_nx_ny_n+x_1y_2+x_2y_3+\cdots+x_{n-1}y_n.$$

Die zweite derselben ist (mit unwesentlicher Modification) diejenige, welche Herr ***Weierstrass*** in seiner grundlegenden Abhandlung vom Jahre 1868 eingeführt hat.

Die hier betrachtete Aequivalenz, bei welcher es sich ausschliesslich um *contragrediente* Substitutionen handelt, ist nur scheinbar von geringerer Allgemeinheit als diejenige Aequivalenz, welche zwischen Formen*schaaren* von nicht verschwindender Determinante besteht, sobald die beiden Reihen von Variablen *beliebigen* Substitutionen unterworfen werden. Wenn nämlich die Formen A und A_1 simultan in B und B_1 transformirt werden können, so giebt es zwei Systeme P und Q, so dass

$$PAQ = A_1 \quad \text{und} \quad PBQ = B_1.$$

Werden daher — was zulässig ist — die Determinanten von B und B_1 als von Null verschieden vorausgesetzt, so ist:

$$PAB^{-1}P^{-1} = A_1B_1^{-1},$$

die Formen AB^{-1} und $A_1B_1^{-1}$ sind also äquivalent durch contragrediente Substitutionen. Daher können beide Arten von Aufgaben auf einander zurückgeführt werden, und die Einschränkung auf contragrediente Substitutionen ist keine wesentliche.

Wohl aber macht der bisher ausgeschlossene Fall, dass die Form keine elementare ist, eine Verallgemeinerung der Untersuchung nothwendig.

III.

Erledigung des allgemeinen Falles.

Wenn die bilineare Form $A = \Sigma\alpha_{ik}x_iy_k$ keine elementare ist, so mögen in dem charakteristischen System:

$$\mathfrak{Z} = (z\delta_{ik} - \alpha_{ik})$$

die Determinanten $n$ter, $(n-1)$-ter, ..., $(n-\nu+1)$-ter Ordnung resp. die grössten gemeinschaftlichen Theiler $F(z)$, $F_1(z)$, ..., $F_{\nu-1}(z)$ haben, während der grösste gemeinschaftliche Theiler der Determinanten $(n-\nu)$-ter Ordnung $F_\nu(z) = 1$ ist. Setzt man alsdann:

$$\frac{F(z)}{F_1(z)} = P_1(z), \quad \frac{F_1(z)}{F_2(z)} = P_2(z), \quad \ldots, \quad \frac{F_{\nu-1}(z)}{F_\nu(z)} = P_\nu(z),$$

so sind die ganzen Functionen $P_1(z)$, $P_2(z)$, ..., $P_\nu(z)$ die Elementartheiler der Form $zE-A$, und das Product aller Elementartheiler ist gleich der Determinante $F(z)$.

Betrachten wir nun auch hier das Congruenzensystem

$$(18.) \qquad f_i = \sum_{k=1}^{n}(z\delta_{ik} - \alpha_{ik})u_k \equiv 0 \pmod{M}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

wobei M eine beliebige ganze Function bedeutet, so kann man dasselbe zunächst durch elementare Transformationen in eine Gestalt bringen, welche die allgemeinste Auflösung sogleich anzugeben gestattet. Wenn man nämlich in dem charakteristischen Systeme $\mathfrak{Z}$ zwei Horizontal- oder zwei Verticalreihen mit Zeichenänderung vertauscht oder eine Horizontal-, resp. eine Verticalreihe, mit einer beliebigen ganzen Function multiplicirt, zu einer Parallelreihe hinzuaddirt, so entspricht die Veränderung der Horizontalreihen einer unimodularen Transformation der Linearformen f_i, die Veränderung der Verticalreihen einer unimodularen Transformation der Variablen u_i, und das Congruenzensystem (18.) geht in ein anderes über, welches ihm hinsichtlich seiner Auflösung völlig äquivalent ist. Nun kann man durch

successive Anwendung derartiger elementarer Transformationen stets bewirken*), dass das ursprüngliche System in ein Diagonalsystem übergeht, so dass also:

$$(19.) \qquad (w_{ik})(z\delta_{ik}-\alpha_{ik})(u_{ik}) = (d)$$

ist, wobei die Systeme (u_{ik}) und (w_{ik}) die Determinante 1, das System (d) aber ausserhalb der Diagonale lauter verschwindende Elemente hat, während die Diagonalelemente successive die Elementartheiler $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_\nu(z), P_{\nu+1}(z) = 1, \ldots, P_n(z) = 1$ sind. Das Verfahren, welches zu dieser Reduction führt, lehrt zugleich, dass jeder Elementartheiler $P_\alpha(z)$ durch den nächstfolgenden $P_{\alpha+1}(z)$ theilbar ist.

Das Diagonalsystem (d) ist vermöge der invariantiven Bedeutung seiner Elemente bestimmt, die Systeme (v_{ik}) und (w_{ik}) aber können stets auf mehrfache Weise gewählt werden, und es ist für das folgende von Interesse festzustellen, welches die charakteristischen Eigenschaften dieser Systeme sind. Nun erkennt man leicht, dass das System der u_{ik} folgenden beiden Bedingungen genügt:

1) Es ist für $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$:

$$(20.) \qquad \sum_{k=1}^{n}(z\delta_{ik}-\alpha_{ik})u_{k\alpha} \equiv 0 \pmod{P_\alpha(z)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

2) Die Determinanten νter Ordnung des Systemes:

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1\nu} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{n\nu} \end{pmatrix}$$

haben keinen gemeinsamen Theiler.

Die zweite Eigenschaft folgt unmittelbar daraus, dass $|u_{ik}| = 1$ ist, die erste Eigenschaft aber ergiebt sich aus der Gleichung (19.); bezeichnet man nämlich das reciproke System des Systemes (w_{ik}) mit $(w_{ik}^{(-1)})$, so erhält man in der That:

$$\sum_{k}(z\delta_{ik}-\alpha_{ik})v_{k\alpha} = w_{i\alpha}^{(-1)}P_\alpha(z), \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \ldots, n \\ \alpha = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix}$$

wo $w_{i\alpha}^{(-1)}$ eine *ganze* Function der Variablen z ist. Ausser den erwähnten beiden Bedingungen brauchen aber die $n\nu$ Elemente $u_{k\alpha}$ $\begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ \alpha = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix}$ weitere nicht mehr zu erfüllen. Denn das System $\mathfrak{U}$ kann nach einem bekannten

*) s. hierüber *Kronecker*, dieses Journal Bd. 107, S. 135.

Satze durch Hinzufügung von $n-\nu$ Colonnen stets zu einem unimodularen Systeme von n^2 Elementen ergänzt werden. Die Zusammensetzung der Systeme $(z\delta_{ik}-\alpha_{ik})$ und (u_{ik}) ergiebt alsdann ein System, dessen Determinante gleich

$$F(z) = P_1(z)P_2(z)\dots P_\nu(z)$$

ist und dessen erste, zweite, ..., νte Colonne resp. durch $P_1(z)$, $P_2(z)$, ..., $P_\nu(z)$ theilbar sind. Befreit man also die ersten ν Colonnen von ihren Factoren, so erhält man ein *unimodulares* System $(w_{ik}^{(-1)})$, und es ist also:

$$(z\delta_{ik}-\alpha_{ik})(u_{ik}) = (w_{ik}^{(-1)})(d),$$

wobei (d) dasselbe Diagonalsystem wie vorher bezeichnet; diese Gleichung kann aber offenbar sogleich in (19.) übergeführt werden. Ganz analoge Bedingungen lassen sich für die Elemente der ersten ν Zeilen des Systemes (w_{ik}) aufstellen.

Kehren wir jetzt zu dem Congruenzensysteme (18.) zurück, so erkennen wir aus der Gleichung (19.), dass dasselbe durch die Substitutionen:

$$(21.) \qquad f_i' = \sum_{k=1}^{n} w_{ik} f_k, \quad u_i = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} u_k' \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

übergeht in das äquivalente System:

$$(22.) \quad \left\{ \begin{array}{llll} f_1' = P_1(z)u_1' \equiv 0, & \dots, & f_\nu' = P_\nu(z)u_\nu' \equiv 0, \\ f_{\nu+1}' = u_{\nu+1}' \equiv 0, & \dots, & f_n' = u_n' \equiv 0, \end{array} \right\} \pmod{M},$$

dessen vollständige Lösung, wie auch der Modul M beschaffen sein möge, jederzeit leicht angegeben werden kann. Wir wollen uns hier auf den für unser Ziel ausschliesslich in Betracht kommenden Fall beschränken, dass der Modul M gleich einem der Elementartheiler $P_\alpha(z)$ ist; dann ist offenbar u_1', u_2', ..., u_α' beliebig, $u_{\alpha+1}'$ durch $\frac{P_\alpha(z)}{P_{\alpha+1}(z)}$, ..., u_ν' durch $\frac{P_\alpha(z)}{P_\nu(z)}$ theilbar, $u_{\nu+1}'$, ..., u_n' durch $P_\alpha(z)$ theilbar anzunehmen. Man erhält daher die allgemeinste Lösung des Systemes (18.) für den Modul $M = P_\alpha(z)$ in der Form:

$$(23.) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_i \equiv u_{i1}\lambda_{1\alpha} + u_{i2}\lambda_{2\alpha} + \dots + u_{i\alpha}\lambda_{\alpha\alpha} + u_{i,\alpha+1}\lambda_{\alpha+1,\alpha}\dfrac{P_\alpha(z)}{P_{\alpha+1}(z)} + \dots \\ \qquad\qquad \dots + u_{i\nu}\lambda_{\nu\alpha}\dfrac{P_\alpha(z)}{P_\nu(z)} \pmod{P_\alpha(z)}, \end{array} \right.$$

worin die ganzen Functionen $\lambda_{1\alpha}, \dots, \lambda_{\alpha\alpha}$ mod. $P_\alpha(z)$, die Functionen $\lambda_{\alpha+1,\alpha}, \dots, \lambda_{\nu\alpha}$ resp. mod. $P_{\alpha+1}(z)$, ..., $P_\nu(z)$ in Betracht kommen. Wenn hiernach die Gradzahlen der Functionen $P_1(z)$, ..., $P_\nu(z)$ resp. gleich p_1, ..., p_ν sind,

so kann man für $\lambda_{1\alpha}, \ldots, \lambda_{\alpha\alpha}$ beliebige Functionen des Grades $p_\alpha - 1$, für $\lambda_{\alpha+1,\alpha}, \ldots, \lambda_{\nu\alpha}$ beliebige Functionen mit den Gradzahlen $p_{\alpha+1}-1, \ldots, p_\nu - 1$ nehmen und somit die allgemeinste Lösung des Congruenzensystemes linear und homogen mit constanten Coefficienten aus

$$\alpha p_\alpha + p_{\alpha+1} + \cdots + p_\nu$$

linear unabhängigen Lösungen zusammensetzen. Hat man also die $n\nu$ Functionen $u_{k\alpha}$ $\left(\begin{smallmatrix} k=1,2,\ldots,n \\ \alpha=1,2,\ldots,\nu \end{smallmatrix}\right)$ in der allgemeinsten Weise den Bedingungen (20.) gemäss zu bestimmen, so erhält man alle möglichen Lösungen aus dem einen $\mathfrak{U}$, welches vorhin ermittelt wurde, indem man dasselbe mit dem Systeme:

$$(24.)\quad L = \begin{vmatrix} \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \lambda_{13}, & \ldots, & \lambda_{1\nu} \\ \lambda_{21}\dfrac{P_1(z)}{P_2(z)}, & \lambda_{22}, & \lambda_{23}, & \ldots, & \lambda_{2\nu} \\ \lambda_{31}\dfrac{P_1(z)}{P_2(z)}, & \lambda_{32}\dfrac{P_2(z)}{P_3(z)}, & \lambda_{33}, & \ldots, & \lambda_{3\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{\nu 1}\dfrac{P_1(z)}{P_\nu(z)}, & \lambda_{\nu 2}\dfrac{P_2(z)}{P_\nu(z)}, & \lambda_{\nu 3}\dfrac{P_3(z)}{P_\nu(z)}, & \ldots, & \lambda_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

componirt. Da die Functionen $\lambda_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \nu)$, falls $\beta \geqq \alpha$ mod. $P_\beta(z)$, falls $\beta < \alpha$ mod. $P_\alpha(z)$ in Betracht kommen, so enthält das System L im ganzen:

$$(25.)\quad s = \sum_{\alpha=1}^{\nu}(\alpha p_\alpha + p_{\alpha+1} + \cdots + p_\nu) = p_1 + 3p_2 + 5p_3 + \cdots (2\nu-1)p_\nu$$

linear und homogen auftretende Constanten, und das allgemeinste System $\mathfrak{U}$ kann daher aus s linear independenten zusammengesetzt werden; unter diesen Systemen erfüllen, wie sich sogleich ergeben wird, nach der Reduction auf die absolut kleinsten Reste alle diejenigen die zweite Bedingung, dass die Determinanten νter Ordnung keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, für welche die Determinante des Systemes L zu der Function $F(z)$ theilerfremd ist.

Denken wir uns jetzt die Functionen $u_{k\alpha}$, welche bisher nur hinsichtlich ihres Congruenzwerthes mod. $P_\alpha(z)$ in Betracht kamen, auf ihre kleinsten Reste mod. $P_\alpha(z)$ reducirt, so kann man aus ihnen die n Functionen niedrigeren als $n$ten Grades bilden:

$$(26.)\quad u_k = u_{k1} + u_{k2}P_1(z) + u_{k3}P_1(z)P_2(z) + \cdots + u_{k\nu}P_1(z)P_2(z)\ldots P_{\nu-1}(z). \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Dann kann man beweisen, dass diese n Functionen ein Fundamentalsystem für Functionen $(n-1)$-ten Grades bilden. Gäbe es nämlich eine Relation der Form:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k u_k = 0$$

mit constanten Coefficienten c_k, so würde hieraus zunächst folgen, dass $\sum_k c_k u_{k1} \equiv 0 \pmod{P_1(z)}$ ist, und dies ist nur möglich, wenn $\sum_k c_k u_{k1} = 0$ ist, weil die Function auf der linken Seite der Gleichung von niedrigerem Grade als $P_1(z)$ ist. Durch Fortsetzung des Verfahrens folgen dann successive die Gleichungen:

$$(27.) \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k u_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k u_{k2} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k u_{k\nu} = 0.$$

Wenn nun der grösste gemeinschaftliche Theiler der Determinanten νter Ordnung des Systemes

$$\mathfrak{U} = (u_{i\alpha}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ \alpha = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix}$$

gleich Eins oder auch nur zu $F(z)$ relativ prim ist, so kann man es zu einem quadratischen Systeme (u_{ik}) ergänzen, dessen Determinante zu $F(z)$ theilerfremd ist. Die Composition der Systeme

$$\mathfrak{Z}' = \begin{pmatrix} z\delta_{ik} - \alpha_{ik} \\ c_k \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (u_{ik}), \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

von welchen das erste $n+1$ Zeilen und n Colonnen enthält, würde alsdann zufolge der Gleichungen (27.) ein System von $(n+1)$ Zeilen und n Colonnen ergeben, dessen erste, zweite, ..., νte Colonne resp. durch $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_\nu(z)$ theilbar sind, und folglich würde *jede* Determinante $n$ter Ordnung des Systemes $\mathfrak{Z}'$ durch $F(z)$ theilbar sein. Bezeichnet man also, wie vorher, die Unterdeterminanten des Systemes $\mathfrak{Z}$ mit $F_{ik}(z)$, so wäre für $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k F_{ki}(z) \equiv 0 \pmod{F(z)},$$

also auch, weil die Function links von niedrigerem als dem $n$ten Grade ist:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k F_{ki}(z) = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Das ist aber unmöglich, und folglich bilden die Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in der That ein Fundamentalsystem. Die Anwendung dieses Schlussverfahrens setzt, wie man bemerkt, nur voraus, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler der Determinanten νter Ordnung des Systems $\mathfrak{U}$ zu $F(z)$ relativ prim sei; daher führen in der That, wie vorher behauptet wurde, auch alle

diejenigen Systeme zu einem Fundamentalsysteme, welche durch Zusammensetzung mit einem der Systeme (L) in (24.) entstehen, vorausgesetzt nur, dass auch die Determinante von (L) zu $F(z)$ relativ prim ist.

Hat man nun zwei bilineare Formen:

$$A = \sum_{ik} \alpha_{ik} x_i y_k \quad \text{und} \quad B = \sum_{ik} \beta_{ik} x_i y_k$$

mit den gleichen Elementartheilern $P_1(z), \ldots, P_\nu(z)$ gegeben, so bestimmt man auf dem angegebenen Wege zur ersten Form das Fundamentalsystem:

$$(26.) \quad u_i = u_{i1} + u_{i2} P_1(z) + u_{i3} P_1(z) P_2(z) + \cdots + u_{i\nu} P_1(z) \ldots P_{\nu-1}(z), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zur zweiten das Fundamentalsystem

$$(26^a.) \quad v_i = v_{i1} + v_{i2} P_1(z) + v_{i3} P_1(z) P_2(z) + \cdots + v_{i\nu} P_1(z) \ldots P_{\nu-1}(z), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

derart, dass für $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$ die Congruenzen:

$$(27.) \qquad z u_{i\alpha} \equiv \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} u_{k\alpha} \quad \text{und} \quad z v_{i\alpha} \equiv \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} v_{k\alpha} \pmod{P_\alpha(z)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten. Diese beiden Fundamentalsysteme hängen durch die Gleichungen:

$$(28.) \qquad u_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} v_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zusammen, worin die Coefficienten (p_{ik}) von z unabhängig sind und eine von Null verschiedene Determinante haben. Setzt man in die letzte Gleichung für u_i und v_i ihre Werthe aus (26.) und (26ª.) ein, so erhält man die Relationen:

$$(28^a.) \qquad u_{i\alpha} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} v_{k\alpha}. \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ \alpha = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix}$$

Diese Gleichungen, in Verbindung mit den Congruenzen (27.) ergeben aber die Congruenzen:

$$\sum_{kl} p_{ik} \beta_{kl} v_{l\alpha} \equiv \sum_{kl} \alpha_{ik} p_{kl} v_{l\alpha} \pmod{P_\alpha(z)}, \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

welche nach einer vielfach angewendeten Schlussweise nur in der Weise erfüllt sein können, dass die Gleichungen:

$$\sum_{kl} p_{ik} \beta_{kl} v_{l\alpha} = \sum_{kl} \alpha_{ik} p_{kl} v_{l\alpha} \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

für $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$ gelten. Vereinigt man diese ν Gleichungen, indem man jede mit $P_1(z) \ldots P_{\alpha-1}(z)$ multiplicirt und über $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$ summirt, so erhält man:

$$\sum_{l=1}^{n} v_l \left(\sum_{k=1}^{n} p_{ik} \beta_{kl} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} p_{kl} \right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Gleichungen, welche, weil $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ein Fundamentalsystem bilden, nur in der Weise erfüllt sein können, dass

$$\sum_{k} p_{ik} \beta_{kl} = \sum_{k} \alpha_{ik} p_{kl} \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Also ist in der That:

(29.) $$AP = PB,$$

d. h. die Form A kann auf rationalem Wege durch contragrediente Substitutionen in B übergeführt werden.

Handelt es sich schliesslich darum, *alle* Lösungen der Gleichung:

(29ª.) $$AX = XB$$

zu finden, so erkennt man, genau wie im vorigen Abschnitte, dass man dieselben erhält, indem man das Fundamentalsystem $v_1, v_2, \ldots, v_n$ festhält und das aus irgend einer Lösung der Congruenzen:

(27ª.) $$z u'_{ia} \equiv \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} u'_{ka} \pmod{P_a(z)} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ a = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix}$$

hervorgehende Functionensystem

(26ª.) $$u'_i = u'_{i1} + u'_{i2} P_1(z) + u'_{i3} P_1(z) P_2(z) + \cdots + u'_{i\nu} P_1(z) \ldots P_{\nu-1}(z), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

in welchem die Function u'_{ia} auf ihren Rest mod.$P_a(z)$ reducirt gedacht ist, linear und homogen durch die v_i ausdrückt:

$$u'_i = \sum_k x_{ik} v_k. \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

In dem einfachsten Falle, auf den sich alle anderen zurückführen lassen, dass $B = A$ ist, hat man also das zu der allgemeinsten Lösung der Congruenzen (27ª.) gehörige Functionensystem $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ linear und homogen durch das Fundamentalsystem $u_1, u_2, \ldots, u_n$ auszudrücken. Das Functionensystem $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ lässt sich aber, wie vorher bewiesen, aus $s = p_1 + 3p_2 + \cdots + (2\nu - 1)p_\nu$ particulären Lösungen mit willkürlichen Coefficienten zusammensetzen. Folglich kann auch das allgemeinste System X linear und homogen aus s particulären Lösungen $X_1, X_2, \ldots, X_s$ zusammengesetzt werden, derart dass:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_s X_s$$

und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ beliebige Constanten sind. Also gilt der Satz:

Besitzt das charakteristische System der Form A die Elementartheiler $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_\nu(z)$, deren Gradzahlen resp. $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ sein mögen, so giebt es im ganzen:

$$s = p_1 + 3p_2 + 5p_3 + \cdots + (2\nu - 1)p_\nu$$

linear unabhängige Formen, welche mit A vertauschbar sind.

Heidelberg, 21. August 1895.

Ueber den grössten gemeinsamen Theiler aller Zahlen, welche durch eine ganze Function von *n* Veränderlichen darstellbar sind.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

In den Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg hat *V. Bouniakovsky* eine grosse Untersuchung veröffentlicht*), in welcher der grösste gemeinsame Theiler aller durch eine ganze ganzzahlige Function *einer* Variablen darstellbaren ganzen Zahlen bestimmt wird. Abgesehen davon, dass es dem Verfasser, wie er es selbst ausspricht, nicht gelungen ist, seine Resultate auf die entsprechende Frage für Functionen mehrerer Variablen auszudehnen, sind diese Ergebnisse selbst und die Methoden zur Bestimmung dieses Theilers der völlig elementaren Natur des Gegenstandes nicht angemessen.

Da dieser Frage auch in einigen anderen Gebieten der Mathematik eine gewisse Bedeutung zukommt, so will ich im Folgenden eine ganz elementare Lösung der allgemeinen Aufgabe für n Variable kurz auseinandersetzen. Im zweiten Abschnitte schliesst sich eine kurze Untersuchung derjenigen Functionen von gegebenem Grade an, für welche der Theiler aller dargestellten Zahlen möglichst gross ist, sowie eine Darlegung der Eigenschaften jener Maximaltheiler. Dieser Theil der Untersuchung ist hauptsächlich deshalb hinzugefügt, weil die bei dieser elementaren Frage eingeführten Begriffe auch in weit tiefer liegenden Fragen aus der Theorie der algebraischen Functionen und der *Abel*schen Integrale von grundlegender Bedeutung sind, wie ich in einer kürzlich veröffentlichten Arbeit**) näher dargelegt habe.

*) *V. Bouniakovsky*, Sur les diviseurs numériques invariables des fonctions rationnelles entières. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VI. Série t. VIII p. 305—329.

**) Ueber einen neuen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen; dieses Journal Bd. 115 S. 254.

I.

Ist $F(u)$ eine ganze ganzzahlige Function des $n$ten Grades von u, so ist der grösste gemeinsame Theiler aller durch $F(u)$ darstellbaren Zahlen, d. h. der Zahlen

$$F(k) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

gleich dem grössten gemeinsamen Theiler von irgend welchen $n+1$ Zahlen $F(h)$ unter ihnen, deren Argumente auf einander folgen, also z. B. gleich dem Theiler der $n+1$ Zahlen $F(0)$, $F(1)$, ..., $F(n)$.

Um diesen Satz z. B. für $h = 0, 1, \ldots, n$ zu beweisen setze ich:

$$\begin{aligned} \Pi_h(u) &= \frac{u(u-1)\ldots(u-h+1)(u-h-1)\ldots(u-n)}{h(h-1)\ldots \quad 1 \quad (-1) \quad \ldots(h-n)} \\ &= \pm\binom{u}{h}\cdot\binom{u-h-1}{n-h}; \end{aligned} \qquad (h = 0, 1, \ldots, n)$$

dann ergiebt sich aus der zweiten Darstellung unmittelbar, dass jede dieser $n+1$ Functionen für alle ganzzahligen Werthe von u ebenfalls ganzzahlige Werthe annimmt, obwohl ihre Coefficienten rationale Brüche sind. Andererseits besteht aber nach der *Lagrange*schen Interpolationsformel die Identität

$$F(u) = \sum_{h=0}^{h=n} F(h).\Pi_h(u),$$

und hieraus folgt für jeden ganzzahligen Werth von k:

$$F(k) = \sum_{0}^{n} F(h)\,\Pi_h(k),$$

d. h. der grösste gemeinsame Theiler aller Zahlen $F(k)$ stimmt mit demjenigen der $n+1$ Zahlen $F(0)$, $F(1)$, ..., $F(n)$ überein; offenbar kann der Beweis genau ebenso für irgend welche $n+1$ auf einander folgende Zahlen geführt werden. Endlich bemerke ich noch, dass derselbe Satz auch in dem Falle besteht und wörtlich ebenso bewiesen wird, wenn $F(u)$ nicht ganzzahlige, sondern rational gebrochene oder auch algebraische Coefficienten besitzt. Die hier angegebene Zahl $n+1$ der speciellen Functionswerthe ist aber die kleinste, welche im allgemeinen zur Bestimmung jenes Theilers nothwendig und hinreichend ist, denn die specielle ganze Function

$$F(u) = u(u-1)\ldots(u-n+1)$$

verschwindet z. B. für die n ersten Zahlen 0, 1, ..., $n-1$, während erst $F(n) = n!$ in diesem Falle den gesuchten Theiler ergiebt.

Durch Anwendung der *Lagrange*schen Interpolationsformel für mehrere Veränderliche kann nun genau ebenso der folgende allgemeine Satz bewiesen werden:

Es sei $F(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ eine ganze Function von r Variablen mit ganzen oder rational gebrochenen oder auch algebraischen Zahlcoefficienten, welche allgemein in Bezug auf u_i vom n_i-ten Grade ist. Dann ist der grösste gemeinsame Theiler aller durch $F(u_1, \ldots, u_r)$ darstellbaren Zahlen $F(k_1, \ldots, k_n)$ gleich demjenigen der $(n_1+1)\ldots(n_r+1)$ Zahlen $F(h_1, \ldots, h_r)$, wenn allgemein h_i irgend eine Reihe von n_i+1 auf einander folgenden ganzen Zahlen durchläuft; und dies ist die kleinste Anzahl von Functionswerthen, aus welchen jener grösste gemeinsame Theiler im allgemeinen bestimmt werden kann.

Als Beispiel werde der grösste gemeinsame Theiler aller durch die Function:

$$f(u) = u^9 - u^3 + 2520$$

darstellbaren ganzen Zahlen aufgesucht, eine Aufgabe, die auf S. 323—326 der *Bouniakovsky*schen Abhandlung sehr umständlich behandelt wird. In diesem Falle braucht man nur den Theiler der fünf ganzen Zahlen $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ aufzusuchen, da dieser wegen $f(-u) = -f(u)$ mit demjenigen der neun Zahlen $f(0)$, $f(\pm 1)$, $\ldots$, $f(\pm 4)$ übereinstimmt. Der gesuchte Theiler ist also 504.

Als zweites Beispiel betrachten wir die a. a. O. ebenfalls nicht sehr einfach behandelte Function von zwei Variablen:

$$f(u, v) = uv.(u^4 - v^4).$$

Hier kann man anstatt der 25 Zahlen

$$f(h, k) \qquad (h, k = 0, \pm 1, \pm 2)$$

nur die eine einzige $f(2, 1) = 30$ betrachten, da für diese Function offenbar die Gleichungen:

$$f(u, v) = \pm f(\pm u, \pm v) = -f(v, u), \quad f(u, u) = 0$$

bestehen. Der Theiler ist also gleich 30. Aehnlich kann die Anzahl der zu untersuchenden Zahlen in den meisten Fällen beträchtlich reducirt werden.

II.

Im Folgenden soll unter dem Zahlentheiler einer ganzen ganzzahligen Function von einer oder mehreren Variablen der im vorigen Abschnitt bestimmte grösste gemeinsame Theiler aller durch sie darstellbaren ganzen Zahlen verstanden werden.

Es sei nun

(1.) $\qquad U_0(u), \quad U_1(u), \quad U_2(u), \quad \ldots$

ein System ganzer ganzzahliger Functionen von u vom 0, 1, 2, ... Grade, in welchen der Coefficient der höchsten Potenz von u gleich Eins ist, und deren Zahlentheiler

$$N_0, \quad N_1, \quad N_2, \quad \ldots$$

möglichst gross sind. Ein solches System soll ein *Fundamentalsystem* für die ganzen Functionen von u genannt werden. Man erkennt sofort, dass solche Systeme existiren, und dass eines von ihnen das folgende ist:

$$\overline{U}_i(u) = u(u-1)\ldots(u-i+1), \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

wenn $U_0(u) = 1$ angenommen wird. Hier sind offenbar die Zahlentheiler

$$N_i = i! \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots);$$

da nämlich jede aus den n ersten Functionen $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}$ der Reihe (1.) für $u = 0, 1, \ldots, n-1$ gebildete Determinante $n$ter Ordnung:

$$D_n = |U_i(k)| \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

nach der über diese Functionen gemachten Voraussetzung durch das Product $N_0.N_1\ldots N_{n-1}$ der n ersten Zahlentheiler theilbar ist, und da andererseits jene Determinante D_n auch in der Form geschrieben werden kann:

$$D_n = |i^k| = 1!\,2!\ldots(n-1)!$$

so können die Maximaltheiler N_i jedenfalls nicht grösser sein als $i!$; und da die oben eingeführten speciellen Functionen $\overline{U}_i(u)$ jene Zahlentheiler wirklich enthalten, so ist die Richtigkeit der obigen Behauptung bewiesen.

Jede ganze ganzzahlige Function $F(u)$ von u kann durch die Elemente irgend eines Fundamentalsystemes eindeutig in der Form:

$$F(u) = A_0U_0 + A_1U_1 + \cdots + A_nU_n$$

dargestellt werden, in welcher die Coefficienten $A_0, \ldots, A_n$ bestimmte ganze Zahlen sind. Aus der Natur des Fundamentalsystemes folgt dann ohne weiteres der Satz:

> Eine ganze Function $F(u)$ besitzt dann und nur dann den Zahlentheiler Q, wenn bei ihrer Darstellung durch das Fundamentalsystem $U_0, U_1, \ldots$ jeder der Summanden A_iU_i für sich jenen Theiler enthält, wenn also allgemein A_i durch $\frac{Q}{i!}$ theilbar ist.

Besässe nämlich irgend eine Function $F(u)$ einen grösseren Zahlentheiler, als den grössten gemeinsamen Divisor von $(A_0, \ldots, A_i i!, \ldots)$ so könnte man das System $(U_0, \ldots, U_r, \ldots, U_n, \ldots)$ durch ein anderes $(U_0, \ldots, U_r', \ldots, U_n, \ldots)$ ersetzen, in welchem ein Element U_r' einen grösseren Zahlentheiler besässe als U_r, d. h. das erste System wäre noch kein Fundamentalsystem. Benutzt man zur

Darstellung von $F(u)$ das specielle Fundamentalsystem $\overline{U}_i = u(u-1)\ldots(u-i+1)$ und bestimmt hier die Werthe der Coefficienten A_i, so erhält man die bekannte *Newton*sche Darstellung von $F(u)$ durch die Factoriellen von u.

Die soeben gefundenen Maximaltheiler N_0, N_1, N_2, ... sind die Elementartheiler des ins Unendliche fortgesetzten Systemes:

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1^2 & \ldots \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots \\ 1 & 3 & 3^2 & \ldots \\ . & . & . & . \end{vmatrix};$$

denn formt man dasselbe durch geeignete Verbindung seiner Colonnen in das folgende um:

$$S' = (\overline{U}_0(k),\ \overline{U}_1(k),\ \overline{U}_2(k),\ \ldots), \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

wo wieder $\overline{U}_i(u) = u(u-1)\ldots(u-i+1)$ gesetzt ist, so bleiben die Elementartheiler von S ungeändert. Offenbar ist aber S' ein ins Unendliche fortgesetztes Dreieckssystem, dessen Diagonalglieder beziehlich 1, 1!, 2!, 3!, ... sind, während jedes andere Element desselben durch das in seiner Verticalreihe stehende Diagonalglied theilbar ist; und hieraus folgt sofort die Richtigkeit des oben aufgestellten Satzes. Derselbe bleibt offenbar unverändert gültig, wenn man unter S das *ganze* System

$$S = (1,\ k,\ k^2,\ k^3,\ \ldots) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

für alle positiven und negativen ganzen Zahlen k versteht.

Da jede Determinante $n$ter Ordnung von (S) durch das Product $1!2!\ldots(n-1)!$ seiner n ersten Elementartheiler, hier also durch seine erste Hauptunterdeterminante derselben Ordnung theilbar ist, so ergiebt sich der allgemeine Satz:

Die Discriminante

$$\Pi(u_i - u_k) \qquad \left(\begin{smallmatrix} i,\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ i \geqq k \end{smallmatrix}\right)$$

von n beliebigen ganzen Zahlen ist stets durch die Discriminante

$$\Pi(i-k) \qquad \left(\begin{smallmatrix} i,\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ i \geqq k \end{smallmatrix}\right)$$

der n ersten ganzen Zahlen theilbar.

Die hier nur für eine Veränderliche abgeleiteten Resultate können unmittelbar auf den Fall von r Variablen ausgedehnt werden. Man findet hier sofort das Resultat:

Bilden $U_0(u)$, $U_1(u)$, ... ein Fundamentalsystem für die ganzen Functionen von einer Variablen, so bilden die Producte:

$$U_i(u_1).U_k(u_2) \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

ein Fundamentalsystem für die ganzen Functionen von zwei Veränderlichen etc.

Und hieraus folgt weiter:

Die ganze Function der r Variablen:

$$F(u_1, \ldots, u_r) = U_{n_1}(u_1)\ldots U_{n_r}(u_r)$$

besitzt unter allen Functionen, welche in Bezug auf $u_1, \ldots, u_r$ bezw. von demselben Grade sind, den grössten Zahlentheiler, und dieser ist gleich $(n_1!\ldots n_r!)$.

III.

Will man eine ganze Function $F(u)$ nur auf ihre Theilbarkeit durch eine Primzahl p untersuchen, so ist es bequemer anstatt eines absoluten Fundamentalsystemes ein solches für den Modul p zu Grunde zu legen, nämlich irgend ein System ganzer Functionen des 0, 1, 2, ... Grades, von denen jede diese Primzahl möglichst oft als Theiler enthält. Ein System U_0, U_1, ... solcher ganzen Functionen ist also dann und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn allgemein $U_i(u)$ die Primzahl p ebenso oft enthält als die Zahl $(1.2\ldots i)$.

Das einfachste Fundamentalsystem modulo p wird auf folgende Art gewonnen: Es seien $u_1, u_2, u_3, \ldots$ ganze Functionen des Grades $p, p^2, p^3, \ldots$ welche durch die folgenden Gleichungen definirt sind:

$$\begin{aligned} u_1 &= u^p - u, \\ u_2 &= u_1^p - p^{p-1}u_1, \\ &\vdots \\ u_i &= u_{i-1}^p - p^{p^{i-1}-1}u_{i-1}, \end{aligned}$$

dann erkennt man leicht, dass allgemein u_i stets durch die Primzahlpotenz p^{P_i} theilbar ist, wenn:

$$P_i = 1 + p + \cdots + p^{i-1} = \frac{p^i - 1}{p-1}$$

gesetzt wird. Nimmt man diesen Satz nämlich für u_{i-1} als bewiesen an, ist also für jedes ganzzahlige u:

$$u_{i-1} = p^{P_{i-1}}.w_{i-1},$$

wo w_{i-1} eine ganze Zahl bedeutet, so ergiebt sich aus der Definitionsgleichung von u_i und aus dem *Fermat*schen Satze:

$$u_i = p^{P_i - 1}(w_{i-1}^p - w_{i-1}) = p^{P_i}w_i,$$

wo auch w_i eine ganze Zahl bedeutet. Setzt man also der Gleichförmigkeit wegen $u = u_0$, so ist das Product:

$$U_\lambda = u_0^{\lambda_0} u_1^{\lambda_1} \dots u_h^{\lambda_h} \qquad (\lambda_i = 0, 1, \dots, p-1)$$

eine ganze ganzzahlige Function des Grades

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 p + \dots + \lambda_h p^h,$$

welche die Primzahlpotenz p^l als Zahlentheiler enthält, deren Exponent durch die Gleichung:

$$l = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_h P_h \qquad \left(P_i = \frac{p^i - 1}{p-1}, \; i = 0, 1, \dots, h\right)$$

bestimmt ist. Bezeichnet man die Zahl λ, welche ja im p-adischen Zahlensysteme geschrieben, die Ziffern $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_h$ hat, durch $(\lambda_h, \lambda_{h-1}, \dots, \lambda_0)$ und analog die Zahl l, die in dem allgemeineren Zahlensysteme $(P_0, P_1, \dots, P_h)$ dieselben Ziffern besitzt, durch $[\lambda_h, \lambda_{h-1}, \dots, \lambda_0]$, so ist allgemein:

$$l = [\lambda_h \dots \lambda_0] = \Sigma \lambda_i \frac{p^i - 1}{p-1} = \frac{\lambda - \Sigma \lambda_i}{p-1}.$$

Legt man nun den Ziffern λ_i unabhängig von einander alle Werthe $0, 1, \dots, p-1$ bei, so erhält man eine Reihe von Functionen $U_0, U_1, \dots$ des $0, 1, \dots, \lambda$ten Grades, wo allgemein:

$$U_\lambda = u_0^{\lambda_0} u_1^{\lambda_1} \dots u_h^{\lambda_h}$$

ist, und die Primzahl p in der Potenz $[\lambda_h \dots \lambda_0] = \dfrac{\lambda - \Sigma \lambda_i}{p-1}$ enthält. Beachtet man aber, dass dies bekanntlich die höchste Potenz von p ist, welche in $\lambda!$ enthalten ist, so ergiebt sich in Verbindung mit der oben gemachten Bemerkung, dass das hier angeführte System $(.. U_\lambda ..)$ ein Fundamentalsystem modulo p ist.

Man kann aber auch dieses System $(.. U_\lambda ..)$ direct als ein Fundamentalsystem erweisen, wobei sich dann der soeben benutzte Satz über die Theilbarkeit von $\lambda!$ als Folgerung ergiebt. Zu diesem Zwecke braucht man nur zu zeigen, dass eine Summe

$$A_0 U_0 + A_1 U_1 + \dots + A_\lambda U_\lambda + \dots$$

dann und nur dann den Zahlentheiler p^H enthalten kann, wenn jedes der Producte $A_\lambda p^{[\lambda_h \dots \lambda_0]}$ für sich durch p^H theilbar ist. Der Beweis wird einfach dadurch geführt, dass an die Stelle der Zahlen $u_0, u_1, \dots$ die Zahlen $w_0, w_1, \dots$ in den obigen Ausdruck eingeführt werden, und bietet keine weiteren Schwierigkeiten dar.

Berlin, den 26. December 1894.

GENERAL LIBRARY,
UNIV. OF MICH.
19 FEB 1896

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung des Herrn

Weierstrass

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 116.

Heft I.

Ausgegeben den 22. Januar.

Berlin, 1896.
Druck und Verlag von Georg Reimer.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,
zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Frobenius, Georg, Gedächtnissrede auf Leop. Kronecker. 4°. 1893. M. 1.50.

Gravelius, H., fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Decimaltheilung des Quadranten, mit ausführlichen Tafeln zum Uebergang von der neuen Theilung des Quadranten in die alte und umgekehrt. Nebst vierstelligen Tafeln der Zahlenwerthe der trigonometrischen Funktionen, sowie gewöhnlichen Logarithmentafeln und Quadrattafeln. Mit einem Vorworte von Professor Dr. W. Förster, Direktor der Königl. Sternwarte zu Berlin. 1886. geb. M. 6.—

Gudermann, C., Theorie der Potential- oder cyklisch-hyperbolischen Functionen. 4. 1832. M. 6.—

— Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale. 4. 1844. M. 6.—

Haentzschel, E., Studien über die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Anhang zu Heine's Handbuch der Kugelfunctionen. 8°. 1893. M. 6.—

Jacobi, C. G. J., gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften. 4.

I. Band herausgegeben von C. W. Borchardt. Mit dem Bildniss Jacobi's. 1881. M. 18.—

II.—VII. Band herausgegeben von K. Weierstrass. 1882—1891. M. 99.—

Supplementband. Vorlesungen über Dynamik. Herausgegeben von E. Lottner. 1884. M. 10.—

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. III. Band. 1892—93. Enthaltend die Chronik der Vereinigung für 1892—93, kurze Berichte über die auf der Versammlung in München gehaltenen Vorträge, sowie einen ausführlichen Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit, von Dr. A. Brill und Dr. M. Noether, sowie einen Bericht über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke, von Dr. L. Henneberg. Mit zwei Figurentafeln. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von W. Dyck, E. Lampe, 8. 1894. M. 16.—

Journal für die reine und angewandte Mathematik gegründet von A. L. Crelle 1826. Unter Mitwirkung der Herren Weierstrass und von Helmholtz herausgegeben von L. Fuchs. Band 115. 4 Hefte. 1895. M. 12.—

— — Inhalt und Namenverzeichniss der Bände 1—100 (1826—1887). 1887. M. 12.—

Kötter, E., Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven. Gekrönte Preisschrift. 1887. M. 20.—

Kramer, Aug., allgemeine Theorie der zwei- und dreiteiligen astronomischen Fernrohr-Objective. Mit 2 Tafeln. 1885. M. 10.—

Kronecker, L., Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Festschrift zu Herrn E. E. Kummer's 50jährigem Doctor-Jubiläum am 10. Sept. 1881. Angefügt ist eine neue Ausgabe der am 10. Sept. 1845 erschienenen Inauguraldissertation: de unitatibus complexis. 1882. M. 6.—

Müller, F., Carl Heinrich Schellbach. Gedächtnissrede gehalten in der Aula des Kgl. Friedrich Wilhelms-Gymnasiums am 29. October 1892. Mit einem Bildniss Schellbachs. 1893. M. —.50.

Müller, F., Kalender-Tabellen. 8. 1885. M. —.80.

Schellbach, K. H., über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien. 8. 1887. M. —.80.

— — neue Elemente der Mechanik, dargestellt und bearbeitet von G. Arendt. Mit 12 Tafeln. 1860. M. 5.50.

— — die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen. 1864. M. 6.—

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,
zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik
begründet
von
Carl Ohrtmann.
Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**
herausgegeben von
Emil Lampe.
Band XXIV.
Jahrgang 1892.
(In 3 Heften.)
Heft I: M. 12.—. Heft II: M. 8.—. Heft III: M. 12.—.

Allgemeine Mechanik
der Punkte und starren Systeme.
Ein Lehrbuch für Hochschulen
von
Dr. E. Budde.
Erster Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. Preis: 10 Mk.
Zweiter Band (Schluss): Mechanische Summen u. starre Gebilde. Preis: 13 Mk.

Handbuch
der
Kugelfunctionen,
Theorie und Anwendungen,
von
Dr. **E. Heine,**
ordentlichem Professor der Mathematik an der vereinigten
Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg.
Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage.
Erster Band. Theorie.
Preis: M. 8.—.
Zweiter Band. Anwendungen.
Preis: M. 6.—.

Band 116. Heft I.

Inhaltsverzeichniss.

G. Wallenberg. Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung. . . . . Seite 1

O. Zimmermann. Ueber die Ordnung der Enveloppe solcher ebenen Curvenreihen, deren Individuen sich in Gruppen von je w ordnen lassen, welche den Punkten einer Geraden projectiv sind. . . . . — 10

F. G. Teixeira. Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable. . . . — 14

E. Netto. Zur Theorie der Resultanten. . . . . — 33

A. Meder. Ueber einige Arten singulärer Punkte von Raumcurven. . . — 50

Ch. Hermite. Sur une extension du théorème de *Laurent*. . . . . — 85

M. Hamburger. Ableitung der *Gauss*schen Formel zur Bestimmung des jüdischen Osterfestes. . . . . — 90

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.

GENER
UNIV.
4 MA

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung des Herrn

Weierstrass

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 116.

Heft II.

Ausgegeben den 11. April.

Berlin, 1896.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Verlag von **Louis Nebert** in Halle a/S.

Enneper, Prof. Dr. A., **Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte.** Akademische Vorträge. **Zweite Auflage.** Neu bearb. u. herausg. von Prof. Dr. **Felix Müller.** Lex. 8. geh. 18 Mark.

Thomae, Hofrat, Prof. Dr. J., **Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung.** gr. 8°. geh. 6 Mark.

Thomae, Hofrat, Prof. Dr. J., **Abriss e. Theorie d. Funktionen e. complexen Veränderlichen u. der Thetafunktionen. Dritte,** erheblich vermehrte **Auflage.** gr. 4. geh. 10 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.** gr. 4. geh. 2 Mark 80 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., **Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Funktionen gebraucht werden.** gr. 4. geh. 3 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Funktionen.** 2 Teile. gr. 4. geh. 9 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine Funktion, welche einer linearen Differential- u. Differenzen-Gleichung IV. Ordn. Genüge leistet.** gr. 4. geh. 1 Mark 50 Pf.

Repetitorium der analytischen Geometrie. gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Hofmann, Dr. F., **Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen.** Ein Uebungsbuch für den geometrischen Teil der Funktionentheorie. gr. 8. geh. 2 Mark.

Rulf, Prof. W., **Elemente der projektivischen Geometrie.** gr. 8. geh. 2 Mark 50 Pf.

Beau, Dr. O., **Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale. Zweite** verb. u. verm. **Auflage.** gr. 4. geh. 5 Mark 50 Pf.

Odstrčil, Prof. Dr. J., **Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamilton'schen) Quaternionen.** gr. 8. geh. 2 Mark 25 Pf.

Hochheim, Prof. Dr. A., **Kâfî fîl Hisâb** (Genügendes über Arithmetik) **des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî.** 3 Hefte. gr. 4. geh. 3 Mark 90 Pf.

Hochheim, Dr. A., **Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte.** gr. 8. geh. 3 Mark.

Hochheim, Dr. A., **Ueber Pole u. Polaren d. parabol. Curven III. Ordn.** gr. 4. geh. 1 Mark.

Langer, Dr. P., **Die Grundprobleme der Mechanik.** Eine kosmologische Skizze. gr. 8. geh. 1 Mark 80 Pf.

Frege, Dr. G., **Begriffsschrift.** Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. gr. 8. geh. 3 Mark.

Radicke, A., **Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.** gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Schobloch, Dr. J. A., **Ueber Beta- und Gammafunktionen.** gr. 4. geh. 60 Pf.

Dronke, Dr. A., **Einleitung in die höhere Algebra.** gr. 8. geh. 4 Mark 50 Pf.

Günther, Prof. Dr., **Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Günther, Prof. Dr., **Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,

zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Studien über die
Reduction der Potentialgleichung
auf
gewöhnliche Differentialgleichungen.

Ein Anhang zu Heine's Handbuch der Kugelfunctionen

von

Dr. Emil Haentzschel,

Oberlehrer an der III. Realschule zu Berlin.

Preis: M. 6.—.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,
zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik
begründet
von
Carl Ohrtmann.
Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**
herausgegeben von
Emil Lampe.
Band XXIV.
Jahrgang 1892.
(In 3 Heften.)
Heft I: M. 12.—. Heft II: M. 8.—. Heft III: M. 12.—.

Allgemeine Mechanik
der Punkte und starren Systeme.
Ein Lehrbuch für Hochschulen
von
Dr. E. Budde.
Erster Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. Preis: 10 Mk.
Zweiter Band (Schluss): Mechanische Summen u. starre Gebilde. Preis: 13 Mk.

Handbuch
der
Kugelfunctionen,
Theorie und Anwendungen,
von
Dr. **E. Heine,**
ordentlichem Professor der Mathematik an der vereinigten
Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg.
Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage.
Erster Band. Theorie.
Preis: M. 8.—.
Zweiter Band. Anwendungen.
Preis: M. 6.—.

Band 116. Heft II.

Inhaltsverzeichniss.

L. **Schlesinger.** Ueber die Integration linearer homogener Differentialgleichungen durch Quadraturen. . . . . Seite 97

Sonin et **Hermite.** Sur les polynômes de ***Bernoulli***. (Extrait d'une correspondance entre M. ***Sonin*** à St. Pétersbourg et M. ***Hermite*** à Paris.) . — 133

L. **Heffter.** Ueber gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse. . . . . — 157

L. **Baur.** Zur Theorie der algebraischen Functionen. . . . . — 167

S. **Kantor.** Ueber die endlichen Gruppen von Correlationen. . . . . — 171

A. **Kneser.** Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments. (Erster Aufsatz.) . . . . . — 178

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung des Herrn

Weierstrass

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 116.

Heft III.

Ausgegeben den 30. Juni.

Berlin, 1896.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Verlag von **Louis Nebert** in Halle a/S.

Enneper, Prof. Dr. A., **Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte.** Akademische Vorträge. **Zweite Auflage.** Neu bearb. u. herausg. von Prof. Dr. **Felix Müller.** Lex. 8. geh. 18 Mark.

Thomae, Hofrat, Prof. Dr. J., **Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung.** gr. 8°. geh. 6 Mark.

Thomae, Hofrat, Prof. Dr. J., **Abriss e. Theorie d. Funktionen e. complexen Veränderlichen u. der Thetafunktionen. Dritte,** erheblich vermehrte **Auflage.** gr. 4. geh. 10 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.** gr. 4. geh. 2 Mark 80 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., **Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Funktionen gebraucht werden.** gr. 4. geh. 3 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Funktionen.** 2 Teile. gr. 4. geh. 9 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine Funktion, welche einer linearen Differential- u. Differenzen-Gleichung IV. Ordn. Genüge leistet.** gr. 4. geh. 1 Mark 50 Pf.

Repetitorium der analytischen Geometrie. gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Hofmann, Dr. F., **Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen.** Ein Uebungsbuch für den geometrischen Teil der Funktionentheorie. gr. 8. geh. 2 Mark.

Kulf, Prof. W., **Elemente der projektivischen Geometrie.** gr. 8. geh. 2 Mark 50 Pf.

Beau, Dr. O., **Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale. Zweite** verb. u. verm. **Auflage.** gr. 4. geh. 5 Mark 50 Pf.

Vdstrčil, Prof. Dr. J., **Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamilton'schen) Quaternionen.** gr. 8. geh. 2 Mark 25 Pf.

Wochheim, Prof. Dr. A., **Kâfî fîl Hisâb** (Genügendes über Arithmetik) **des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî.** 3 Hefte. gr. 4. geh. 3 Mark 90 Pf.

Wochheim, Dr. A., **Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte.** gr. 8. geh. 3 Mark.

Wochheim, Dr. A., **Ueber Pole u. Polaren d. parabol. Curven III. Ordn.** gr. 4. geh. 1 Mark.

Wanger, Dr. P., **Die Grundprobleme der Mechanik.** Eine kosmologische Skizze. gr. 8. geh. 1 Mark 80 Pf.

Wrege, Dr. G., **Begriffsschrift.** Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. gr. 8. geh. 3 Mark.

Wadicke, A., **Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.** gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Wehobloch, Dr. J. A., **Ueber Beta- und Gammafunktionen.** gr. 4. geh. 60 Pf.

Wronke, Dr. A., **Einleitung in die höhere Algebra.** gr. 8. geh. 4 Mark 50 Pf.

Wünther, Prof. Dr., **Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Wünther, Prof. Dr., **Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,

zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Allgemeine Theorie
der
zwei- und drei-teiligen astronomischen
Fernrohr-Objective.

Von

Aug. Kramer,

Oberlehrer, Dr. phil.

Mit zwei Figuren-Tafeln.

Preis: M. 10.—.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,
zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik
begründet
von
Carl Ohrtmann.
Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**
herausgegeben von
Emil Lampe.
Band XXV.
Jahrgang 1893 u. 94.
(In 3 Heften.)
Heft I: M. 21.—.

Allgemeine Mechanik
der Punkte und starren Systeme.
Ein Lehrbuch für Hochschulen
von
Dr. E. Budde.
Erster Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. Preis: 10 Mk.
Zweiter Band (Schluss): Mechanische Summen u. starre Gebilde. Preis: 13 Mk.

Handbuch
der
Kugelfunctionen,
Theorie und Anwendungen,
von
Dr. **E. Heine,**
ordentlichem Professor der Mathematik an der vereinigten
Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg.
Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage.
Erster Band. Theorie.
Preis: M. 8.—.
Zweiter Band. Anwendungen.
Preis: M. 6.—.

Band 116. Heft III.

Inhaltsverzeichniss.

A. Kneser. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments. (Erster Aufsatz.) (Fortsetzung der Arbeit S. 178 dieses Bandes.) . . Seite 185

Fr. Kötter. Ueber eine Darstellung der Richtungscosinus zweier orthogonalen Coordinatensysteme durch Thetafunctionen zweier Argumente, welche die Lösungen mehrerer Probleme der Mechanik als Specialfälle umfasst. . . . . — 213

A. Meder. Ueber einige Arten singulärer Punkte von Raumcurven. (Fortsetzung und Schluss der Arbeit aus Heft I dieses Bandes.) . . . . . — 247

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte **Mathematik**, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung des Herrn

Weierstrass

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 116.

Heft IV.

Ausgegeben den 24. August.

Berlin, 1896.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Soeben erschienen:

Weber, Prof. Heinrich, Lehrbuch der Algebra. Zweiter Band. Preis 20 *M.* —
Dasselbe Werk complet in zwei Bänden. Mit Abbildung. Preis 36 *M.* (Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.) — Zu beziehen durch alle Buchhandlungen.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,
zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Allgemeine Theorie
der
zwei- und drei-teiligen astronomischen
Fernror-Objective.
Von
Aug. Kramer,
Oberlehrer, Dr. phil.
Mit zwei Figuren-Tafeln.
Preis: M. 10.—.

Lehrproben.
Geometrische und algebraische Betrachtungen
über
Maxima und Minima.
Zum Gebrauch in den oberen Klassen höherer Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht, als Vorbereitung für den Besuch deutscher Hochschulen,
von
Dr. Paul Wiecke,
vormals Direktor der Kgl. höheren Gewerbeschule zu Cassel.
Mit Figuren im Text und 7 Tafeln.
Preis: cart. 5 Mk.

Studien über die
Reduction der Potentialgleichung
auf
gewöhnliche Differentialgleichungen.
Ein Anhang zu Heine's Handbuch der Kugelfunctionen
von
Dr. Emil Haentzschel,
Oberlehrer an der III. Realschule zu Berlin.
Preis: M. 6.—.

Verlag von **Georg Reimer** in Berlin,
zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik
begründet
von
Carl Ohrtmann.
Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**
herausgegeben von
Emil Lampe.
Band XXV.
Jahrgang 1893 u. 94.
(In 3 Heften.)
Heft I: M. 21.—. Heft II: M. 11.—.

Allgemeine Mechanik
der Punkte und starren Systeme.
Ein Lehrbuch für Hochschulen
von
Dr. E. Budde.
Erster Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. Preis: 10 Mk.
Zweiter Band (Schluss): Mechanische Summen u. starre Gebilde. Preis: 13 Mk

---

Handbuch
der
Kugelfunctionen,
Theorie und Anwendungen,
von
Dr. **E. Heine,**
ordentlichem Professor der Mathematik an der vereinigten
Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg.
Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage.
Erster Band. Theorie.
Preis: M. 8.—.
Zweiter Band. Anwendungen.
Preis: M. 6.—.

Band 116. Heft IV.
Inhaltsverzeichniss.

J. Horn. Ueber die Reihenentwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen. . Seite 265

A. Meyer. Ueber indefinite ternäre quadratische Formen. (Fortsetzung der Arbeit aus Bd. 115 Heft II S. 150—182 dieses Journals.) . . . . . — 307

F. Brioschi. Relations différentielles entre les périodes des fonctions hyperelliptiques $p = 2$. (Extrait d'une lettre de M. ***F. Brioschi*** à M. ***L. Fuchs.***) — 326

G. Landsberg. Ueber Fundamentalsysteme und bilineare Formen. . . . — 331

K. Hensel. Ueber den grössten gemeinsamen Theiler aller Zahlen, welche durch eine ganze Function von n Veränderlichen darstellbar sind. . . — 350

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.